

УДК 539.3

доцент Пастернак Я.М., Приходько О.С.,  
професор Сулим Г.Т.,  
Луцький національний технічний університет

## ВПЛИВ РОЗМІРІВ НА ПАРАМЕТРИ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ІЗ ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

*Досліджено осесиметричну деформацію циліндричного тіла з тонким сфероїдним включенням. Подано графіки зміни УКІН залежно від розмірів тіла та відносної жорсткості включення. Досліджено зміну концентрації напружень на фронтальній лінії дефекту залежно від товщини останнього та розмірів тіла. Для тонкого сфероїдного пружного включення здійснено аналіз зміни внутрішніх напружень залежно від відносної жорсткості та відношення розмірів включення і матриці. З'ясовано, що практично необмеженим можна вважати тіло із включенням, для якого відносний радіус фронтальної лінії є меншим за 0,4.*

**Ключові слова:** осесиметрична задача, включення, композиційні матеріали, концентрація напружень.

Вступ. Пружні платівкові включення є поширеним типом дефектів будови матеріалів, а також часто є каркасом композиційних матеріалів. Щілини та абсолютно жорсткі включення є лише окремими частковими (граничними) випадками пружних платівкових включень. Дослідження просторової задачі теорії пружності для тіл зі стрічковими пружними включеннями та тріщинами стосувалися, в основному, безмежних областей (простір, півпростір) [1, 2] та граничних випадків відносної жорсткості включення [3, 4, 5, 6]. Зрозуміло, що реальні об'єкти є тілами обмеженими, тому важливо мати оцінку відмінності побудованих для обмежених та безмежних областей розв'язків, зокрема й таких інтегральних характеристик внутрішньої концентрації напружень, якими є узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН).

У випадку обмежених областей рівняння специфічних підходів теорії тонких включень [1, 2, 7] є громіздкими і мало придатними до застосування. Тому для аналізу задачі слід використовувати також і числові методи, придатні для дослідження тонких об'єктів. Для визначення параметрів граничного стану за числовим розв'язком задачі розроблено низку підходів. Зокрема у [8] розпочато дослідження узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень методом екстраполяції для одночленних асимптотичних розвинень і подано конкретні результати для тріщиноподібних дефектів. Робота [9] започаткувала визначення УКІН за числовим розв'язком задачі з використанням обчислення

$J$ -інтеграла. Апроксимаційний підхід визначення УКІН за знайденим біля вершини тонкого пружного включення полем напружень розроблено у [14].

1. *Формулювання задачі.* Розглянемо осесиметричну деформацію пружного ізотропного циліндра (матриці) з розміщеним в його центрі тонким пружним чужорідним осесиметричним включенням, серединна поверхня якого паралельна до основ циліндра. Включення вставлене в матрицю без попереднього натягу, а на їхній спільній межі задовольняються умови ідеального механічного контакту. На поверхнях циліндра прикладене однорідне нормальне навантаження, за якого задовольняються умови статичної рівноваги композиту. Із центром включення зв'яжемо циліндричну систему координат  $Or\theta z$ , площину  $Or\theta$  якої сумістимо із серединною площиною включення. Схему задачі зображено на врізці до рис. 1.

Межу включення виберемо у формі сильно сплюсненого еліпсоїда обертання (сфероїда). Відповідна задача для необмеженої матриці має аналітичний розв'язок [10], причому напруження всередині включення є сталими. Більше того, для еліпсоїдного включення у необмеженому середовищі справджується принцип поліноміальної консервативності [11]: якщо поле деформацій на безмежності є поліномом деякого степеня, то поле деформацій всередині включення теж буде поліномом того ж степеня. Для обмежених тіл, очевидно, принцип поліноміальної консервативності справджуватися не буде.

2. *Числовий аналіз задачі.* Аналіз задачі здійснено методом граничних елементів. Внаслідок того, що для визначення параметрів граничного стану потрібно досліджувати розподіл напружень досить близько до межі дефекту, необхідно використовувати інтегральні рівняння, що є нечутливими до ефекту примежевого шару [12]. Для осесиметричної задачі теорії пружності відповідні інтегральні співвідношення для визначення напружень неперервно в усій області розв'язку аж до межі включно розроблено у роботі авторів [13]. Для визначення УКІН застосовано метод апроксимації поля напружень [14] із використанням двох членів асимптотичного розв'язку. Під час числового аналізу коефіцієнти Пуассона включення і матриці приймалися однаковими і рівними 0,3. Відносна жорсткість включення характеризувалася відношенням  $k = E^i/E^m$ , де  $E^i$ ,  $E^m$  – відповідно модулі пружності матеріалів включення та матриці. Відносна довжина включення описувалася параметром  $\lambda = a/R$ . Окремо досліджувалося необмежене тіло, для якого зовнішня межа не враховувалася, однак на нескінченності діяло відповідне однорідне поле напружень  $\sigma_{zz}^\infty = p$ ,  $\sigma_{rr}^\infty = q$ .

УКІН обчислювалися для включення з відношенням півосей  $a/b = 100$  залежно від відносної жорсткості включення  $k$  для таких значень параметра  $\lambda$ : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7. Відповідні значення нормованих УКІН

$K_{ij}^* = K_{ij} / (\sigma \sqrt{\pi a})$  зображені на рис. 1. Суцільні криві відповідають навантаженню  $p = \sigma$  ( $q = 0$ ), а штрихові –  $q = \sigma$  ( $p = 0$ ).

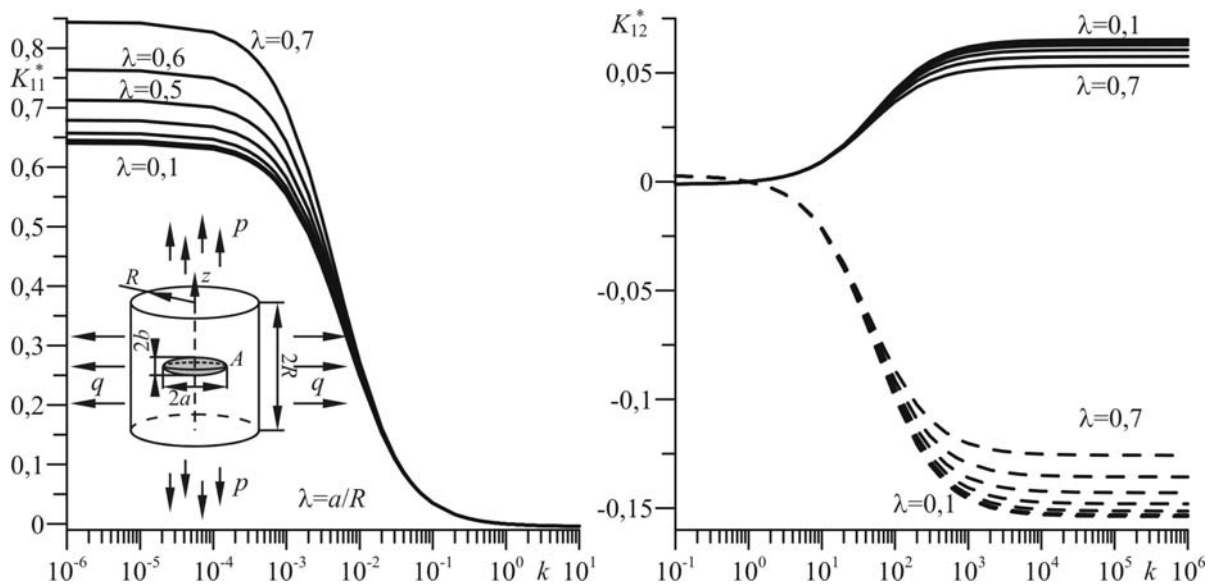


Рис. 1. Вплив відносних жорсткості  $k$  та довжини  $\lambda$  включення на значення УКІН

Отримані для  $k = 10^{-10}$  значення УКІН  $K_{11}$  зіставлялися з відповідним значенням КІН  $K_I$  для тріщини в нескінченно довгому циліндрі [15]. Максимальне відносне відхилення не перевищувало 4 % (за  $\lambda = 0,1$  відносне відхилення менше за 1 %). Значення УКІН  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ , отримані відповідно для  $k = 10^{-10}$  та  $k = 10^{10}$ , зіставлялися також з результатами здійсненого додатково методом скінченних елементів розрахунку задачі для тріщини та абсолютно жорсткого плівкового включення. Відносне відхилення не перевищувало 1 %.

Із рис. 1 видно, що як і для плоскої та антиплоскої деформації, для сильно податних включень зменшення розмірів тіла порівняно з довжиною включення збільшує значення УКІН. Так само для жорстких включень УКІН  $K_{12}$  за своєю абсолютною величиною зменшується. Для сумірних жорсткостей включення і матриці ( $10^{-2} < k < 10^2$ ) істотний вплив розмірів тіла на УКІН не простежується. Для податних включень кількісний вплив зміни розмірів тіла на відхилення УКІН більший, ніж для жорстких.

На рис. 2 відображено відсотковий вплив розмірів тіла та відношення півосей сфероїдних щілини чи абсолютно жорсткого включення на значення концентрації нормальних напружень матриці у місці її прилягання до фронтальної лінії дефекту (точка А)

$$\delta\sigma_{ij} = [\sigma_{ij}(\lambda) - \sigma_{ij}(0)] / \sigma_{ij}(0) \cdot 100\% .$$

Отримані для циліндра з неоднорідністю значення концентрації напружень  $\sigma_{ij}(\lambda)$  порівнювалися з числовим розв'язком задачі  $\sigma_{ij}(0)$  для необмеженої матриці ( $\lambda = 0$ ). Відхилення результатів останнього від аналітичного розв'язку

[10], отриманого на основі застосування принципу поліноміальної консервативності, не перевищувало 0,2 %. Позначення кривих таке ж, як і для рис. 1.

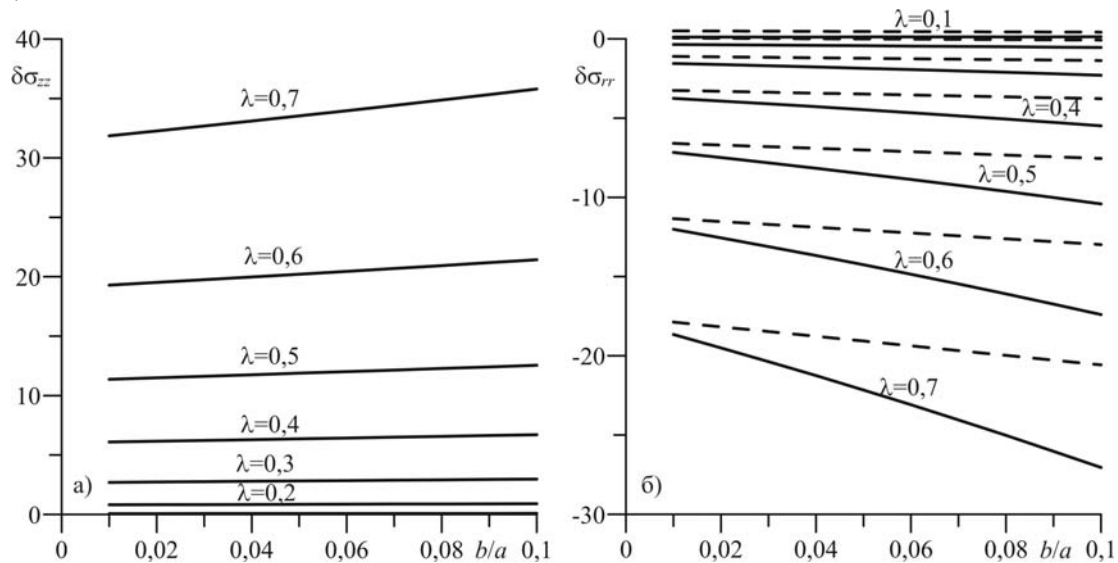


Рис. 2. Відсотковий вплив розмірів тіла та товщини сфероїдних отвору (а) і абсолютно жорсткого включення (б) на концентрацію напружень

Із рис. 2 видно, що від відносної товщини отвору (включення)  $b/a$  концентрація напружень залежить практично лінійно і не дуже сильно. Для малих  $\lambda$  її зміна зі зростанням  $b/a$  незначна і збільшується зі зростанням  $\lambda$ . Найбільша зміна концентрації напружень залежно від відносної товщини дефекту спостерігається для розтягу тіла у напрямі, перпендикулярному до серединної площини включення. Для  $b/a=1/100$  відносні відхилення концентрації напружень незначно відрізняються від відносних відхилень відповідних УКІН.

На рис. 3 зображено у відсотках зміну нормальних напружень у пружному сфероїдному включенні залежно від розмірів тіла та відносної жорсткості для трьох характерних точок. Навантаження прикладене у напрямі, перпендикулярному до серединної площини включення ( $q=0$ ). Схема задачі зображена на врізці до рис. 3. Суцільні криві відповідають відхиленню напружень у центрі  $O$  включення, штрихові – у вершині  $A$  на радіальній осі, штрихпунктирні – на кінці  $B$  малої півосі. Отримані напруження зіставлялися із відповідними значеннями аналітичного розв'язку для включення у необмеженому тілі [10] (практично такі ж значення (похибка не більше 0,2 %) отримані і при застосуванні до необмеженого тіла запропонованої схеми МГЕ). Фактично отримані дані є мірою ухилення у цих точках розв'язку від напружень, приписаних застосуванням принципу поліноміальної консервативності. У розрахунках відношення півосей сфероїда дорівнювало  $b/a=1/10$ .

Криві, що характеризують відносні значення напружень в центрі  $O$  та на кінці  $B$  малої півосі включення на графіку розрізнити практично не вдається. Для податних сфероїдних включень всередині циліндра напруження в їх центрі більші за напруження у фронтальній частині. Таке поведіння пояснюється вибором прикладеного навантаження та впливом вільного краю тіла. У порівнянні із плоскою задачею теорії пружності для тіла з пружним еліптичним включенням у квадратній матриці [16] (за тих самих геометричних пропорцій) вплив відносного розміру включення на зміну напружень у характерних точках сфероїда приблизно вдвічі менший.

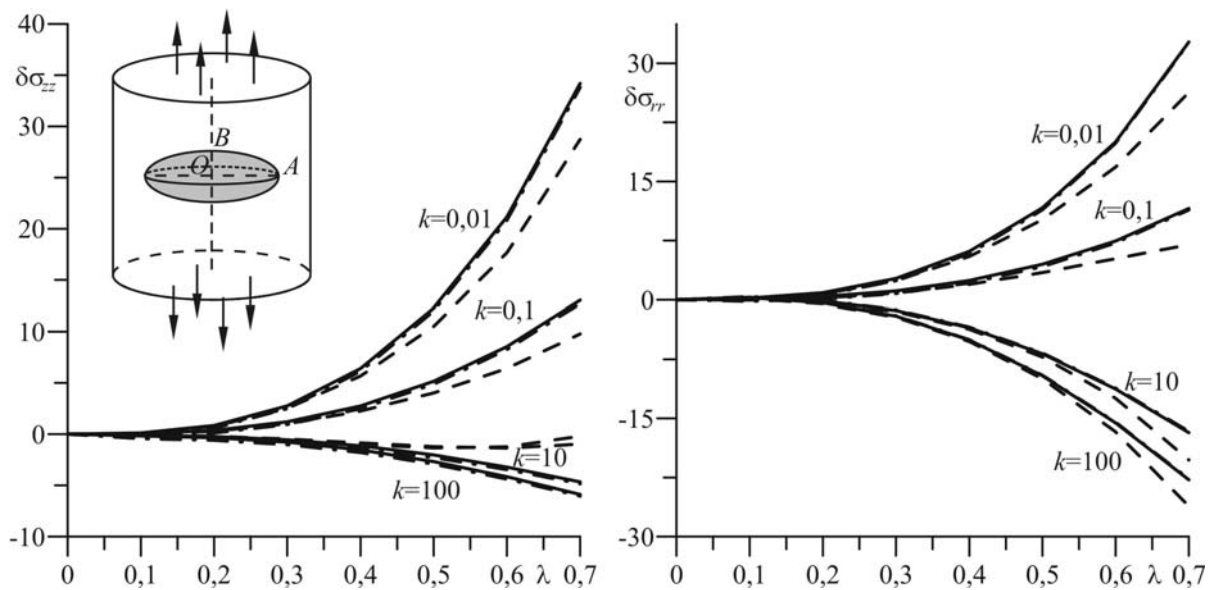


Рис. 3. Відсоткова зміна нормальних напружень у сфероїдному включенні порівняно з відповідними для включення у необмеженій матриці

Загалом із рис. 2, 3 видно, що із похибкою менше 10 % практично необмеженим можна вважати тіло із включенням, для якого параметр  $\lambda$  не перевищує 0,4 (для зменшення похибки до 5 % слід вважати  $\lambda < 0,2$ , а до 1 % –  $\lambda < 0,1$ ). Можна при цьому вважати, що застосування принципу поліноміальної консервативності до скінченного тіла відповідних розмірів матиме в цілому похибку такого ж рівня.

**Висновки.** Досліджено осесиметричну деформацію циліндричного тіла зі сплюснутим сфероїдним включенням. Подано графіки зміни УКІН залежно від розмірів тіла та відносної жорсткості включення. Для сильно податних включень зменшення розмірів тіла порівняно з довжиною включення збільшує значення УКІН, натомість для жорстких включень УКІН  $K_{12}$  за своєю абсолютною величиною зменшується. Для податних включень кількісний вплив зміни розмірів тіла на відхилення УКІН більший, ніж для жорстких. Досліджено зміну концентрації напружень на фронтальній лінії дефекту

залежно від товщини останнього та розмірів тіла. Відносні відхилення концентрації напружень незначно відрізняються від відносних відхилень відповідних УКІН. У порівнянні із плоскою задачею теорії пружності для тіла з пружним еліптичним включенням у квадратній матриці (за тих самих геометричних пропорцій) вплив відносного розміру включення на зміну напружень у характерних точках сфероїда приблизно вдвічі менший. Для тонкого еліптичного пружного включення здійснено аналіз зміни внутрішніх напружень залежно від відносної жорсткості та співвідношення розмірів включення і матриці. З'ясовано, що із похибкою менше 10 % практично необмеженим можна вважати тіло із платівковим включенням, для якого параметр  $\lambda$  не перевищує 0,4 (для зменшення похибки до 5 % слід вважати  $\lambda < 0,2$ , а до 1 % –  $\lambda < 0,1$ ).

### Література

1. Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
2. Силованюк В.П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: НАНУ Фіз.-мех. ін-т ім. Г.В. Карпенка, 2000. – 300 с.
3. Бережницький Л.Т., Денисюк І.Т. Напружено-деформований стан ізотропного тіла в околі жорсткого еліптичного пластинчатого включення // ДАН УРСР. Сер. А., 1984. – 12. – С. 31–35.
4. Бережницький Л.Т., Денисюк І.Т. Напряженно-деформированное состояние вблизи жесткого дискообразного включения в трансропном теле // Физ.-хим. мех. мат., 1984. – 1. – С. 45–50.
5. Selvadurai A.P.S. Mechanics of a rigid circular disc bonded to a cracked elastic half-space // International Journal of Solids and Structures, 2002. – 39. – P. 6035–6053.
6. Kanaun S.K., Levin V.M. Self-Consistent Methods for Composites. Vol.1: Static Problems. – Springer, 2008. – 376 p.
7. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів: дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Kuharchuk Yu. Stress intensity factors in plane bodies weakened by crack-type defects / Yu. Kuharchuk, G. Sulym // J. Theor. and Appl. Mech. – 1998. – 36. – No. 4. – P. 895–903.
9. Сулим Г. Використання енергетичних підходів для дослідження тонких пружних включень / Г. Сулим, Я. Пастернак // Машинознавство. – 2006. – № 9–10. – С. 13–16.
10. Eshelby J.D. The Determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems / J.D. Eshelby // Proceedings of Royal Society of London. – 1957. – A241. – P. 376–396.
11. Кунин И.А. Эллипсоидальная неоднородность в упругой сплошной среде / И.А. Кунин, Э.Г. Соснина // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 199. – № 3. – С. 571–574.
12. Cruse T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics / T.A. Cruse // Int. J. of Solids & Structures. – 1969. – 5. – P. 1259–1274.
13. Pasternak Ia. Self-regular stress integral equations for axisymmetric elasticity / Ia. Pasternak, H. Sulym // Accepted for publication in Engineering Analysis with Boundary elements, 2009.
14. Сулим Г.Т. Визначення параметрів граничного стану пружних тіл із тонкими включеннями за числовим розв'язком задачі / Г.Т. Сулим, Я.М. Пастернак // Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 2009. – 1.

15. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. / под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.

16. Пастернак Я. Вплив розмірів тіла з тонким включенням на параметри граничного стану у плоскій задачі теорії пружності / Я. Пастернак, Г. Сулим // *Машинознавство*

### **Аннотация**

Исследована осесимметричная деформация цилиндрического тела с тонким сфероидальным включением. Представлены графики изменения ОКИН в зависимости от размеров тела та относительной жесткости включения. Исследовано изменение концентрации напряжения по фронтальной линии дефекта в зависимости от толщины последнего а так же от размеров тела. Для тонкого сфероидального упругого включения проведен анализ изменения внутренних напряжений в зависимости от относительно жесткости и соотношения размеров включения и матрицы. Установлено, что тело с включением, для которого относительный радиус фронтальной линии есть меньше 0.4 можно считать практически бесконечным.

**Ключевые слова:** осесимметричная задача, включение, композитные материалы, концентрация напряжений.

### **Annotation**

This paper studies axisymmetric deformation of a cylindrical solid with a thin spheroidal inclusion. It shows dependence of generalized stress intensity factors on size of the solid and relative rigidity of the inclusion. It studies the stress concentration at the front line of the defect depending on the thickness of the latter and size of the solid. For thin spheroidal elastic inclusion it analyzes internal stress depending on the relative rigidity and the ratio of inclusion's and solid's size. It is shown that one can assume cylindrical solid infinite for inclusions, which relative radius of the front line is less than 0.4.

**Keywords:** axisymmetric problem, inclusion, composite materials, stress concentration