УДК 539.3

Пошивач Д.В.,
Київський національний університет будівництва та архітектури

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ ПЕРЕХРЕСНИХ ПРЯМИХ

Викладено методику розрахунку плоского напруженого стану прямокутної пластини із застосуванням методу перехресних прямих. При цьому в процедуру методу прямих внесені деякі зміни, що дозволяють отримати уточнений розв'язок.

Ключові слова: *плоска задача теорії пружності, метод прямих, метод перехресних прямих.*

Суть методу перехресних прямих полягає в тому, що на схему пластини накладаються два сімейства прямих, паралельних до координатних осей Ox і Oy (рис. 1). Відстань між прямими приймається сталою, рівною Δ.

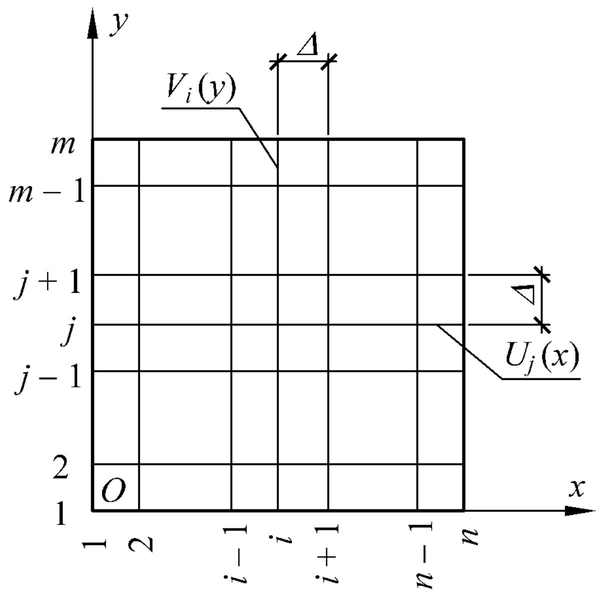

Рис. 1

Кожній прямій відповідає невідома функція однієї змінної $U_j(x)$ або $V_i(y)$. Ці функції визначають шукану функцію двох змінних $u(x,y)$, що має задовольняти відповідне диференціальне рівняння. Системи функцій уздовж кожного сімейства прямих розглядатимемо у вигляді векторів:

$$U(x) = [U_1(x), \quad U_2(x), \quad \dots, \quad U_m(x)]^{\mathrm{T}},$$
$$V(y) = [V_1(y), \quad V_2(y), \quad \dots, \quad V_n(y)]^{\mathrm{T}}. \qquad (1)$$

Сума значень цих векторів у відповідних точках дає шукану функцію:

$$u(x_i, y_j) = U_j(x_i) + V_i(y_j). \tag{2}$$

Для кожного вектора функцій однієї змінної (1) можливим є диференціювання по координаті вздовж відповідного сімейства прямих. Диференціювання ж у поперечному напрямку здійснюється методом скінченних різниць. Наприклад,

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \left.\frac{\mathrm{d}U_j(x)}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=x_i} + V_i^{\mathrm{I}}(y_j),$$

де під $V_i^{\mathrm{I}}(y)$ будемо розуміти скінченну різницю відповідних елементів вектора $V(y)$.

У скінченно-різницеві співвідношення можуть бути залучені функції, що відповідають прямим, розташованим за контуром пластини. Для методу перехресних прямих може бути прийнятий періодичний характер векторів (1). Якщо вважати, що кожне сімейство прямих складається з нескінченної їх кількості, і проведені вони не лише в межах пластини, а й з обох боків за її межами, тоді періодичність векторів (1) слід розуміти так, що функції, відповідні до прямих у межах пластини, періодично повторюються на прямих, розташованих за межами пластини (рис. 2). Таким чином, загальна кількість невідомих елементів векторів (1) відповідатиме кількості прямих, проведених у межах пластини: використання законтурних прямих не збільшуватиме цю кількість невідомих.

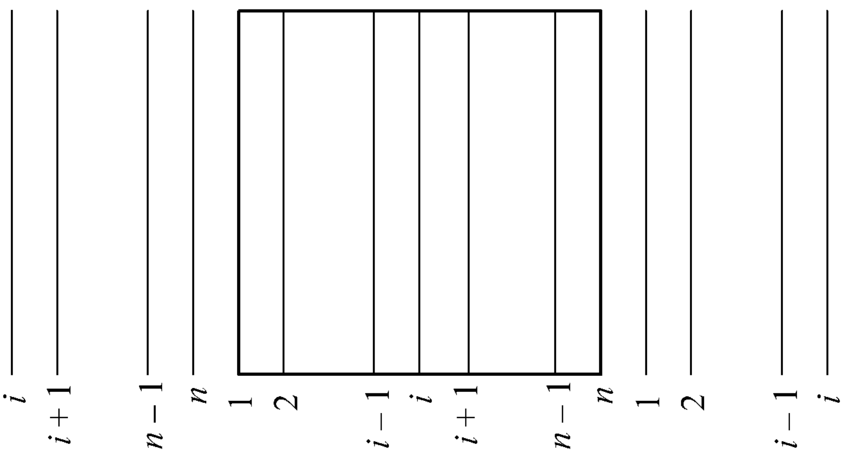

Рис. 2

На кожну функцію $U_j(x)$ та $V_i(y)$ накладаються граничні умови в точках, де відповідна пряма перетинає контур пластини.

Розглянемо порядок складання скінченно-різницевих виразів похідних. Зазначимо, що, на відміну від методик, запропонованих у працях [1] та [2], наразі пропонується використання виключно центральних скінченних різниць.

Виразимо методом скінченних різниць похідну по вертикальній координаті y від системи функцій, змінюваних уздовж горизонтальних прямих. У точках j-ї горизонтальної прямої така похідна дорівнює

$$U_j^{\mathrm{I}}(x)=\frac{U_{j+1}(x)-U_{j-1}(x)}{2\mathit{\Delta}}.$$

Другу похідну на j-й горизонтальній прямій виразимо як центральну скінченну різницю відповідних перших похідних:

$$U_j^{\mathrm{II}}(x)=\frac{U_{j+1}^{\mathrm{I}}(x)-U_{j-1}^{\mathrm{I}}(x)}{2\mathit{\Delta}}=\left(\frac{U_{j+2}(x)-U_j(x)}{2\mathit{\Delta}}-\frac{U_j(x)-U_{j-2}(x)}{2\mathit{\Delta}}\right)\Big/(2\mathit{\Delta})=$$

$$=\frac{U_{j+2}(x)-2U_j(x)+U_{j-2}(x)}{4\mathit{\Delta}^2}.$$

Третю похідну виразимо як центральну скінченну різницю відповідних других похідних:

$$U_j^{\mathrm{III}}(x)=\frac{U_{j+1}^{\mathrm{II}}(x)-U_{j-1}^{\mathrm{II}}(x)}{2\mathit{\Delta}}=\frac{U_{j+3}(x)-3U_{j+1}(x)+3U_{j-1}(x)-U_{j-3}(x)}{8\mathit{\Delta}^3}.$$

Аналогічно виразимо четверту похідну:

$$U_j^{\mathrm{IV}}(x)=\frac{U_{j+1}^{\mathrm{III}}(x)-U_{j-1}^{\mathrm{III}}(x)}{2\mathit{\Delta}}=$$

$$=\frac{U_{j+4}(x)-4U_{j+2}(x)+6U_j(x)-4U_{j-2}(x)+U_{j-4}(x)}{16\mathit{\Delta}^4}.$$

Зауважимо, що в отриманих скінченно-різницевих співвідношеннях задіяні функції, які відповідають прямим, розташованим на відстанях $2\mathit{\Delta}$ одна від одної.

Отримані формули визначають похідні на окремій прямій. Для розв’язання вихідного диференціального рівняння необхідно застосувати операцію диференціювання у матричному вигляді до векторів (1) в цілому:

$$U^{\mathrm{I}}(x)=\frac{C_y^1}{\mathit{\Delta}}U(x),\quad U^{\mathrm{II}}(x)=\frac{C_y^2}{\mathit{\Delta}^2}U(x),\quad U^{\mathrm{III}}(x)=\frac{C_y^3}{\mathit{\Delta}^3}U(x),\quad \ldots,$$

де $U^{\mathrm{I}}(x)=\left[U_1^{\mathrm{I}}(x),\quad U_2^{\mathrm{I}}(x),\quad \ldots,\quad U_m^{\mathrm{I}}(x)\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор перших похідних,
$U^{\mathrm{II}}(x)$, $U^{\mathrm{III}}(x)$ — аналогічні вектори других та третіх похідних відповідно,
C_y^1, C_y^2, C_y^3 — матричні оператори взяття перших, других та третіх похідних у скінченно-різницевому вигляді відповідно.

Запишемо матрицю C_y^1, враховуючи періодичність вектора $U(x)$. Якщо, наприклад, $m=5$, матриця C^1 матиме такий вигляд:

$$C_y^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оператори взяття похідних вищого порядку можуть бути виражені через оператори нижчого порядку:

$$C_y^2 = C_y^1 C_y^1,$$

$$C_y^3 = C_y^1 C_y^1 C_y^1 = C_y^1 C_y^2 = C_y^2 C_y^1, \tag{3}$$

$$C_y^4 = C_y^1 C_y^1 C_y^1 C_y^1 = C_y^2 C_y^2, \quad \ldots$$

Матриця C_y^1 має косу симетрію відносно головної діагоналі. З формул (3) можна зробити висновок, що усі оператори парних порядків будуть симетричними, а непарних — кососиметричними.

Звернемося до перетворення матриці C_y^2 із застосуванням її власних чисел і власних векторів. Власні числа $\lambda_{y,k}$ і власні вектори $v_{y,k}$ повинні задовольняти рівняння

$$\left(C_y^2 - \lambda_{y,k} E_m\right) v_{y,k} = 0,$$

$$k = 1, \quad \ldots, \quad m,$$

де E_m — одинична матриця розмірності $m \times m$.

Складемо матрицю v_y, взявши в якості стовпців вектори $v_{y,k}$:

$$v_y = \left[v_{y,1}, \quad v_{y,2}, \quad \ldots, \quad v_{y,m}\right].$$

Подальші перетворення широко використовують таку її властивість, що

$$v_y v_y = E_m,$$

тобто $v_y = v_y^{-1}$. Її елементи дорівнюють

$$v_{y,i,j} = \frac{\sqrt{m}}{m}\left(\sin\frac{2ij\pi}{m} + \cos\frac{2ij\pi}{m}\right). \tag{4}$$

Власні числа матриці C_y^2 дорівнюють

$$\lambda_{y,k} = -\sin^2\frac{2k\pi}{m}. \tag{5}$$

На доведенні формул (4) й (5), яке є доволі громіздким, зупинятися не будемо. З цих формул випливає, що

$$C_y^2 = v_y \operatorname{diag}\left(\lambda_{y,k}\right) v_y.$$

Перейдемо до розв’язання систем диференціальних рівнянь. Розглянемо рівняння в переміщеннях задачі про плоский напружений стан:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial x^2} + k_1 \dfrac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial y^2} + k_2 \dfrac{\partial^2 u_y(x,y)}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1-\mu^2}{E} q_x(x,y), \\ \dfrac{\partial^2 u_y(x,y)}{\partial y^2} + k_1 \dfrac{\partial^2 u_y(x,y)}{\partial x^2} + k_2 \dfrac{\partial^2 u_x(x,y)}{\partial x \partial y} = -\dfrac{1-\mu^2}{E} q_y(x,y), \end{cases} \tag{6}$$

де u_x, u_y — шукані горизонтальне та вертикальне переміщення відповідно,
q_x, q_y — горизонтальне та вертикальне навантаження, розподілені по площі пластини,
E і μ — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу,
$k_1 = \dfrac{1-\mu}{2}$, $k_1 = \dfrac{1+\mu}{2}$.

Невідому функцію $u_x(x,y)$ представимо векторами $U_x(x)$, $V_x(y)$, а $u_y(x,y)$ — векторами $U_y(x)$, $V_y(y)$ у сенсі формули (2). Перетворення системи (6), пов'язані з підстановкою векторів $U_x(x)$ та $U_y(x)$, визначених уздовж горизонтальних прямих, виконуються окремо від цілком аналогічних перетворень, що пов'язані з підстановкою $V_x(y)$ та $V_y(y)$. Тому детально розглянемо лише підстановку векторів $U_x(x)$ та $U_y(x)$.

На підставі системи (6) матимемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 U_x(x)}{\mathrm{d}x^2} + k_1 \dfrac{C_y^2}{\Delta^2} U_x(x) + k_2 \dfrac{C_y^1}{\Delta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}U_y(x)}{\mathrm{d}x} = Q_x(x), \\ \dfrac{C_y^2}{\Delta^2} U_y(x) + k_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 U_y(x)}{\mathrm{d}x^2} + k_2 \dfrac{C_y^1}{\Delta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}U_x(x)}{\mathrm{d}x} = Q_y(x), \end{cases}$$

де $Q_x(x)$, $Q_y(x)$ — вектори зведених навантажень.

Введемо заміну $\lambda_{y,k} = -\Delta^2 \beta_{y,k}^2$. Тоді

$$\frac{C_y^2}{\Delta^2} = -v_y \operatorname{diag}\left(\beta_{y,k}^2\right) v_y.$$

Врахувавши це у системі рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 U_x(x)}{\mathrm{d}x^2} - k_1 v_y \operatorname{diag}\left(\beta_{y,k}^2\right) v_y U_x(x) + k_2 \dfrac{C_y^1}{\Delta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}U_y(x)}{\mathrm{d}x} = Q_x(x), \\ -v_y \operatorname{diag}\left(\beta_{y,k}^2\right) v_y U_y(x) + k_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 U_y(x)}{\mathrm{d}x^2} + k_2 \dfrac{C_y^1}{\Delta} \cdot \dfrac{\mathrm{d}U_x(x)}{\mathrm{d}x} = Q_y(x). \end{cases} \tag{7}$$

Розв'яжемо дану систему рівнянь засобами операційного числення, які дозволяють перейти від диференціальних рівнянь відносно функцій до алгебраїчних рівнянь відносно зображень цих функцій. Нехай

$$U_x(x) \to W_x(s), \quad U_y(x) \to W_y(s).$$

Тоді

$$\frac{\mathrm{d}U_x(x)}{\mathrm{d}x} \to sW_x(s) - U_x(0),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 U_x(x)}{\mathrm{d}x^2} \to s^2 W_x(s) - sU_x(0) - U'_x(0),$$

де $U'_x(0) = \left.\frac{\mathrm{d}U_x(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

Врахувавши ці співвідношення в системі (7), отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} v_y\,\mathrm{diag}\left(s^2 - k_1\beta_{y,k}^2\right)v_y W_x(s) + k_2\dfrac{C_y^1}{\varDelta} sW_y(s) = \\ = sU_x(0) + U'_x(0) + k_2\dfrac{C_y^1}{\varDelta}U_y(0) + P_x(s), \\ v_y\,\mathrm{diag}\left(k_1 s^2 - \beta_{y,k}^2\right)v_y W_y(s) + k_2\dfrac{C_y^1}{\varDelta} sW_x(s) = \\ = k_1 sU_y(0) + k_1 U'_y(0) + k_2\dfrac{C_y^1}{\varDelta}U_x(0) + P_y(s), \end{cases} \tag{8}$$

де $P_x(s)$, $P_y(s)$ — зображення функцій $Q_x(x)$ та $Q_y(x)$ відповідно.

Вважаючи навантаження, розподілені по площі пластини, рівними нулю, отримаємо загальний розв'язок системи (8):

$$W_x(s) = v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{s^3 - (1+k_2)\beta_{y,k}^2 s}{\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y U_x(0) + v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{k_1 s^2 - \beta_{y,k}^2}{k_1\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y U'_x(0) -$$

$$- v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{k_2\beta_{y,k}^2}{k_1\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y\frac{C_y^1}{\varDelta}U_y(0) - v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{k_2 s}{\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y\frac{C_y^1}{\varDelta}U'_y(0),$$

$$W_y(s) =$$

$$= -v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{k_2\beta_{y,k}^2}{\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y\frac{C_y^1}{\varDelta}U_x(0) - v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{k_2 s}{k_1\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y\frac{C_y^1}{\varDelta}U'_x(0) +$$

$$+ v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{k_1 s^3 + \mu\beta_{y,k}^2 s}{k_1\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y U_y(0) + v_y\,\mathrm{diag}\left(\frac{s^2 - k_1\beta_{y,k}^2}{\left(s^2 - \beta_{y,k}^2\right)^2}\right)v_y U'_y(0).$$

З отриманих операторних виразів можна вивести такі функціональні вирази:

$$U_x(x) = v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,1}(x)\right] v_y U_x(0) + v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,2}(x)\right] v_y U'_x(0) +$$

$$+ v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,3}(x)\right] v_y \frac{C_y^1}{\Delta} U_y(0) + v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,4}(x)\right] v_y \frac{C_y^1}{\Delta} U'_y(0),$$

$$U_y(x) = v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,5}(x)\right] v_y \frac{C_y^1}{\Delta} U_x(0) + v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,6}(x)\right] v_y \frac{C_y^1}{\Delta} U'_x(0) +$$

$$+ v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,7}(x)\right] v_y U_y(0) + v_y \operatorname{diag}\left[f_{y,k,8}(x)\right] v_y U'_y(0),$$

де $f_{y,k,1}(x) = \frac{1}{2}\left[2\operatorname{ch}(\beta_{y,k}x) - k_2\beta_{y,k}x\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x)\right]$,

$$f_{y,k,2}(x) = \frac{1}{2k_1\beta_{y,k}}\left[k_3\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x) - k_2\beta_{y,k}x\operatorname{ch}(\beta_{y,k}x)\right],$$

$$f_{y,k,3}(x) = \frac{k_2}{2k_1\beta_{y,k}}\left[\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x) - \beta_{y,k}x\operatorname{ch}(\beta_{y,k}x)\right],$$

$$f_{y,k,4}(x) = \frac{k_2}{2\beta_{y,k}^2}\left[-\beta_{y,k}x\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x)\right],$$

$$f_{y,k,5}(x) = \frac{k_2}{2\beta_{y,k}}\left[\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x) - \beta_{y,k}x\operatorname{ch}(\beta_{y,k}x)\right],$$

$$f_{y,k,6}(x) = \frac{k_2}{2k_1\beta_{y,k}^2}\left[-\beta_{y,k}x\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x)\right],$$

$$f_{y,k,7}(x) = \frac{1}{2k_1}\left[2k_1\operatorname{ch}(\beta_{y,k}x) + k_2\beta_{y,k}x\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x)\right],$$

$$f_{y,k,8}(x) = \frac{1}{2\beta_{y,k}}\left[k_3\operatorname{sh}(\beta_{y,k}x) + k_2\beta_{y,k}x\operatorname{ch}(\beta_{y,k}x)\right],$$

$$k_3 = \frac{3-\mu}{2}.$$

Виконавши цілком аналогічну процедуру розв’язання системи (6) із підстановкою в неї векторів $V_x(y)$, $V_y(y)$, можна отримати аналогічні формули цих векторів:

$$V_x(y) = v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,5}(y)\right] v_x \frac{C_x^1}{\Delta} V_y(0) + v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,6}(y)\right] v_x \frac{C_x^1}{\Delta} V_y'(0) +$$

$$+ v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,7}(y)\right] v_x V_x(0) + v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,8}(y)\right] v_x V_x'(0),$$

$$V_y(y) = v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,1}(y)\right] v_x V_y(0) + v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,2}(y)\right] v_x V_y'(0) +$$

$$+ v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,3}(y)\right] v_x \frac{C_x^1}{\Delta} V_x(0) + v_x \operatorname{diag}\left[f_{x,k,4}(y)\right] v_x \frac{C_x^1}{\Delta} V_x'(0),$$

де C_x^1 — матриця оператора взяття похідної по горизонтальній координаті у скінченно-різницевій формі,
v_x — матриця, складена з власних векторів матриці C_x^2.

Функції $f_{x,k,1}(y)$, …, $f_{x,k,8}(y)$ цілком подібні до $f_{y,k,1}(x)$, …, $f_{y,k,8}(x)$, з тією відмінністю, що замість $\beta_{y,k}$ у них використовуються власні значення $\beta_{x,k}$ матриці C_x^2.

Шукані функції $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ можуть бути знайдені у точках перетину двох сімейств прямих за формулою (2):

$$\begin{aligned} u_x(x_i, y_j) &= U_{x,j}(x_i) + V_{x,i}(y_j), \\ u_y(x_i, y_j) &= U_{y,j}(x_i) + V_{y,i}(y_j). \end{aligned} \tag{9}$$

Необхідні для цього вектори констант $U_x(0)$, $U_x'(0)$, $U_y(0)$, $U_y'(0)$, $V_x(0)$, $V_x'(0)$, $V_y(0)$, $V_y'(0)$ визначаються з системи рівнянь, які складаються на підставі граничних умов в усіх точках, де прямі двох сімейств перетинають контур пластини. На відміну від процедури розв’язання диференціального рівняння, яка для двох сімейств прямих виконувалася окремо, під час розгляду граничних умов необхідно керуватися формулами (9), які враховують обидва сімейства функцій однієї змінної.

Означений вище метод перехресних прямих дозволяє розв’язувати задачі про прямокутні пластини, задовольняючи граничні умови на всіх сторонах їхнього контуру.

Література

1. Шкелёв Л.Т. Метод прямых и его использование при определении напряжённого и деформированного состояний пластин и оболочек: Монография / Л.Т. Шкелёв, Ю.А. Морсков, Т.А. Романова, А.Н. Станкевич. — К.: НАНУ, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. — 177 с.

2. Шкелёв Л. Т. Применение метода прямых для определения напряжённого и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: Монография / Л.Т. Шкелёв,

А.Н. Станкевич, Д.В. Пошивач, А.Ф. Корбаков. — К.: КНУСА, 2004. — 136 с.

Аннотация

Изложена методика расчёта плоского напряжённого состояния прямоугольной пластины с применением метода перекрёстных прямых. При этом в процедуру метода прямых внесены некоторые изменения, позволяющие получить уточнённое решение.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, метод прямых, метод перекрёстных прямых.

Annotation

A technique is given for calculating a plane stress of a rectangular plate with the method of crossed lines. At that, the method of lines procedure is modified to obtain a refined solution.

Keywords: plane problem in the theory of elasticity, method of lines, method of crossed lines.