УДК 539.3
д.т.н., проф. Сурьянинов Н.Г., Павленко И.В.,
Одесский национальный политехнический университет

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Разработана методика построения функции Грина при решении задачи изгиба ортотропной пластины численно-аналитическим методом граничных элементов. Приводится общий алгоритм построения функции Грина, в соответствии с которым получено ее аналитическое выражение.

Ключевые слова: *ортотропная пластина, функция Грина, функция Хевисайда, граничный элемент.*

Постановка проблемы и её актуальность. Развитие различных отраслей машиностроения, авиационно-космической техники, судостроения, строительства и целого ряда других направлений ставит задачи расчета экономичных тонкостенных систем и, в частности, пластин.

При этом на современном этапе уровень развития производства характеризуется широким внедрением новых технологий изготовления высокопрочных материалов, обладающих ортотропными (ортогонально анизотропными) свойствами.

В силу определенных проблем математического характера получить аналитическое решение дифференциального уравнения изгиба ортотропной пластины удается не всегда. Существенную роль здесь играют условия закрепления краев пластины и локальные нагрузки. Широко применяются численные методы анализа, но здесь, как известно, нет универсального подхода.

Цель статьи. Задачи механики деформируемого твердого тела сводятся, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям. Получить их решение в замкнутом виде удается далеко не всегда, поэтому используются приближенные и численные методы расчета.

Одним из быстро развивающихся в последние годы является численно-аналитический метод граничных элементов (ЧА МГЭ), применение которого во многих случаях более эффективно, чем использование метода конечных элементов (МКЭ). С помощью ЧА МГЭ получены решения целого ряда задач [1, 2], однако многие вопросы остаются пока нерешенными.

В работе исследуется одна из важнейших и актуальных проблем, возникающих при использовании алгоритма ЧА МГЭ [1] для решения задач изгиба ортотропных пластин — построение функции Грина.

Изложение основного материала исследования. Основное разрешающее уравнение изгиба ортотропной пластины (уравнение Жермен–Лагранжа) имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial y^4} = q(x,y), \qquad (1)$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};$$

$$D_3 = D_1\mu_{xy} + 2D_k = D_2\mu_{yx} + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12};$$

E_x, E_y — модули упругости в направлениях осей; G — модуль сдвига; h — толщина пластины; μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты Пуассона.

Используя метод Канторовича-Власова, уравнение (1) можно привести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, общим решением которого будет

$$Y = C_1 y_1(y) + C_2 y_2(y) + C_3 y_3(y) + C_4 y_4(y) + y_*(y). \qquad (2)$$

Частное решение $y_*(y)$ в (2) зависит от вида внешней нагрузки; его удобно представить как

$$y_*(y) = \int_0^y G(y,\xi) q(\xi) d\xi,$$

где $G(y,\xi) = Y(y,\xi) H(y-\xi)$ — функция Грина; $H(y-\xi)$ — функция Хевисайда.

Если заранее оговорить, что $y > \xi$, то $H(y-\xi) = 1$ и тогда

$$Y(y,\xi) = C_1(\xi) y_1(y) + C_2(\xi) y_2(y) + C_3(\xi) y_3(y) + C_4(\xi) y_4(y). \qquad (3)$$

Константы $C_i(\xi)$ определяются из условия

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_3(\xi) & y_4(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & y_3'(\xi) & y_4'(\xi) \\ y_1''(\xi) & y_2''(\xi) & y_3''(\xi) & y_4''(\xi) \\ y_1'''(\xi) & y_2'''(\xi) & y_3'''(\xi) & y_4'''(\xi) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{N}_1 \\ \tilde{N}_2 \\ \tilde{N}_3 \\ \tilde{N}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\grave{a}_0 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Здесь $\grave{a}_0 = 1$ — коэффициент при старшей степени дифференциального уравнения задачи.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения задачи зависит от корней соответствующего ему характеристического уравнения [1]

$$K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \tag{5}$$

Рассмотрим вывод формулы для функции Грина применительно к варианту корней характеристического уравнения, который соответствует стесненному кручению пластины, т.е.

$K_{1,2} = 0$; $K_{3,4} = \pm r_1$; $r_1 = -2B/A$; $s = 0$;

$$y_1 = shr_1\xi;\ y_2 = 1;\ y_3 = \xi;\ y_4 = chr_1\xi; \tag{6}$$

Перепишем (4) в виде

$$\begin{cases} y_1C_1 + y_2C_2 + y_3C_3 + y_4C_4 = 0; \\ y_1'C_1 + y_2'C_2 + y_3'C_3 + y_4'C_4 = 0; \\ y_1''C_1 + y_2''C_2 + y_3''C_3 + y_4''C_4 = 0; \\ y_1'''C_1 + y_2'''C_2 + y_3'''C_3 + y_4'''C_4 = 1, \end{cases}$$

или, с учетом (6),

$$\begin{cases} y_1C_1 + y_2C_2 + y_3C_3 + y_4C_4 = 0; \\ r_1y_4C_1 + C_3 + r_1y_1C_4 = 0; \\ r_1^2y_1C_1 + r_1^2y_4C_4 = 0; \\ r_1^3y_4C_1 + r_1^3y_1C_4 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{y_4}{r_1^3\left(y_4^2 - y_1^2\right)}; \\ C_2 = \dfrac{y_3}{r_1^2y_2}; \\ C_3 = -\dfrac{1}{r_1^2}; \\ C_4 = -\dfrac{y_1}{r_1^3\left(y_4^2 - y_1^2\right)}. \end{cases}$$

Здесь y_1, y_2, y_3, y_4 — это функции от ξ.

Подставляя в (3) значения констант $C_1 - C_4$, получим

$$G(y,\xi)=\frac{y_4(\xi)y_1(y)}{r_1^3\left(y_4^2(\xi)-y_1^2(\xi)\right)}+\frac{y_3(\xi)y_2(y)}{r_1^2 y_2(\xi)}-$$
$$-\frac{y_3(y)}{r_1^2}-\frac{y_1(\xi)y_4(y)}{r_1^3\left(y_4^2(\xi)-y_1^2(\xi)\right)}=$$
$$=\frac{1}{r_1^3\left(y_4^2(\xi)-y_1^2(\xi)\right)}\left[y_1(y)y_4(\xi)-y_1(\xi)y_4(y)\right]+$$
$$+\frac{1}{r_1^2}\left[\frac{y_2(y)y_3(\xi)}{y_2(\xi)}-y_3(y)\right]=$$
$$=\frac{1}{r_1^3}\left[\frac{chr_1\xi shr_1 y-shr_1\xi chr_1 y}{ch^2 r_1\xi-sh^2 r_1\xi}\right]+\frac{1}{r_1^2}[\xi-y]=$$
$$=\frac{1}{r_1^3}shr_1(y-\xi)-\frac{1}{r_1^2}(y-\xi)=\frac{1}{r_1^2}\left[\frac{1}{r_1}shr_1(y-\xi)-(y-\xi)\right].$$

При построении полной системы фундаментальных функций [3] было получено:

$$A_{14}=-\frac{1}{Ar_1^2}\left(\frac{1}{r_1}\Phi_1-\Phi_3\right),$$

следовательно,

$$G(y-\xi)=-AA_{14}(y-\xi), \tag{8}$$

где A — коэффициент, вычисленный в [3].

Заключение. Можно убедиться, что построенная функция $G(y,\xi)$ обладает всеми свойствами, характерными для функции Грина:

а) $G(y,\xi)=0$ при $y<\xi$;

б) $G(y,\xi)$ как функция от y при фиксированном ξ в интервале $(0,y_{\text{ãð}})$, за исключаем точки $y=\xi$, удовлетворяют дифференциальному уравнению задачи;

в) $G(y,\xi)$ и ее производные по y до n-го порядка включительно непрерывны для $y\in(0,y_{гр})$, за исключением точки $y=\xi$, в которой производные по y непрерывны лишь до $(n-2)$ порядка, а $(n-1)$ производная имеет разрыв I рода со скачком

$$\left.\frac{d^{(n-1)}G(y,\xi)}{dy^{(n-1)}}\right|_{y=\xi+0}-\left.\frac{d^{(n-1)}G(y,\xi)}{dy^{(n-1)}}\right|_{y=\xi-0}=\frac{1}{a_0};$$

г) при $y=\xi$,

$$G(\xi,\xi)=G'(\xi,\xi)=...=G^{(n-2)}(\xi,\xi)=0;\ G^{(n-1)}(\xi,\xi)=\frac{1}{a_0}=1;$$

д) $G(y,\xi)$ для дифференциального уравнения задачи (а это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами) зависит только от разности $(y-\xi)$.

Выражение (8) будет использовано в дальнейшем при построении вектора нагрузки в соответствии с алгоритмом численно-аналитического метода граничных элементов.

Литература

1. Дащенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса, ВМВ, 2010. — В 2–х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
2. Оробей В.Ф. Практикум по решению краевых задач механики: Учебное пособие для студентов технических специальностей / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: Астропринт, 2011. — 408 с.
3. Максимович О.В. Определение фундаментальных функций в задаче изгиба ортотропной пластины / О.В. Максимович, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Авиационно-космическая техника и технология. — Харьков, ХАИ, 2011, вып.3(80). — с.37-42.

Анотація

Розроблено методику побудови функції Гріна при вирішенні задачі згину ортотропної пластини чисельно-аналітичним методом граничних елементів. Наводиться загальний алгоритм побудови функції Гріна, відповідно до якого отримано її аналітичний вираз.

Ключові слова: ортотропна пластина, функція Гріна, функція Хевісайда, граничний елемент.

Annotation

A method for constructing the Green's function in solving the problem of bending of orthotropic plates numerical-analytical boundary element method. Provides an algorithm for constructing the Green's function, whereby it obtained an analytical expression.

Keywords: orthotropic plate, the Dirac delta function, the Heaviside function, boundary element.