УДК 51-77 к. ф.-м. н. Бондаренко Н.В.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

АЛГЕБРАЇЧНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ПО ТЕРИТОРІАЛЬНОМУ ПЛАНУВАННЮ ЛІСОВИХ НАСАДЖЕНЬ

Розглядаються математичні моделі, пов’язані із оптимізаційними задачами по територіальному планування лісових насаджень з багатьма породами дерев, та алгебраїчні методи їх розв’язання.

Ключові слова. Територіальне планування, лісові насадження, оптимізаційні задачі, невід’ємні матриці.

За останні декілька тисячоліть історії людської цивілізації відношення людини до лісової природи змінювалося. На ранніх етапах розвитку ліс для людини був джерелом добування їжі, пізніше територією для розвитку сільського господарства. З розвитком товарного виробництва та ростом промисловості, пов’язаної з лісом, ліс став одним з найважливіших джерел матеріальних благ людського суспільства. Проте з постійним погіршенням екологічних проблем навколишнього середовища, людство лише недавно стало усвідомлювати важливість нематеріальних властивостей лісу (підтримує кліматичний баланс Землі, регулює водний режим території, запобігає ерозії ґрунтів тощо). Саме тому розв’язок задачі використання лісу протягом певного періоду часу передбачає застосування теорії оптимального управління.

Моделі територіального планування лісових насаджень аналізують, як оптимально виділяти ділянки для посадки та вирубки різних порід дерев. В 1849 році М. Фаустман [2] сформулював проблему знаходження найбільшого доходу з одновікових лісових насаджень. Це питання було вирішене Б.Охлін в 1921 році [4], який охарактеризував оптимальний період ротації лісу, відомий як період ротації лісу Фаустмана. Простота результату була пов’язана з тим, що розглядався ліс з однаковим віком дерев. Узагальнення проблеми оптимальної ротації лісу, дерева якого мають різний вік дозрівання, є важкою проблемою, яка не є повністю розв’язанною на сьогоднішній день. Незважаючи на неточності, ідеї Фаустмана були дуже важливими в побудові різноманітних правил поведінки насаджень лісу, потрібного для постачання лісових матеріалів.

Ми розглянемо математичну модель для оптимального планування вирубкою та посадкою лісових насаджень, а потім інтерпретуємо цю модель в алгебраїчних термінах.

Математична модель планування лісових насаджень. Ми розглянемо дискретну модель для оптимального планування посадкою лісу на території з площею *S*. Передбачається посадка *k* порід дерев, які будуть занумеровані числами $I=\{1,...,k\}$, з віком дозрівання кожної породи $n_1,...,n_k$ років відповідно. Для кожного періоду часу $t\in \mathrm{N}$ ми позначимо $x_i^t \geq 0$ площу породи $i\in I$, що досягає свою зрілість в рік *t*, і $y_i^t \geq 0$ площу, яку займають перезрілі дерева (старші ніж n_i років). Ми повинні вирішити, яку площу землі $u_t^i \geq 0$ взяти для вирубки лісу і як перерозподілити ці землі для нових насаджень. Припускаючи, що тільки зрілі дерева можуть бути спиляні, ми маємо $u_t^i \leq y_t^i + x_t^i$ і тоді площа не спиляних дерев в той період повинна включати перезрілі дерева на наступному кроці, а саме

$$y_{t+1}^i = y_t^i + x_t^i - u_t^i. \tag{1}$$

Загальна площа спиляних дерев $\sum_{i\in I} u_t^i$ розплановується для нових насаджень. При цьому має виконуватися рівність

$$\sum_{i\in I} x_{t+n_i}^i = \sum_{i\in I} u_t^i . \tag{2}$$

Загальний прибуток, отриманий з вирубки лісу задається формулою:

$$V = \sum_{i\in I}\sum_{t=0}^{\infty} b^t U_i(u_t^i), \tag{3}$$

де $b^t \in (0;1)$ - облікова ставка і $U_i : R \to R$- гладка, зростаюча і строго вогнута функція для кожного $i \in I$. Тоді проблему оптимального керування лісових насаджень можна сформулювати таким чином: знайти послідовність $u_t^i \geq 0$, які максимізують величину (3), в той час як змінні x_t^i і y_t^i залишаються сталими, невід'ємними величинами з виразів (1) та (2).

Розглянемо інший опис лісу в термінах розподілу віку лісових порід в дискретний момент часу *t*. Визначимо вектор $X_t = (X_t^1,...,X_t^k)$, який визначає стан лісу в час *t*, де компонента

$$X_t^i = (x_{t+n_i-1}^i, x_{t+n_i-2}^i,..., x_t^i, y_t^i)$$

описує площі зайняті в момент часу *t* деревами породи *i* та віком $1, 2, ..., n_i$ і більших ніж n_i (значення y_t^i). Вектор X_0 є початковим станом лісу, який відображає склад лісу у відповідності порода-вік у початковий момент часу $t=0$. Тоді проблема, яку потрібно вирішити, може бути сформульована так: для заданого розподілу X_0 максимізувати прибуток

$$\mathrm{V} = \sum_{i\in I} \sum_{\mathrm{t}=0}^{\infty} \mathrm{b}^{\mathrm{t}} \mathrm{U}_{\mathrm{i}}(\mathrm{u}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{i}})$$

відповідно до (1) та (2). Також можна розглядати проблему максимізації прибутку в заданий момент часу *T* (в цьому випадку сума береться по *t=0...T*).

Складність проблеми полягає в наступному. Наявність коефіцієнтів b^t визначає, що ліс починає швидко втрачати свою вартість після дозрівання, і тому для оптимального керування потрібно спилювати дерева щойно вони досягнуть свого дозрівання. З іншого боку, опуклість функції U_i сприяє спилюванню дерев однорідно для кожного моменту часу. Тому може бути доцільно залишати деякі дерева перезрілими, якщо це дозволить якісніше перепланувати ліс і привести його до більш однорідного стану. Можна довести, що для кожного допустимого початкового стану лісу X_0 сформульована вище проблема має оптимальні розв'язки. Крім того, можна довести єдиність відповідного u_t^i, але значення x_t^i, y_t^i визначаються не завжди однозначно. Знайти точний оптимальний розв'язок є складною оптимізаційною задачею. Тому часто задачу розв'язують чисельними методами і знаходять наближений розв'язок, або використовують методи алгебри та теорії контролю і знаходять асимптотично оптимальний розв'язок. Лінійність виразів (1), (2), (3) дозволяє застосувати методи лінійної алгебри для розв'язання поставленої проблеми. Але спочатку ми опишемо загальну математичну модель прийняття рішень, яка, зокрема, узагальнює і проблему по планування лісових насаджень.

Марковський процес прийняття рішень. Розглянемо систему *S* зі скінченною кількістю станів $1, 2, \ldots, N$. В кожен дискретний момент часу n=1,2,… система знаходиться в одному зі своїх станів і для кожного стану *i* існує скінченна множина K_i можливих дій над системою *S*. Припускається, що якщо система знаходиться в стані *i* та ми застосовуємо дію $a \in K_i$, то система змінює свій стан, і ймовірність, що новий стан це *j*, рівна a_{ij} (незалежно від часу *n*). Нехай $v_i(n)$ – це ймовірність, що система знаходиться в стані *i* в момент часу *n*. На кожній стадії цього процесу можна визначити проблему знаходження дії, яка мінімізує/максимізує ймовірність знаходження системи в деякому стані. Ми отримуємо наступну рекурсію:

$$v_i(n+1) = \min_{a \in K_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j(n) \text{ або } \max_{a \in K_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j(n). \qquad (4)$$

Якщо за кожну вибрану дію $a \in K_i$ потрібно платити ціну $p_i(a)$ або отримується прибуток $p_i(a)$, то для мінімізації вартості процесу або максимізації прибутку потрібно розглядати рекурсії:

$$v_i(n+1) = \min_{a \in K_i} \left(p_i(a) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j(n) \right) \text{ або } \max_{a \in K_i} \left(p_i(a) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j(n) \right). \qquad (5)$$

Ці рекурсії можна записати у векторній формі таким чином. Нехай $v(n)$ – вектор з координатами $v_i(n), i=1,2,\ldots,N$. Тоді рівняння (4) можна записати у вигляді $v(n+1)=f_K(v(n))$ або $v(n+1)=g_K(v(n))$ для всіх $n \geq 1$, де векторні функції f_K і g_K визначаться за правилом

$$f_K(v) = \min_{A \in K} Av(n) \qquad g_K(v) = \max_{A \in K} Av(n) \qquad (6)$$

для $v \in R^N$ і K – деяка скінченна множина невід'ємних квадратних матриць розмірності N, а мінімум і максимум визначаються покоординатно. Якщо визначити $p(A)$ для всіх $A \in K$ як вектори з координатами $p_i(A), i=1,2,\dots,N$, то рівняння (5) можна аналогічним способом записати через відображення

$$f_K^p(v) = \min_{A \in K}\left(p(A) + Av(n)\right) \qquad g_K^p(v) = \max_{A \in K}\left(p(A) + Av(n)\right).$$

Варто зауважити, що рівняння (4), (5) відповідають випадку, коли множина K складається із стохастичних матриць.

Матричні задачі. Асимптотична поведінка членів рекурсії $v(n+1)=f_K(v(n))$ та $v(n+1)=g_K(v(n))$ тісно пов'язана із динамічними властивостями матричної напівгрупи $T = \{A_1 A_2 \dots, A_n : A_i \in K, n \geq 0\}$. Зокрема, дослідження багатьох оптимізаційних задач зводиться до наступних алгебраїчних задач:

1) Знайти асимптотичну поведінку $\max_{A_i \in K}\|A_1 A_2 \dots A_n\|$ та $\min_{A_i \in K}\|A_1 A_2 \dots A_n\|$ при $n \to \infty$.

2) Знайти послідовність матриць $A_i \in K$, які задають асимптотику з задачі 1).

3) Для заданого початкового вектора $v(0)$ знайти асимптотичну поведінку $\max_{A_i \in K} A_1 A_2 \dots A_n v(0)$ та $\min_{A_i \in K} A_1 A_2 \dots A_n v(0)$ при $n \to \infty$.

4) Для заданого початкового вектора $v(0)$ знайти послідовність матриць $A_i \in K$, які задають асимптотику з задачі 3).

Сформульовані питання пов'язані із спільним спектральним радіусом та підрадіусом набору матриць K (див. [3]). Більшість задач такого роду є алгоритмічно нерозв'язними, тобто не існує алгоритму, який би по заданим початковим даним видавав оптимальне рішення. Але якщо накладати певні умови на набори матриць, або початкових векторів, то задачу вдається розв'язати алгебраїчними або аналітичними методами.

Дослідження відображень вигляду (6) та задач 1) – 4) було розпочато в роботах Р. Беллмана (див. [1]). Використовуючи теорему Брауєра про нерухому точку він довів, що, якщо множина K складається з додатніх матриць (тобто всі коефіцієнти матриць є додатніми), то відображення g_K має додатній власний вектор. Це було використано для дослідження асимптотичної поведінки в задачах 1),3) для додатнього початкового вектора $v(0)$. Більш детально він вивчав асимптотичну поведінку в задачах 1),3) у випадку, коли множина K складається з додатніх марковських матриць.

В загальній задачі по плануванню лісових насаджень є типовою ситуація, коли деякі породи дерев вирубуються і відповідні вектори мають нульові координати. Тому доцільним є розв'язання вище сформульованих задач для множин матриць і векторів, які мають нульові координати. Ми покажемо, як результати Р.Беллмана можна узагальнити на скінченні множини невід'ємних нерозкладних матриць та відображення f_K, використовуючи теорію Перона-Фробеніуса (див. [6, Розділ XIII]). Будемо казати, що множина матриць K

задовольняє умові оптимального вибору, якщо для кожного вектора $v \in R^N$ існує матриця $A \in K$ така, що $f_K(v) = Av$, тобто покоординатний мінімум завжди досягається на деякій матриці з множини *K*.

Теорема. Нехай *K* – скінченна множина, яка складається з невід'ємних нерозкладних матриць і задовольняє умові оптимального вибору. Тоді існують матриці $B, C \in K$ такі, що для кожного додатнього вектора $v \in R^N$ виконується асимпточна поведінка

$$\max_{A_i \in K} A_1 A_2 \ldots A_n v \approx B^n v \approx R^n v \quad \text{та} \quad \min_{A_i \in K} A_1 A_2 \ldots A_n v \approx C^n v \approx r^n v,$$

де $R = \max_{A \in K} r(A), r = \min_{A \in K} r(A)$, а *r(A)* – це спектральний радіус матриці *A*.

Дов. Доведемо для мінімума (аналогічне доведення працює і для максимума). Спочатку покажемо, що відображення f_K і деяка матриця $D \in K$ мають однаковий додатній власний вектор, асоційований з власним числом *r*.

Візьмемо довільну матрицю $B \in K$. Оскільки матриця є нерозкладною, то за теорією Перона-Фробеніуса вона має додатній власний вектор *v*, асоційований зі спектральним радіусом матриці *r(B)*. Оскільки множина *K* задовольняє умові оптимального вибору, то існує матриця $C \in K$ така, що $f_K(v) = Cv$. Ми можемо вважати, що *i*-тий рядок матриці *C* співпадає з *i*-тим рядком матриці *B*, якщо останній теж мінімізує *i*-ту координату. Якщо при цьому вийшло *B=C*, то твердження доведене. Припустимо, що $B \neq C$. Тоді $Cv \leq Bv = r(B)v$, причому нерівність строга. З цього виливає, що *r(C)<r(B)* (див. [6], зауваження 4 на ст.363). Застосуємо цю процедуру для матриці *C* замість матриці *B*, і т.д. Оскільки множина *K* скінченна, то через скінченну кількість кроків ми отримаємо матрицю *D* із спектральним радіусом *r(D)* та власним вектором *u* такими, що

$$f_K(u) = Du = r(D)u.$$

Оскільки ми могли починати з будь-якої матриці, і в цьому процесі спектральний радіус може тільки зменшитися, то $r(D) = r = \min_{A \in K} r(A)$. Твердження доведено.

Нехай $v \in R^N$ – довільний додатній вектор. Оскільки власний вектор *u* теж додатній, то існують константи $c_1, c_2 > 0$ такі, що виконуються покоординатні нерівності $c_1 u \leq v \leq c_2 u$. Відображення f_K зберігає порядок на координатах векторів, оскільки всі матриці в *K* є невід'ємними. Застосувавши композицію $f_K^{(n)}$ *n* відображень f_K отримуємо:

$$\frac{c_1}{c_2} r^n v \leq c_1 r^n u = f_K^{(n)}(c_1 u) \leq f_K^{(n)}(v) = \min_{A_i \in K} A_1 \ldots A_n v \leq f_K^{(n)}(c_2 u) = c_2 r^n u \leq \frac{c_2}{c_1} r^n v.$$

Теорема доведена. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Bellman R. Dynamic programming / Princeton University Press – Princeton, N.J., 1957. – 342 p.
2. Faustmann M. Berechnung des Werthes, welchen Waldboden, sowie noch nicht haubare Holzbestande fur die Waldwirtschaft besitzen. Allgemeine Forst-und Jagd-zeitung (Englishtrans- lation: Calculation of the value which forest land and immature stands possess for forestry. – Journal of Forest Economics, 1(1), 1849. – P. 441–445.
3. Jungers R. The joint spectral radius, theory and applications / Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 385 – Springer, 2009. – 146 p.
4. Ohlin B. 1921. Till fragan om skogarnas omloppstid. Ekonomisk Tidskrift 22. (Englishtranslation: Concerning the question of the rotation period in forestry – Journal of Forest Economics, 1921. – P. 1(1) 89–114).
5. Выдумкин П.А., Шагин В.Л. Выбор оптимального периода выращивания леса в модели поведения собственника лесного участка. – Экономический журнал ВШЭ – № 1 – 2003. – С. 65-78.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / М.: Наука, 1967. – 576 с.

Аннотация

Рассматриваются математические методы, связанные с оптимизационными задачами по территориальному планированию лесных насаждений с несколькими породами деревьев, і алгебраические методы их решения.

Ключевые слова. Территориальное планирование, лесные насаждения, оптимизационные задачи, неотрицательные матрицы.

Annotation

Mathematical models related to optimization problems on territory planning for forest plantings with multiple species, each one having a different maturity age, are considered together with algebraic methods for their solutions.

Keywords. Territory planning, forest planting, optimization problems, nonnegative matrices.