УДК 539.3

Левківський Д.В.,
Київський національний університет будівництва та архітектури

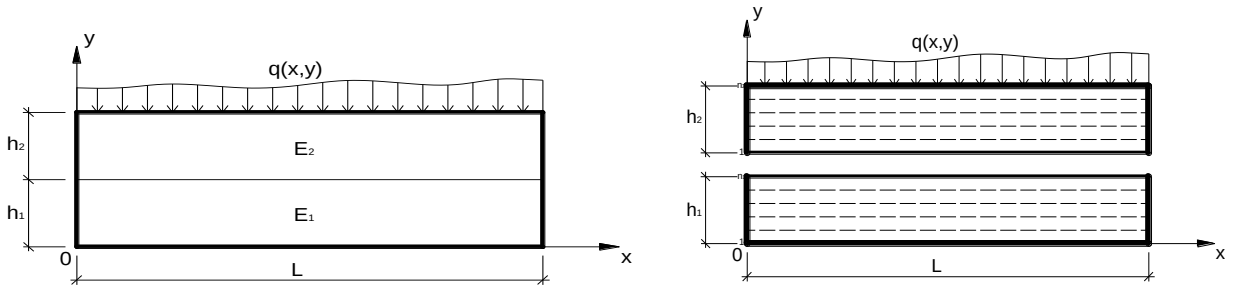
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРЯМИХ ДО РОЗРАХУНКУ ДВОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ

В роботі розглядається комбінований метод для розв'язання плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація). Він включає ефективний чисельний метод розв'язання крайових задач звичайних диференціальних рівнянь – метод С.К. Годунова, класичний варіант метода «прямих» із застосуванням узагальненого метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова для побудови розрахункових рівнянь. Диференціальні рівняння складаються для кожного шару конструкції окремо. Взаємодії між шарами моделюються вертикальними та горизонтальними стержнями заданої жорсткості. Даний підхід враховує взаємне зміщення шарів, обтиснення нормалі та більш точно моделює роботу конструкції.

В інженерній практиці часто використовуються конструкції, які складаються з окремих шарів, що виготовлені з різних матеріалів. Це стіни будівель, плити перекриття, прольоти автомобільних мостів, конструкції доріг, злітно-посадочних смуг аеродромів і багато інших.

При розрахунку таких конструкцій на міцність в будівельній механіці використовується розрахункова модель, яка називається багатошаровою пластиною. Багатошарова пластина є об'єктом, який складається з окремих однорідних пластин, які з'єднані між собою по лицевих площинах. В класичних варіантах теорії багатошарових пластин це з'єднання приймають абсолютно жорстким, але іноді необхідно враховувати можливість взаємних переміщень між шарами. Крім того, одні шари можуть мати товщину, спів розмірну з іншими габаритними розмірами. Для останніх варіантів застосування традиційних теорій не можливе. Тому виникає проблема розробки теорії, вільної від згаданих недоліків.

У роботі розглядається циліндричний згин двошарової пластини від дії статичного навантаження $q(x, y, z)$. Навантаження стале по координаті z. Дана тривимірна система має симетричну геометрію тіла і навантаження. В силу переносної симетрії розглядається спрощена двовимірна модель – плоска деформація двошарової пластини (рис.1). Потрібно визначити напружено-деформований стан пластини від дії навантаження $q(x, y)$, враховуючи різні умови закріплення по торцевих поверхнях та властивості шарів (рис.1).



а) Розрахункова модель б) Застосування методу прямих

Рис. 1. Двошарова пластина

Для розрахунку багатошарових конструкцій існує два підходи. У першому варіанті система диференціальних рівнянь записується для усього пакета шарів, модулі пружності шарів і коефіцієнти Пуассона – функції, що залежать від координати y. Головна перевага такого варіанту – невелика кількість розв'язувальних диференціальних рівнянь, що полегшує процес розрахунку. Даний варіант підходить для визначення загальних характеристик системи – власних частот, форм коливань, але на межі двох шарів виникають проблеми, пов'язані з тим, що функції $E(y)$, $\upsilon(y)$ - дискретні та мають скачки. Тому точно визначити напруження на границі двох суміжних шарів неможливо.

Якщо потрібно врахувати взаємне зміщення шарів, сили тертя між шарами, пропонується розглянути кожен шар окремо.

Для моделювання роботи конструкції використовуємо другий підхід, вихідні диференціальні рівняння для m -го шару мають вигляд (1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\lambda_m}{\lambda_m + 2\mu_m}\dfrac{\partial v^*(x,y)}{\partial y} + \dfrac{\mu_1}{\lambda_m + 2\mu_m}\sigma_x(x,y) \\ \dfrac{\partial v^*(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial u^*(x,y)}{\partial y} + \dfrac{\mu_1}{\mu_m}\tau_{xy}(x,y) \\ \dfrac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial y} - X(x,y) \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial y} - Y(x,y) \\ \sigma_y(x,y) = \dfrac{\lambda_m}{\mu_1}\dfrac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\lambda_m + 2\mu_m}{\mu_1}\dfrac{\partial v^*(x,y)}{\partial y} \end{cases} \qquad (1)$$

де $u^*(x,y) = u(x,y)\cdot\mu_1$, $v^*(x,y) = v(x,y)\cdot\mu_1$ - компоненти вектора переміщень; $\sigma_x(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$ - компоненти вектора напружень;

$X(x,y), Y(x,y)$ - об'ємні навантаження; λ, μ - коефіцієнти Ляме, m - номер шару.

Для зниження вимірності диференціальних рівнянь (1), використовується метод прямих. По координаті y пластина розбивається на $(n-1)$ ділянок за допомогою n прямих (рис 1 б). Традиційно, зниження вимірності виконується, використовуючи явну різницеву схему. У даному підході пропонується використовувати узагальнений метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова, що детально описано в роботі [2]. За базисні функції обираються кусково-лінійні функції $\varphi_i(y)$, які задовольняють рівностям:

$\varphi_i(y)=1$ на i - й прямі, $\varphi_i(y)=0$ на усіх інших прямих. Тоді кожна невідома функція апроксимується сумою:

$$f(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \varphi_i(y)$$

Система базисних функцій є косокутною, тому потрібно будувати взаємний базис. В результаті будь-яка функція системи представляється у вигляді лінійної комбінації:

$f(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \varphi^i(y)$ - функція представляється у вигляді моментів.

$f(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n} f^i(x) \cdot \varphi_i(y)$ - функція, представлена у вигляді коефіцієнтів.

Коефіцієнти – проекції функції на базис, записуються з верхнім індексом, моменти – скалярний добуток функції на базисну, відповідно з нижнім індексом. В результаті існує три варіанти редукції рівнянь. Рівняння у вигляді коефіцієнтів, рівняння у вигляді моментів, та мішані рівняння – переміщення в коефіцієнтах, напруження в моментах. Останній варіант найбільш зручний для розрахунку.

Граничні умови по торцевим поверхням кожного шару моделюються вертикальними та горизонтальними стержнями заданої жорсткості.

В результаті перетворень, описаних в роботах [1,2], запишемо редуковані диференціальні рівняння першого порядку в частинних похідних мішаного виду.

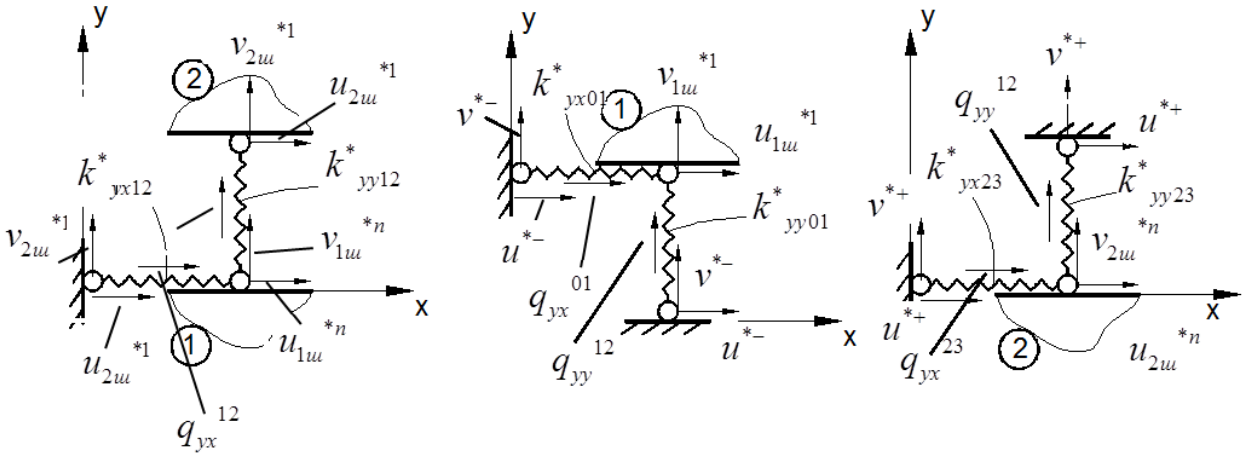


Рис. 2. Моделювання взаємодії суміжних шарів між собою.

Перший шар (2):

$$
\begin{cases}
\dfrac{du^{*\alpha}(x)}{dx} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1} g^{\alpha j} b_{jk} v^{*k}(x) + \dfrac{\mu_1}{\lambda_1+2\mu_1} g^{\alpha k}\sigma_{xk}(x) \\
\dfrac{dv^{*\alpha}(x)}{dx} = -g^{\alpha j} b_{jk} u^{*k}(x) + g^{\alpha k}\tau_{xyk}(x) \\
\dfrac{d\sigma_x(x)}{dx} = \begin{bmatrix} k^*_{yx01}(u_{1ш}^{*1} - u^{*-}) \\ 0 \\ 0 \\ -k^*_{yx12}(u_{2ш}^{*1} - u_{1ш}^{*n}) \end{bmatrix} + b_{j\alpha} g^{jk}\tau_{xyk} - \begin{bmatrix} q_{yx}^{01} \\ 0 \\ 0 \\ q_{yx}^{12} \end{bmatrix} - X_k(x) \\
\dfrac{d\tau_{xy}(x)}{dx} = \begin{bmatrix} k^*_{yy}{}^{01}(v_{1ш}^{*1} - v^{*-}) \\ 0 \\ 0 \\ -k^*_{yy}{}^{12}(v_{2ш}^{*1} - v_{1ш}^{*n}) \end{bmatrix} + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1} b_{j\alpha} g^{jk}\sigma_{xk} + \\
\dfrac{4(\lambda_1+\mu_1)}{(\lambda_1+2\mu_1)} b_{j\alpha} g^{j\beta} b_{\beta k} v^{*k} - \begin{bmatrix} q_{yy}^{01} \\ 0 \\ 0 \\ q_{yy}^{12} \end{bmatrix} - Y_k(x)
\end{cases}
\qquad (2)
$$

Другий шар (3):

$$
\begin{cases}
\dfrac{du^{*\alpha}(x)}{dx} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} g^{\alpha j} b_{jk} v^{*k}(x) + \dfrac{\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2} g^{\alpha k} \sigma_{xk}(x) \\
\dfrac{dv^{*\alpha}(x)}{dx} = -g^{\alpha j} b_{jk} u^{*k}(x) + \dfrac{\mu_1}{\mu_2} g^{\alpha k} \tau_{xyk}(x) \\
\dfrac{d\sigma_x(x)}{dx} = \begin{bmatrix} k^*_{yx12}(u_{2ш}{}^{*1} - u_{1ш}{}^{*n}) \\ 0 \\ 0 \\ -k^*_{yx23}(u^{*+} - u_{2ш}{}^{*n}) \end{bmatrix} + b_{j\alpha} g^{jk} \tau_{xyk} - \begin{bmatrix} q_{yx}{}^{12} \\ 0 \\ 0 \\ q_{yx}{}^{23} \end{bmatrix} - X_k(x) \\
\dfrac{d\tau_{xy}(x)}{dx} = \begin{bmatrix} k^*_{yy}{}^{12}(v_{2ш}{}^{*1} - v_{1ш}{}^{*n}) \\ 0 \\ 0 \\ -k^*_{yy}{}^{23}(v^{*+} - v_{2ш}{}^{*n}) \end{bmatrix} + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} b_{j\alpha} g^{jk} \sigma_{xk} + \\
\dfrac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2)} b_{j\alpha} g^{j\beta} b_{\beta k} v^{*k} - \begin{bmatrix} q_{yy}{}^{12} \\ 0 \\ 0 \\ q_{yy}{}^{23} \end{bmatrix} - Y_k(x)
\end{cases}
\qquad (3)
$$

Редуковані диференціальні рівняння (2), (3) чисельно розв’язуються методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Даний підхід дає змогу відтворити процеси, що відбуваються на межі двох шарів у багатошаровій конструкції, врахувати обтиснення нормалі, визначити напруження на межі двох суміжних шарів. Неперервність функції по координаті x підвищує точність розрахунку. Кількість рівнянь залежить від кількості шарів, що створює труднощі, пов’язані з числовою реалізацією, але для 4-5 шарів дана методика є актуальною і дає високу збіжність.

Література

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник, вип. 36 – К.: КНУБА, 2010. – С. 413–423.

2. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих//

Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник, вип. 46 – К.: КНУБА, 2013. – С. 613–624.

3. Михлин С. М. Вариационные методы в математической физике// Гос-ное из-во технико-теоретической л-ры: М., 1957. – 476 с.

Аннотация

В данной работе рассматривается комбинированный метод решения плоской задачи теории упругости (плоская деформация). Он включает эффективный численный метод решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений - метод С.К. Годунова, классический вариант метода «прямых» с применением обобщенного метода Бубнова-Галеркина-Петрова для построения разрешающих уравнений. Дифференциальные уравнения составляются для каждого слоя конструкции отдельно. Взаимодействия между слоями моделируются вертикальными и горизонтальными стержнями заданной жесткости. Данный подход учитывает взаимное смещение слоев, обжатие нормали и более точно моделирует работу конструкции.

Abstract

In this paper a combined method for the solution of the plane problem of elasticity (plane strain). It contains an effective numerical method for solving boundary value problems of ordinary differential equations - method SK Godunov, classic version of the method "direct" using the generalized method of Bubnov-Galerkin-Petrov for building clearing equations. Differential equations are made for each layer structures separately. Interactions between layers are modeled by vertical and horizontal rods specified hardness. This approach takes into account the relative displacement of layers, compression and normalization work more closely simulates the structure.