

УДК 528.223

к.т.н., професор Староверов В.С., Артемчук В.О.,  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## УТОЧНЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ЗА ДАНИМИ СУПУТНИКОВОЇ ГРАДІЄНТОМЕТРІЇ

*Розглянуто і проаналізовано загальний порядок і основні етапи моделювання гравітаційного поля Землі з використанням даних диференціальної супутникової градієнтометрії.*

*Ключові слова: сферичні гармоніки, супутникова градієнтометрія, метод найменших квадратів (МНК), системи “супутник-супутник”.*

**Постановка проблеми.** Глобальні моделі гравітаційного поля Землі допомагають у вирішенні багатьох наукових і практичних задач. Серед них можна виділити важливе для України завдання побудови поверхні квазігеоїда на територію країни, де глобальна модель використовується в так званій процедурі “видалення-відновлення”. Моделювання зазначеної вище поверхні в часі, з огляду на принципи отримання інформації про гравітаційне поле наземними методами, можна практично реалізувати лише з використанням таких глобальних моделей. Поверхня квазігеоїда, в свою чергу дозволить вирішити такі актуальні задачі, як визначення нормальних висот за допомогою GNSS спостережень. Тому в наш час глобальні моделі гравітаційного поля Землі набувають більш широкого застосування.

З розвитком космічних технологій з'являється можливість вивчення параметрів гравітаційного поля Землі за допомогою штучних супутників. На сьогодні існує два основні підходи, засновані на використанні супутникових спостережень: динамічний метод космічної геодезії та метод супутникової градієнтометрії, розвиток якого припав на минуле десятиріччя. Методи уточнення існуючої моделі гравітаційного поля Землі, з використанням даних супутникової градієнтометрії, удосконалюються і в наш час.

**Постановка завдання.** Метою дослідження було: розглянути методи створення і уточнення моделей гравітаційного поля в цілому, а також з використанням градієнтів сили притягання; розглянути і проаналізувати види градієнтометричних спостережень, методи супутникової градієнтометрії та принципи їх сумісної реалізації, а також принципи оцінки точності; описати алгоритм уточнення параметрів моделей гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії; виконати обчислення уточнюючих поправок до коефіцієнтів моделі EGM 96 за даними п'яти місяців супутникових

спостережень місії ЄКА “GOCE”; проаналізувати сучасні міжнародні космічні програми, дані яких доступні для обробки.

**Виклад основного матеріалу.** Зазвичай гравітаційне поле Землі, точніше складова, яка відповідає полю сили притягання, моделюють за допомогою сферичних гармонік. В такому випадку потенціал сили притягання  $V$  в точці з координатами  $r, \theta, \lambda$  є сумою ряду представленого даним виразом (1) при  $n$ , що прямує до нескінченності. [1]

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [c_{nm} \cos m\lambda + s_{nm} \sin m\lambda] \cdot P_{nm}(\theta, \lambda), \quad (1)$$

де  $GM$  – добуток гравітаційної сталої прийнятого еліпсоїда,  $R$  – його екваторіальний радіус,  $P_{nm}(\theta, \lambda)$  – поліноми та приєднані функції Лежандра степені  $n$  і порядку  $m$ .

Зазвичай обмежуються певним максимальним степенем  $n_{max}$  від якого залежить просторова роздільна здатність моделі.  $c_{nm}$  і  $s_{nm}$  тут коефіцієнти степені  $n$  і порядку  $m$ . Визначення таких коефіцієнтів називають сферичним гармонічним аналізом. При виконанні гармонічного аналізу, виміри зазвичай проектують на допоміжну сферу. Було проаналізовано два способи гармонічного аналізу: прямий – коли кожній точці з даними на сфері відповідає одне рівняння поправок, і спосіб усереднення по площам – коли сферу розбивають на рівні частини і рівняння поправок отримують для кожної частини. При такій великій кількості даних, тільки другий спосіб дозволяє виконати обчислення на стандартному ПК. Як і різновидів вихідної інформації, методів аналізу існує досить багато: спосіб Гаусса, спосіб Неймана, метод чисельного інтегрування, аналіз за МНК. Останній визначено як найбільш зручний у випадку даних диференціальної градієнтометрії.

У випадку гармонічного аналізу за МНК рівняння поправок можна представити у вигляді (2)

$$l(r, \theta, \lambda) + v = a_{nm}(r, \theta, \lambda) \cdot x_{nm} \quad (2)$$

де  $l$  – вектор вільних членів,  $a_{nm}$  – коефіцієнти рівняння,  $x_{nm}$  – вектор невідомих. Якщо ми маємо справу з аналізом, вільні члени є вимірними значеннями, якщо з уточненням, то вільні члени знаходять як  $l(r, \theta, \lambda) = V_{ij}^o - V_{ij}^c$ , де  $V_{ij}^o$  – вимірне значення,  $V_{ij}^c$  – обчислене за допомогою вихідної моделі. Відповідно за теоремою Гаусса-Маркова невідомі можна знайти за наступним виразом

$$x = (A^T \Sigma_l^{-1} A)^{-1} \Sigma_l^{-1} l, \quad (3)$$

оцінка їх точності:

$$\Sigma(x) = (A^T \Sigma_l^{-1} A)^{-1}, \quad (4)$$

де  $A$  – матриця коефіцієнтів рівнянь поправок,  $\Sigma_l$  – коваріаційна матриця спостережень (описує похибки спостережень і кореляцію між ними).

Градентометрія – розділ гравіметрії, що вивчає другі похідні потенціалу притягання  $V$ , які, відповідно, і матимемо в лівій частині рівняння (1). Тож для обчислення матриці коефіцієнтів визначають відповідні похідні рівняння (1). Такі похідні приведені, наприклад, в роботах [2, 3]. Матриця елементами якої є другі похідні потенціалу притягання  $V$  називається повним тензором градентометрії, або тензором Етвеша.

Градентометрію можна розділити на стаціонарну та на рухомій основі, яка в свою чергу поділяється на літакову і супутникову. Останню розглянемо більш детально. Основна ідея градентометрії – визначення взаємного переміщення двох пробних мас, що рухаються одночасно, яке залежить від неоднорідностей гравітаційного поля. У випадку систем супутників пробними масами є самі супутники. Існує два види: системи “супутник-супутник” в режимі високий-низький та в режимі низький-низький. Реалізацією першого методу є космічний проект CHAMP. Супутник CHAMP знаходиться на низькій орбіті в той час як супутники системи GPS на високій. Положення, а також вектори швидкості і прискорення постійно визначаються за допомогою системи GPS і лазерної локації. Прикладом системи “супутник-супутник” в режимі низький - низький є німецько-американський проект GRACE. В даному випадку два супутники знаходяться на низькій орбіті. Положення ШСЗ визначається за допомогою GPS, а взаємна швидкість і прискорення – з нанометровою точністю за допомогою мікрохвильового віддалеміра. У дуже спрощеному вигляді рівняння зв’язку для вказаних систем є наступним:

$$\begin{pmatrix} \Delta \ddot{x} \\ \Delta \ddot{y} \\ \Delta \ddot{z} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (5)$$

З виразу (5) видно, що існує залежність між елементами тензора Етвеша  $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial i \partial j}$  та взаємним положенням і переміщеннями супутників.

Якщо пробні маси знаходяться на борту супутника – в приладі, що називається градентометром, ми маємо справу з диференціальною градентометрією. Реалізацією такого методу є проект ЄКА GOCE. Тензор

градієнтів в даному методі безпосередньо вимірюється градієнтметром (точніше в результаті калібрування знаходять зв'язок між сигналом приладу і шуканими величинами). Просторове положення приладу визначається за допомогою системи GPS.

Для того, щоб мати уяву про точність описаних методів наведемо порівняння моделей, створених на основі даних кожного методу окремо з еталонною на сьогодні комбінованою моделлю EIGEN-6C2 (рис. 1).

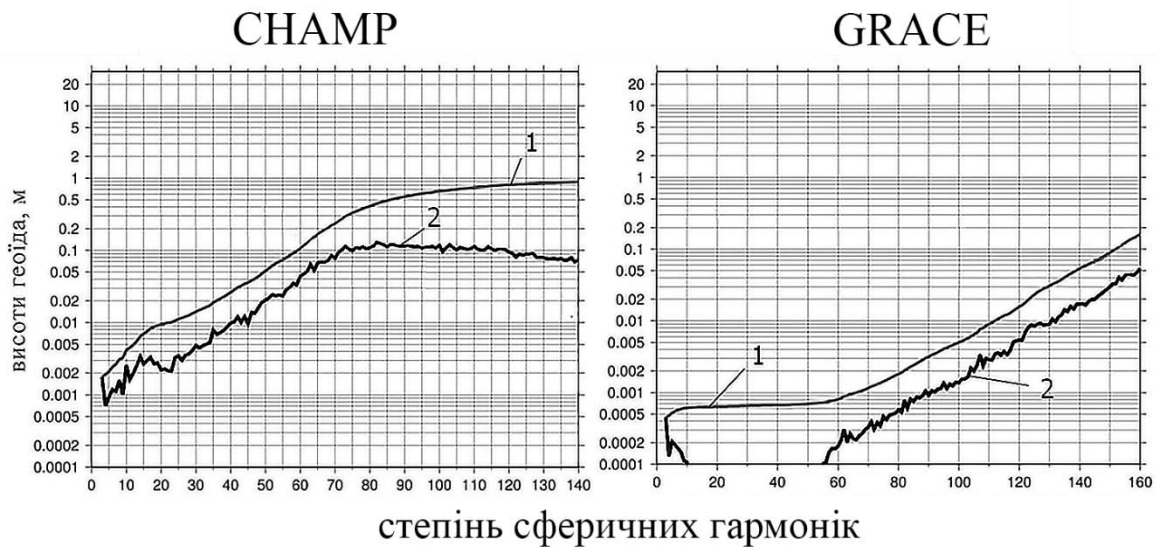


Рис. 1. Порівняння моделей гравітаційного поля Землі EIGEN-CHAMP03S та AIUB-GRACE03S з моделлю EIGEN-6C2

Крива 1 показує різниці висот геоїда обчислених за сумою коефіцієнтів, крива 2 показує різниці висот геоїда для кожного коефіцієнта окремо. Як бачимо проект CHAMP у свій час показав досить непогані результати: сумарна різниця висоти геоїда до степені 140 сягає 1 м. На 2000 рік це була найбільша точність серед супутникових методів. Проте вже через кілька років проект GRACE показав ще кращі результати: сумарна різниця для хвиль геоїда степені 140 є величиною порядку 10 см. Коли при максимальному степені 160 – різниця складає 17 см.

Запущений в 2009 році проект GOCE (рис. 2) підняв точність вивчення гравітаційного поля на новий рівень

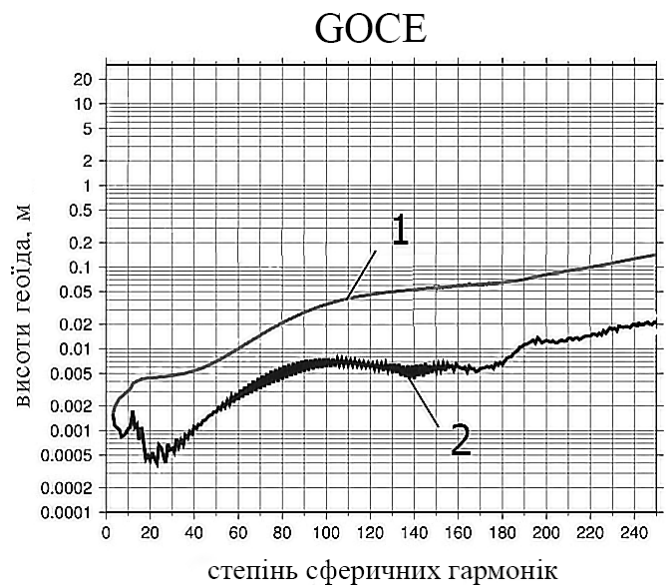


Рис. 2. Порівняння моделі гравітаційного поля Землі, побудованої за даними місії GOCE з моделлю EIGEN-6C2

– 5 см при гармоніках степені і порядку 160 та 15 см – для гармонік степені 250. Враховуючи таку точність і роздільну здатність було вирішено виконувати обробку спостережень даної місії.

В процесі обчислень використовується велика кількість систем координат. Як основні, можна виділити наступні (рис. 3):

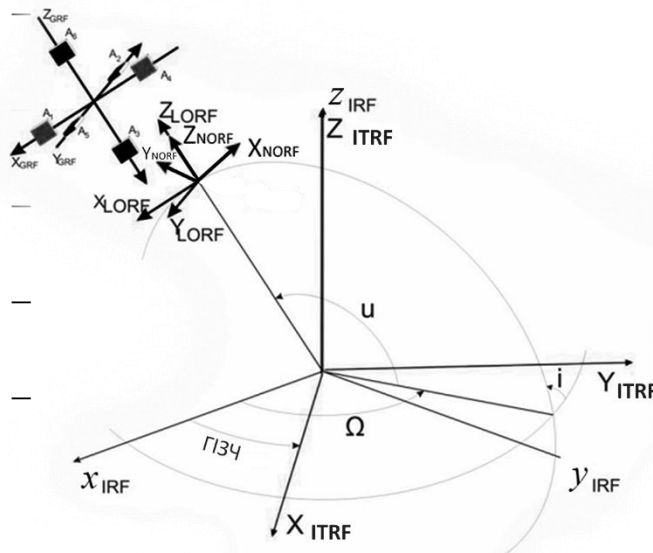


Рис. 3. Основні системи координат місії GOCE

ITRF – Міжнародна земна система координат;

IRF – інерційна система координат;

LORF – локальна орбітальна система координат;

NORF – локальна орієнтована на північ система координат;

GRF – система координат градієнтометра.

Дані спостережень місії можна отримати як в системі

LORF, так і в локальній орієнтованій на північ системі

координат. Остання безпосередньо зв'язана з землею: вісь  $Z$  спрямована вздовж радіус-вектора положення супутника в земній системі координат, вісь  $X$  спрямована до північного полюсу і лежить в площині меридіану,  $Y$  доповнює систему до правої. Відповідно дані для обчислень було взято саме в цій системі.

В результаті досліджень було розроблено алгоритм для обробки вказаних даних. До основних можна віднести такі етапи обробки як:

- 1) обробка вихідних даних;
- 2) фільтрація та регуляризація;
- 3) обчислення вільних членів;
- 4) формування матриці коефіцієнтів;
- 5) формування і вирішення нормальних рівнянь;
- 6) обчислення уточнених коефіцієнтів.

Для автоматизації обчислень було створено програмне забезпечення, вихідний код якого на мові C# 4.0 можна завантажити з ресурсу <https://github.com/vadimart92/SGG-TRF-Analyzer>.

За допомогою створеного програмного забезпечення було виконано уточнення моделі EGM 96. Для порівняння було вибрано модель EGM 08 так як, вона створена без використання даних диференціальної градієнтометрії, а також вона є найбільш розповсюджена в прикладній сфері. В ході досліджень виконано обробку даних п'яти місяців спостережень місії GOCE. Дані надано

європейським космічним агентством (<https://earth.esa.int/web/guest/data-access/browse-data-products>). На рис. 4 зображено результати уточнення моделі EGM 96, а саме – різниці уточненої моделі та моделі EGM 08. Як бачимо максимальні різниці зменшились з майже 3 м до порядку 10 см. Слід зауважити, що дані результати є досить непоганими тільки у межах відповідних сферичних гармонік, і різниці висот геоїда, які обчислені за допомогою уточненої таким чином моделі навіть порядку 250, з реальними їх значеннями, можуть виявитися досить значними. Як бачимо з отриманих результатів (рис. 4), супутникова градієнтометрія в наш час має досить непогані результати, а з появою нових космічних проєктів може почати конкурувати з наземними методами.

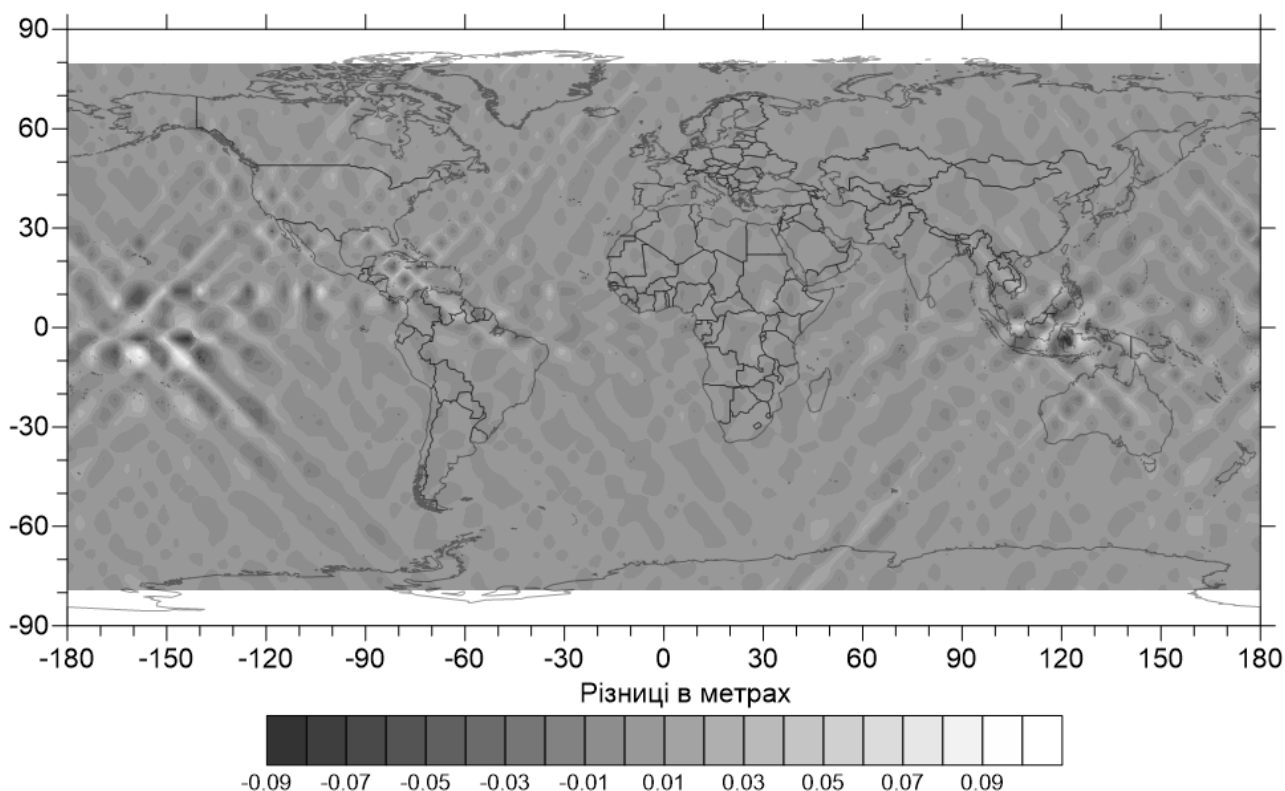


Рис. 4. Порівняння уточненої моделі та моделі EGM 08

**Висновок.** Розвинення функції потенціалу притягання в ряд за сферичними гармоніками до будь-якої степені дозволяє моделювати гравітаційний потенціал із заданою наперед точністю. Найбільш сучасним методом визначення параметрів моделей гравітаційного поля Землі та їх уточнення є супутникова градієнтометрія. Установлено, що різні методи супутникової градієнтометрії дозволяють визначати з високою точністю хвилі геоїда різної довжини. В результаті аналізу міжнародних космічних проєктів встановлено, що метод диференціальної градієнтометрії дозволяє найбільш

точно і детально визначати параметри гравітаційного поля. Тож підсумовуючи сказане вище, можна зазначити, що існує можливість використання розглянутої методики вивчення гравітаційного поля для вирішення задачі моделювання поверхні квазігеоїда на території України.

### **Література**

1. Гофман-Велленгоф Б., Мориц Г. Физическая геодезия. – МИИГАиК, 2007. – 426 с.
2. Яшкин, С. Н. Спутниковая градиентометрия и системы "спутник-спутник" учеб. пособие. – М. : МИИГАиК, 2009. – 111с.
3. Radboud Koop Global gravity modelling using satellite gravity gradiometry. – Publications on Geodesy 38, Delft, 1993. – 240 p.

### **Анотация**

Рассмотрены и проанализированы общий порядок и основные этапы моделирования гравитационного поля Земли с использованием данных дифференциальной спутниковой градиентометрии. Рассмотрена возможность использования таких данных в решении современных задач высшей геодезии. Проанализированы международные космические проекты, которые являются реализацией различных методов спутниковой градиентометрии.

### **Anotation**

Reviewed and analyzed the order and the main stages of modeling the gravitational field of the Earth using a differential satellite gradiometry data. The possibility of using such data to the decision of modern problems of higher geodesy. Analyzed international space projects, which are the realization of the various methods of satellite gradiometry.