

УДК 528.4

Богданов С.С.,

Київський національний університет будівництва і архітектури

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЯНИХ КУТІВ ЕЛЕКТРОННИМ ТАХЕОМЕТРОМ В УМОВАХ ВІБРАЦІЙ НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Дослідженню вплив вібрацій на результати вимірювань кутів електронним тахеометром, а також побудові математичної моделі на основі експериментальних даних, яка найбільше відповідає характеру фізичного закону і дає меншу похибку.

Постановка проблеми. У роботі розглядається дослідження впливу вібрацій на результати вимірювання кутів електронним тахеометром. Вимірювання горизонтальних і вертикальних напрямів в сучасних тахеометрах визначається автоматично за допомогою спеціальних сенсорних датчиків. В умовах вібрацій зняття датчиком кодової інформації, відлік отримується з деякою похибкою. Тому для перевірки коректності даних, пов'язаних з вимірюваннями в умовах вібрацій обов'язковим є проведення наукового експерименту і обробка зібраної інформації.

Статистичні дослідження незалежно від мети та масштабів завжди завершуються розрахунком та аналізом різних за видом та формою вираженням статистичних показників. Першим етапом є перевірка відповідності експериментальних даних на придатність для подальшої обробки. Другий етап складається з отримання статистичних оцінок. На основі статистичних оцінок будується математичну модель, яка найбільше відповідає характеру фізичного закону і дає меншу похибку.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У роботах [3,4,6] розглядаються питання впливу вібрацій на теодоліти Т2, 2Т2, Theo-010, а саме переміщенню і вібростійкості горизонтального круга. Інформація про дослідження впливу вібрацій на результати кутових вимірювань електронним тахеометром практично не відома.

Постановка завдання. Спланувати експеримент і на основі отриманих результатів побудувати математичну модель, за допомогою якої можна визначити залежність між частотою і амплітудою вібрацій вимірюваних кутів електронним тахеометром.

Виклад основного матеріалу. З метою визначення математичної моделі результатів вимірювань кутів в умовах вібрацій на основі експериментальних даних виконано статистичний аналіз, і елементи дисперсійного аналізу [1,8].

Експериментальні дослідження виконані в лабораторних умовах. На вібростенді «ВЭДС-400А» встановлювали електронний тахеометр Sokkia Set 630R і за допомогою коліматора (2-х теодолітів 2Т5К) виконано понад 100 вимірювань горизонтальних і вертикальних кутів при частоті $f=50$ Гц і амплітуді від $S=20-100$ мкм (рис.1.1).

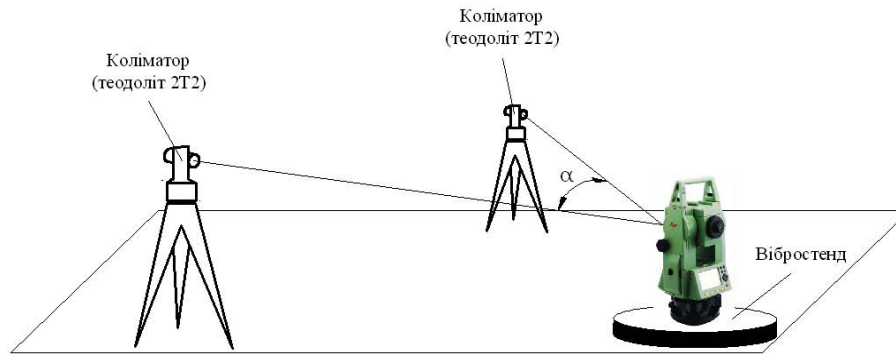


Рис. 1.1

У результаті проведених експериментів були отримані набори даних вимірювань горизонтальних і вертикальних кутів в умовах вібрацій. Частота залишалася постійною, амплітуда при цьому змінювалася, а отже, змінювався відлік. Горизонтальний і вертикальний кут в нормальних умовах складав $\alpha_{\text{від.}} = 47^{\circ}35'26,5''$ і відповідно $\alpha_{\text{вдв.}} = 7^{\circ}25'30,5''$.

З метою полегшення обробки експериментальних даних та отримання статистичних оцінок, результати експерименту були зведені у варіаційні ряди. Обробка результатів експерименту та розрахунки виконувалися паралельно як для горизонтальних, так і для вертикальних кутів. При проведенні обчислень для спрощення та застосування математичних методів, з метою отримання статистичних оцінок і побудови математичної моделі, застосовувалося програмне середовище «MathCad».

Перший етап – перевірка коректності та придатності даних для подальшої обробки. З метою визначення значення величин необхідно виконати перевірку відповідності результатів експерименту нормальному закону розподілу [2,5]. Для кожної випадкової величини, на кожному рівні вимірювання було розраховане математичне сподівання за формулою:

$$S_{s_i} = \frac{\sum_{j=0}^{12} (s_j \cdot n_j)}{N_i}, \quad (1)$$

де: S_j - значення випадкової величини на i -му рівні;
 $n_{j,i}$ - відповідні частоти; N_i - об'єм i -ї вибірки;
 - середнє значення для горизонтальних кутів складає:

$S_{s_1} = 26.365, 25.455, 25.330, 25.245, 25.375, 25.445, 25.395, 25.240, 25.335;$
 - для вертикальних кутів:
 $S_{s_2} = 32.825, 32.570, 32.165, 32.760, 32.980, 32.720, 32.355, 32.410, 32760.$

Також визначені такі характеристики статистичного ряду як мода M_{o_i} та медіана M_{e_i} . З отриманих результатів видно, що значення математичного сподівання, моди та медіани для кожного рівня є досить близькими, отже, це дає підставу вважати, що випадкові величини на кожному рівні мають нормальний закон розподілу. Для перевірки цього твердження також був застосований критерій Пірсона (χ^2), де було обчислено значення критерію, що спостерігається за формулою [5]:

$$\chi_{експ.і}^2 = \sum_{j=0}^K \frac{(S_{t_j} - N_{t_j})^2}{N_{t_j}}, \quad (2)$$

де: N_{t_j} - вирівнюючі частоти.

Значення критерію, що спостерігається наведені в табл. 1.1, 1.2.

Таблиця 1.1

χ_{0-8}^2								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
64,816	99,221	66,042	68,227	66,885	70,839	86,653	76,519	85,660

Таблиця 1.2

χ_{0-8}^2								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
71,843	120,198	121,209	120,553	117,166	121,027	123,655	117,322	119,16

При рівні значущості $\alpha=0.01$ та кількості степенів свободи за статистичною таблицею визначено критерій Пірсона χ^2 критичне, як видно з наведених таблиць $\chi_{табл.і}^2 < \chi_{експ.і}^2$. Отже, гіпотеза про нормальний закон розподілу приймається, а отже в якості істинного значення, на кожному рівні можна брати математичне сподівання. Також для кожного варіаційного ряду були визначені моменти вищих порядків [5,7].

- Середньоквадратичне відхилення визначалося за формулою:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^k [(S_j - S_{s_i})^2 \cdot n_{j,i}]}{N_i - 1}}, \quad (3)$$

де: S_{s_i} - середнє вибіркве, N_i - розмір популяції, $n_{j,i}$ частоти

Тоді для обох випадків отримаємо:

$$\sigma_1 = 0.987, 1.194, 1.192, 1.193, 1.232, 1.131, 1.353, 1.268, 1.269,$$

$$\sigma_2 = 1.308, 1.697, 1.287, 1.427, 1.426, 1.308, 1.463, 1.443, 1.607.$$

- Момент третього порядку, який характеризує асиметрію вибірки, знайдемо за формулою:

$$m_{3_i} = \frac{\sum_{j=0}^k [(S_j - S_{s_i})^3 \cdot n_{j,i}]}{N_i \cdot \sigma^3}, \tag{4}$$

$$m_{3_1} = -0.777, -1.611, 0.012, 0.104, -0.218, -0.035, 0.282, 0.044, -1.392;$$

$$m_{3_2} = -0.430, 2.540, 0.522, -0.852, 1.287, 0.550, 0.103, -0.735, -1.168.$$

- Моментом четвертого порядку – ексцес, який характеризує степінь вираження наявної тенденції у даних має вигляд:

$$m_{4_i} = \frac{\sum_{j=0}^k [(S_j - S_{s_i})^4 \cdot n_{j,i}]}{N_i \cdot \sigma^4}, \tag{5}$$

$$m_{4_1} = 3.502, 7.662, 6.559, 7.321, 7.399, 7.152, 11.303, 8.590, 7.184;$$

$$m_{4_2} = 9.299, 26.573, 11.250, 18.686, 12.322, 12.147, 19.320, 15.352, 21.901.$$

За даними варіаційних рядів побудовані полігони частот (рис. 1.2).

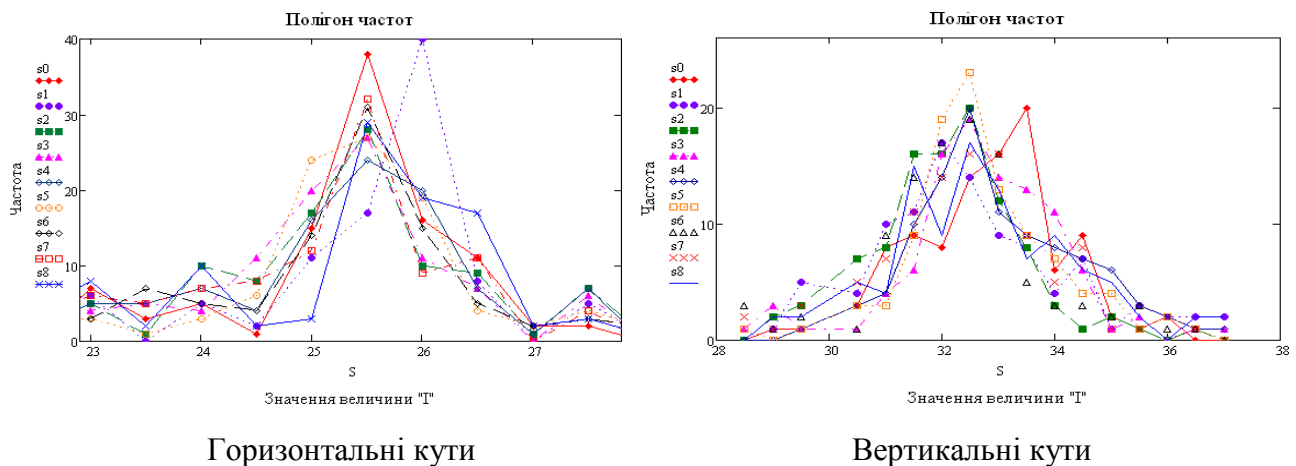


Рис. 1.2 Полігони частот варіаційних рядів

За значеннями моменту 3-го порядку і полігону частот спостерігається, що значення асиметрії через кожних два кроки змінюється, а це дає підстави вважати, що результати вимірювання кутів змінюються за періодичним законом. За значеннями моментів 4-го порядку можна зробити висновок, що амплітуда цього закону на всьому проміжку є приблизно постійною.

Другий етап – визначення залежності та побудова математичної моделі. З метою визначення аналітичної моделі, всі результати спостережень були зведені у кореляційну табл.1.5, 1.6.

Таблиця 1.5

S/A		A-амплітуда, мкм для горизонтальних кутів								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
S - значення кута, с"	A	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	22,5	0	5	2	3	2	3	4	3	4
	23,0	7	6	5	4	5	3	3	6	8
	23,5	3	0	1	5	5	1	7	5	2
	24,0	5	5	10	4	7	3	5	7	10
	24,5	1	2	8	11	4	6	4	8	2
	25,0	15	11	17	20	16	24	14	12	3
	25,5	38	17	28	27	24	27	31	32	29
	26,0	16	40	10	11	20	19	15	9	19
	26,5	11	8	9	7	7	4	5	11	17
	27,0	2	0	1	0	1	2	2	0	2
	27,5	2	5	7	6	7	4	3	4	3
	28,0	0	1	1	0	0	2	2	0	1
	28,5	0	0	1	2	2	2	5	3	0

Таблиця 1.6

S/A		A-амплітуда, мкм для вертикальних кутів								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
S - значення кута, с"	A	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	28,5	0	0	0	1	0	1	3	2	0
	29,0	1	1	2	3	0	0	1	1	2
	29,5	1	5	3	1	1	1	2	3	2
	30,5	3	4	7	1	3	3	1	5	5
	31,0	8	10	8	4	4	3	9	7	4
	31,5	9	11	16	6	10	9	14	11	15
	32,0	8	17	16	16	14	19	17	14	9
	32,5	14	14	20	19	20	23	19	16	17
	33,0	16	9	12	14	11	13	16	16	13
	33,5	20	8	8	13	9	9	5	9	7
	34,0	6	4	3	11	8	7	3	5	9
	34,5	9	7	1	6	7	4	3	8	6
	35,0	2	1	2	1	6	4	2	1	5
	35,5	1	3	1	2	3	1	3	1	2
	36,0	2	2	0	0	2	2	1	0	0
36,5	0	2	1	1	1	1	1	1	2	
37,0	0	2	0	1	1	0	0	0	2	

За даними кореляційної таблиці визначено математичне сподівання A_x і S_m для амплітуди і частоти:

$$A_x = \frac{\sum_{j=0}^8 (A_j + nx_j)}{N_x}, \quad S_m = \frac{\sum_{k=0}^{12} (S_k + ny_k)}{N_y}, \quad (6)$$

- для горизонтальних кутів:

$$N_x = 900 \quad A_s = 60 \quad N_y = 932 \quad S_m = 25,27682$$

- для вертикальних кутів:

$$N_x = 900 \quad A_s = 60 \quad N_y = 900 \quad S_m = 32,6017$$

Для побудови математичної залежності необхідно оцінити її характер, для цього результати спостереження були нанесені на графіки (рис.1.3, 1.4).

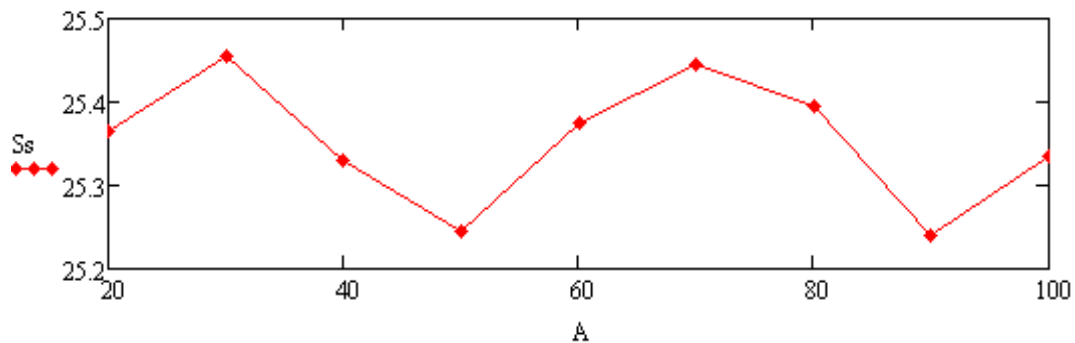


Рис. 1.3 Оцінка характеру математичної залежності для горизонтальних кутів

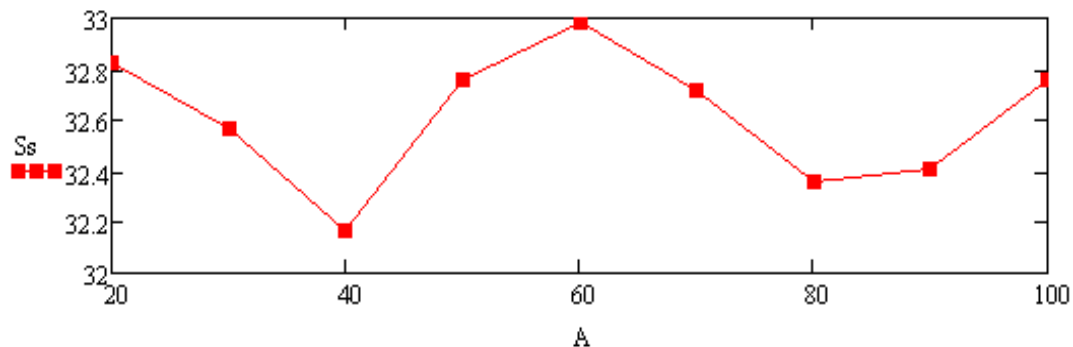


Рис. 1.4 Оцінка характеру математичної залежності для вертикальних кутів

Із графіків видно, що в обох випадках точки розташовані у вигляді синусоїдальної залежності. Тому, для побудови застосуємо метод найменших квадратів. У результаті побудована лінійна модель на основі полінома 3-ї степені і у вигляді синусоїдальної залежності.

Для отримання залежності побудована лінія регресії і знайдений коефіцієнт лінійної кореляції $k=0,1495$ і $0,091$, значення якого досить мале для обох випадків. Отже, встановлено, що залежність є, але не лінійна, що і відповідає розташуванню точок на графіках.

Для побудови моделей застосуємо метод найменших квадратів (функції «regress» середовища «MathCad»):

- для горизонтальних кутів:

$$-0.000001x^3 + 0.00023x^2 - 0.0126x + 25.57$$

- для вертикальних кутів:

$$-0.000002x^3 + 0.00013x^2 - 0.0190x + 32.96$$

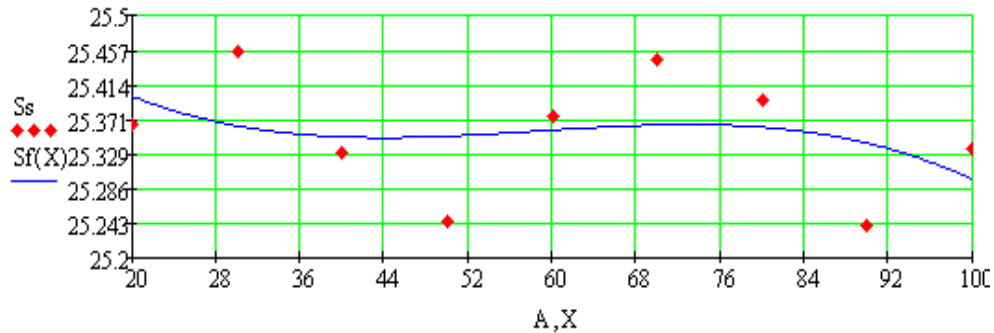


Рис.1.5 Математична залежність поліномом 3-ї степені горизонтальних кутів

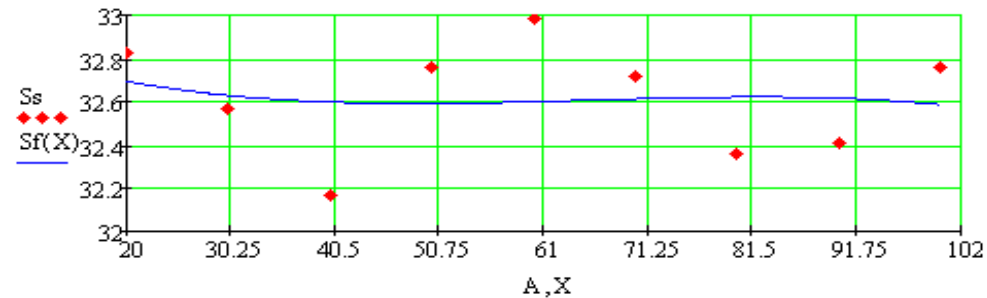


Рис.1.6 Математична залежність поліномом 3-ї степені вертикальних кутів

Як видно, що коефіцієнт при x^3 і x^2 є досить малим, тому така модель не є найкращою.

Тоді побудуємо синусоїдальну залежність одразу для горизонтальних і вертикальних кутів у вигляді :

$$y = a \cdot \sin(x \cdot b + c) + d,$$

де: a , b , c , d – коефіцієнти.

З аналізу розташування точок можна дати оцінку на $d=M$ (M -математичне сподівання) і параметр a (амплітуда). Тоді методом МНК потрібно знайти два коефіцієнта b і c , що зменшує кількість обчислень, а отже і похибку результатів.

Представимо синусоїдальну модель для обох випадків:

- горизонтальних кутів:

$$S_f(X) = 0,13 \cdot \sin(0,172x + 2) + 25,35;$$

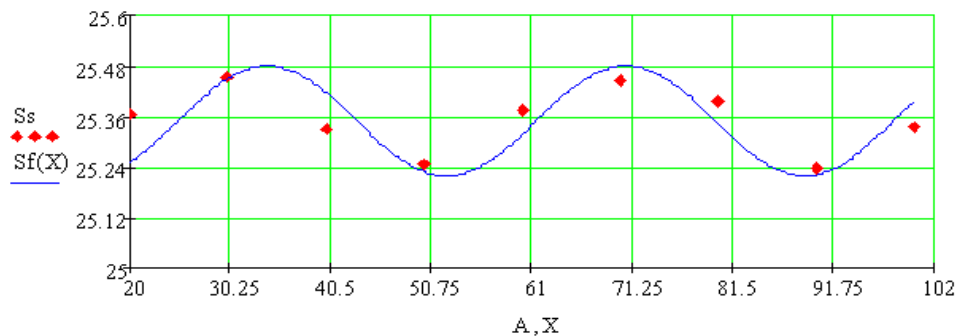


Рис.1.7 Синусоїдальна залежність між частотою і амплітудою горизонтальних кутів

- вертикальних кутів:

$$S_f(X) = 0,37 \cdot \sin(0,150222x + 5) + 32,6;$$

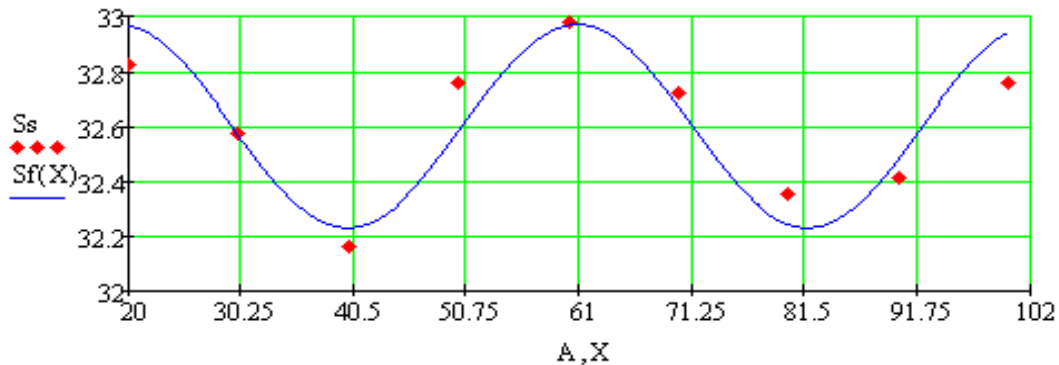


Рис.1.8 Синусоїдальна залежність між частотою і амплітудою вертикальних кутів

Для кожної моделі була знайдена оцінка середньої квадратичної похибки:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^8 (S_{s_j} - Sf(A_j))^2}{8}}, \quad (7)$$

- для полінома 3-го степеня горизонтальних і вертикальних кутів:

$$\varepsilon_1 = 0,07242$$

$$\varepsilon_2 = 0,2589$$

- для синусоїдальної залежності:

$$\varepsilon_1 = 0,06136$$

$$\varepsilon_2 = 0,117.$$

А також середня абсолютна і відносна похибка:

$$\Delta_s = \frac{\sum_{j=0}^8 \Delta_j}{8},$$

$$\delta_s = \frac{\sum_{j=0}^8 \delta_j}{8},$$

- для полінома 3-го степеня:

$$\Delta_s = 0,06542$$

$$\delta_s = 0,00275$$

- для синусоїдальної залежності:

$$\Delta_s = 0,05421$$

$$\delta_s = 0,00213;$$

Отже, побудована залежність між частотою і амплітудою у вигляді аналітичних і математичних розрахунків, в основі якої, лежить функція виду $y = a \cdot \sin(x \cdot b + c) + d$. Для кожної залежності знайдені значення параметрів a , b , c , d . При цьому показано, що значення параметрів d і a можна оцінити із результатів експерименту. Як результат, синусоїдальна модель є більш точною і її застосування є найкращим, так як відповідає фізичному закону.

Висновки. У результаті проведеного експерименту і обробки результатів вимірювання статистичними методами був визначений характер залежності між частотою і амплітудою для горизонтальних і вертикальних кутів. З отриманих оцінок залежність носить періодичний синусоїдальний характер.

Література

1. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Физматгиз, 1962. 356 с.
2. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.
3. Найденко В.Н., Ямбаев Х.К. Особенности влияния вибраций на оптические теодолиты. // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1987. №3. – с. 113-118.
4. Найденко В.Н., Ямбаев Х.К. Особенности влияния вибраций на оптические теодолиты. // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1987. №3. – с. 113-118.
5. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное руководство. М.: Наука, 1971. 192 с.
6. Кирьянов Ю.В. Разработка и исследования методов инженерно-геодезических работ в условиях вибраций. Дисс. на соискание уч. степени канд. тех. Наук. – М.: МИГАиК, 1984. – 248 с.
7. Сухов А.Н. Математическая обработка результатов измерений. Учебное пособие. - М.: МИСИ, 1982. 89 с.
8. Колесников А.Ф. Основы математической обработки результатов измерений. Томск: ТГУ, 1963. 49 с.

Аннотация

Статья посвящена исследованию влияния вибраций на результаты измеренных углов электронным тахеометром, а также построению математической модели на основе экспериментальных данных, которая больше всего отвечает характеру физического закона и дает меньшую погрешность.

Annotation

The article is devoted research of influence of vibrations on the results of the measured corners electronic total station, and also construction of mathematical model on the basis of experimental information, which most answers character of physical law and gives a less error.