

УДК 539.3

Левківський Д.В.,  
Київський національний університет будівництва і архітектури**ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ  
ДВОШАРОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ МЕТОДОМ ПРЯМИХ**

*Розглядаються 2 підходи до моделювання роботи шарової конструкції (неперервно-структурна та дискретно-структурна моделі). Задача розв'язується в постановці плоскої деформації. Для зниження вимірності вихідних рівнянь використовується метод "прямих" у поєднанні з проекційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Проведено аналіз переваг та недоліків кожного з підходів.*

З швидким науково-технічним розвитком все частіше постає проблема забезпечення міцності, звуко-, тепло-, віброізоляції, захисту від агресивних середовищ та радіації, враховуючи обмеження маси та економічну доцільність. Для забезпечення раціонального проектування, інженери використовують розрахункові моделі, які більш точно відтворюють роботу сучасних конструкцій.

Багатошарові пластини і оболонки, як розрахункові моделі широко використовуються у машино-, авіа-, судо- та ракетобудуванні, у хімічній промисловості та медицині; у промисловому та цивільному будівництві.

Існує багато різноманітних підходів до створення таких моделей, які залежать від області застосування та характеру роботи конструкції, але в цілому можна виділити два основні підходи:

- 1) Дискретно-структурні моделі (в подальшому ДСМ) – для виведення вихідних диференціальних рівнянь використовують гіпотези окремо для кожного шару. Кількість вихідних рівнянь залежить від кількості шарів.
- 2) Неперервно-структурні моделі (в подальшому НСМ) – для виведення вихідних диференціальних рівнянь використовують гіпотези для всього пакету шарів разом, що зменшує кількість вихідних рівнянь, але знижує точність розрахунку.

Розглянемо циліндричний згин двошарової пластини під дією навантаження  $q(x, y, z)$  (рис 1). По торцевим граням пластина закріплена вертикальними і горизонтальними в'язями.

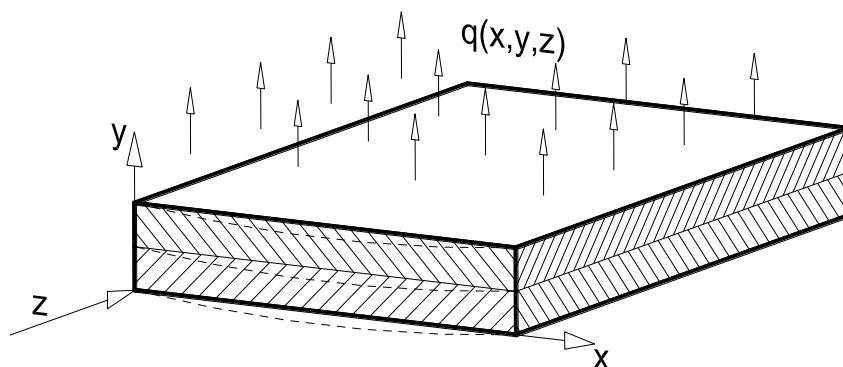


Рис. 1. Двошарова пластина

Навантаження по осі  $z$  постійне. В силу переносної симетрії для визначення напружено-деформованого стану пластини, тривимірний розрахунковий модель зводиться до плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) рис. 2.

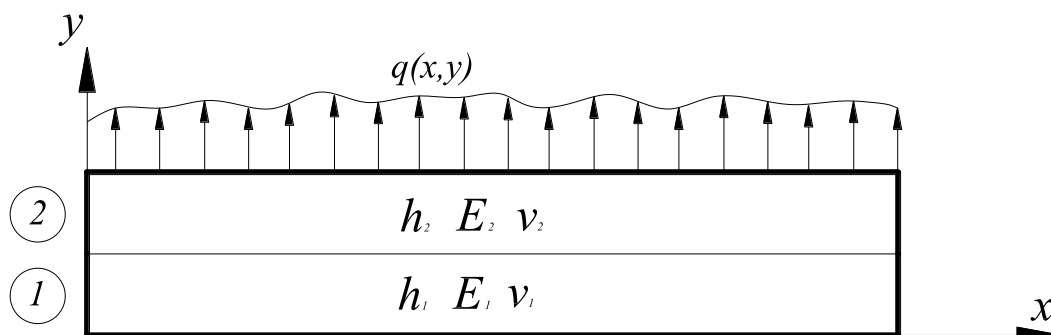


Рис. 2. Плоска деформація пластини.

На пластину діє навантаження  $q(x, y)$ , по бічним граням пластина закріплена в`язями заданої жорсткості. На границі двох шарів присутні сили зчеплення. Кожен шар має свої фізико-механічні характеристики. Потрібно визначити напружено-деформований стан (в подальшому НДС) двошарової конструкції під дією навантаження при всіх можливих стандартних умовах закріплення і контакту між шарами.

Для моделювання поставленої задачі використовуємо основні рівняння плоскої задачі теорії пружності (1) та (2):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  - коефіцієнти Ляме,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  - тензори напружень;  $u$ ,  $v$  - тензори переміщень. В подальшому на основі рівнянь (1) та (2) складаються вихідні рівняння для НСМ та ДСМ.

### Неперервно-структурна модель

2-х шарова конструкція розглядається як одношарова зі змінними фізико-механічними характеристиками. (рис. 3) У данному підході обираємо усереднене значення коефіцієнта Пуассона для всього пакету шарів вцілому, а модуль пружності змінюється за кусково-сталім законом. У результаті багатошарова модель зводиться до одношарової пластини зі змінними по товщині коефіцієнтами Ляме:

$\mu(y) = \frac{E(y)}{2(1+\nu_c)} = \frac{E_1 \cdot \psi(y)}{2(1+\nu_c)}$ ,  $\lambda(y) = \frac{E(y) \cdot \nu_c}{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)} = \frac{E_1 \cdot \psi(y) \cdot \nu_c}{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)}$ ,  $E_1$  - модуль пружності першого шару,  $\nu_c$  - усереднене значення коефіцієнта Пуассона.

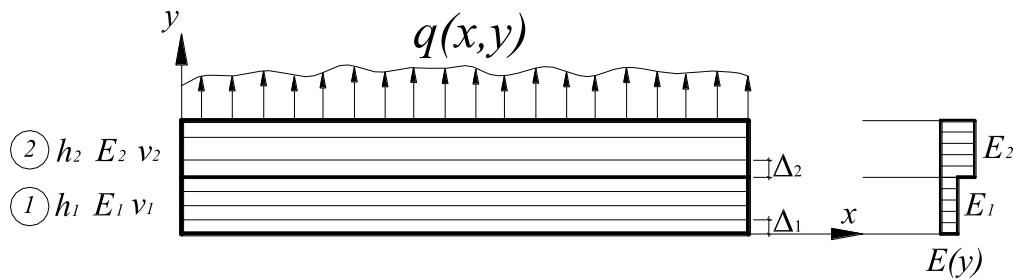


Рис. 3. Розрахункова модель

Диференціальні рівняння (1) та (2) для зручності перепишемо у вигляді (3). Невідомі функції будемо вважати неперервними вздовж координати  $x$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \frac{\sigma_x}{\psi(y)} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \\ \frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{\psi(y)} - \frac{\partial u^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y \\ \sigma_y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \sigma_x + \frac{4(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot \psi(y) \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3)$$

$u^* = \mu_1 \cdot u$ ,  $v^* = \mu_1 \cdot v$  - дана заміна використовується для того, щоб переміщення і напруження мали числові значення одного порядку.

Для зниження вимірності вихідних рівнянь (3) скористаємось методом «прямих» у поєднанні з узагальненим методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова, який детально описано в роботі [6, 7]. Розбиваємо кожен шар пластини по координаті  $y$  на ділянки з кроком  $\Delta_m$ ,  $m$  - номер шару (рис. 3). На прямих обираємо базисні функції  $\varphi_i(y)$  (рис. 4). Шукані функції системи (3) наближено визначаємо за допомогою лінійної комбінації (4):

$$f(x, y) \approx f^i(y) \cdot \varphi_i(y) \tag{4}$$

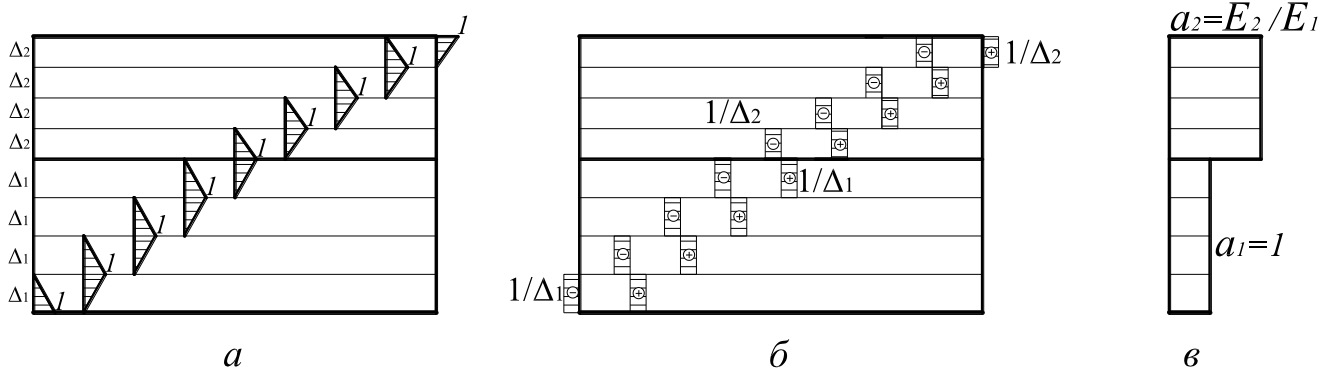


Рис. 4

- а) базисні функції  $\varphi_i(y)$  б) похідні від базисних функцій  $\varphi'_i(y)$  в) функція, що описує зміну модуля пружності  $\psi(y)$ .

Домножуючи систему (3) на  $\varphi_i(y)$  та інтегруючи по координаті  $y$ , в результаті отримуємо редуковану систему (5) розв'язувальних рівнянь першого порядку зі змінними коефіцієнтами, що залежать від координати  $x$ . Детально процес редукції рівнянь приведено в роботі [6]. Потрібно зазначити, що під час інтегрування виникають додаткові лінійні оператори.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_i^*}{\partial x} &= \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot C1_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot \sigma_{x\alpha} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot v_\alpha^* \\ \frac{\partial v_i^*}{\partial x} &= C1_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot \tau_{xy\alpha} - b_{ij} \cdot g^{j\alpha} \cdot u_\alpha^* \\ \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} &= -\tau_{xy}(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot \tau_{xy\alpha} \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X_\alpha \\ \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} &= -\sigma_y(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot \sigma_{x\alpha} + \frac{4(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot b_{ji} \cdot g^{jk} \cdot C2_{k\beta} \cdot g^{\beta\alpha} \cdot v_\alpha^* - Y_\alpha \\ \sigma_y^j &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot g^{j\alpha} \cdot \sigma_{x\alpha} + \frac{4(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot g^{jk} \cdot C2_{k\beta} \cdot g^{\beta\alpha} \cdot v_\alpha^* \end{aligned} \right. \tag{5}$$

$$\text{де } \tau_{xy}(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h = \begin{bmatrix} -\tau_{xy}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau_{xy}^n \end{bmatrix}, \quad \sigma_y(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h = \begin{bmatrix} -\sigma_y^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_y^n \end{bmatrix}$$

В результаті отримуємо редуковану систему розв'язувальних рівнянь, записану в моментах [6,7].

Оскільки крок  $\Delta_m$  може бути обраним індивідуально для кожного з шарів пластини, основні метричні тензори дещо відрізняються від запропонованих в роботі [7].

$$\{g_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y)) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{3} & \frac{\Delta_1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_1}{6} & \frac{2\Delta_1}{3} & \frac{\Delta_1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{6} & (\frac{\Delta_1}{3} + \frac{\Delta_2}{3}) & \frac{\Delta_2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_2}{6} & \frac{2\Delta_2}{3} & \frac{\Delta_2}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_2}{6} & \frac{2\Delta_2}{3} & \frac{\Delta_2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_2}{6} & (\frac{\Delta_2}{3} + \frac{\Delta_3}{3}) & \frac{\Delta_3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{6} & \frac{2\Delta_3}{3} & \frac{\Delta_3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{6} & \frac{\Delta_3}{3} \end{bmatrix}$$

Матриця  $b_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi'_j(y))$  - залишається незмінною.

З'являються 2 додаткових оператори:

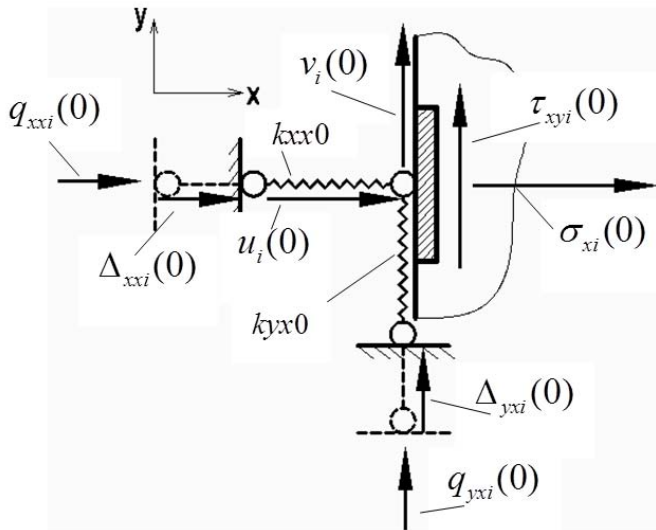
$$C1_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y), \frac{1}{\psi(y)})$$

$$\{C1_{ij}\} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{3a_1} & \frac{\Delta_1}{6a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_1}{6a_1} & \frac{2\Delta_1}{3a_1} & \frac{\Delta_1}{6a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{6a_1} & (\frac{\Delta_1}{3a_1} + \frac{\Delta_2}{3a_2}) & \frac{\Delta_2}{6a_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_2}{6a_2} & \frac{2\Delta_2}{3a_2} & \frac{\Delta_2}{6a_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_2}{6a_2} & \frac{2\Delta_2}{3a_2} & \frac{\Delta_2}{6a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_2}{6a_2} & (\frac{\Delta_2}{3a_2} + \frac{\Delta_3}{3a_3}) & \frac{\Delta_3}{6a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{6a_3} & \frac{2\Delta_3}{3a_3} & \frac{\Delta_3}{6a_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_3}{6a_3} & \frac{\Delta_3}{3a_3} \end{bmatrix}$$

$$C2_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi'_j(y), \psi(y))$$

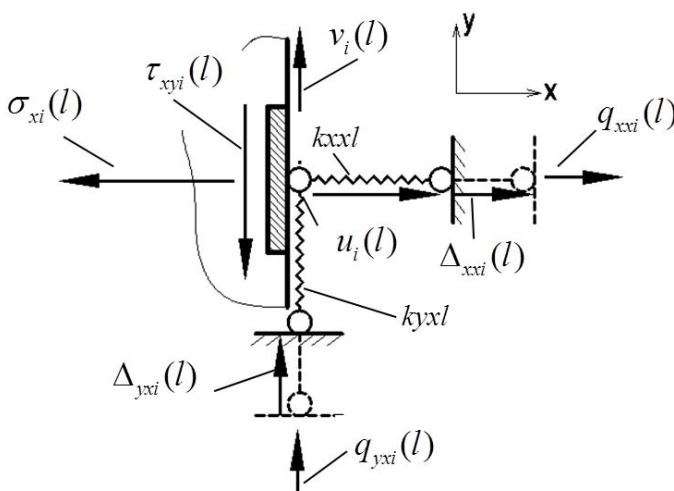
$$\{C2_{ij}\} = \begin{pmatrix} -0,5a_1 & 0,5a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5a_1 & 0 & 0,5a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5a_1 & (0,5a_1 - 0,5a_2) & 0,5a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5a_2 & 0 & 0,5a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5a_2 & 0 & 0,5a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5a_2 & (0,5a_2 - 0,5a_3) & 0,5a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5a_3 & 0 & 0,5a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5a_3 & 0,5a_3 \end{pmatrix}$$

Для чисельного розв'язання задачі необхідно задати граничні умови. Пластина по торцевій поверхні закріплена вертикальними та горизонтальними пружними в'язями. Варіюючи жорсткістю в'язей, моделюються всі можливі стандартні умови закріплення.



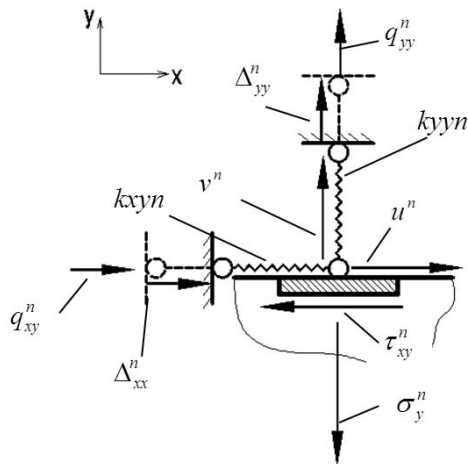
$$\begin{cases} \frac{k_{xx0}}{\mu_1} u_i^* - \sigma_{xi} = k_{xx0} \Delta_{xxi} + q_{xxi} \\ \frac{k_{yx0}}{\mu_1} v_i^* - \tau_{xyi} = k_{yx0} \Delta_{yxi} + q_{yxi} \end{cases} \quad (6a)$$

Рис. 5. Граничні умови на лівій грані пластини

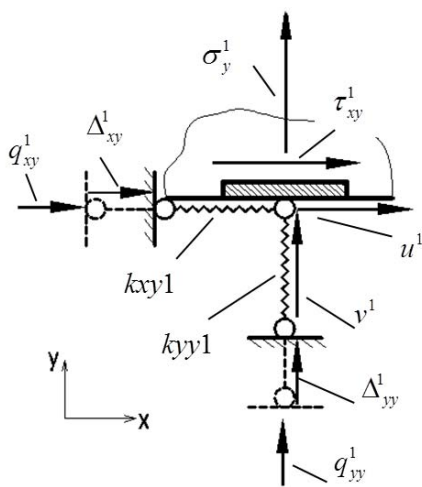


$$\begin{cases} \frac{k_{xxl}}{\mu_1} u_i^* + \sigma_{xi} = k_{xxl} \Delta_{xxi} + q_{xxi} \\ \frac{k_{yxl}}{\mu_1} v_i^* + \tau_{xyi} = k_{yxl} \Delta_{yxi} + q_{yxi} \end{cases} \quad (6b)$$

Рис. 6. Граничні умови на правій грані пластини



$$\begin{cases} \sigma_y^n = -k_{yy}n \cdot \left( \frac{1}{\mu} v^{*n} - \Delta_{yy}^n \right) + q_{yy}^n \\ \tau_{xy}^n = -k_{xyn} \cdot \left( \frac{1}{\mu} u^{*n} - \Delta_{xy}^n \right) + q_{xy}^n \end{cases} \quad (7a)$$

Рис. 7. Граничні умови на  $n$  - й прямій

$$\begin{cases} \sigma_y^1 = -k_{yy}1 \cdot \left( \frac{1}{\mu} v^{*1} - \Delta_{yy}^1 \right) - q_{yy}^1 \\ \tau_{xy}^1 = k_{xyn} \cdot \left( \frac{1}{\mu} u^{*1} - \Delta_{xy}^1 \right) - q_{xy}^1 \end{cases} \quad (7b)$$

Рис. 8. Граничні умови на 1 - й прямій:

На наступному етапі система редукованих диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку (5) з врахуванням граничних умов розв'язується чисельно методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [1].

### **Дискретно-структурна модель**

При використанні ДСМ рівняння записуємо для кожного шару окремо, а контакт між шарами задаємо в'язями.

Перетворюючи рівняння (1) та (2) записуємо систему диференціальних рівнянь для  $t$  - го шару (8).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\lambda_m + 2\mu_m} \cdot \sigma_x - \frac{\lambda_m}{\lambda_m + 2\mu_m} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \\ \frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\mu_m} \tau_{xy} - \frac{\partial u^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y \\ \sigma_y = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + 2\mu_m} \cdot \sigma_x + \frac{4(\lambda_m + \mu_m) \cdot \mu_m}{(\lambda_m + 2\mu_m) \cdot \mu_1} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} \end{array} \right. \quad (8)$$

Процес редукції рівнянь (8) для  $m$  - го шару аналогічний, використовуємо базисні функції  $\varphi_i(y)$ .

В результаті отримаємо систему (9):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^*}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\lambda_m + 2\mu_m} \cdot \sigma_{xi} - \frac{\lambda_m}{\lambda_m + 2\mu_m} \cdot b_{ij} \cdot g^{jk} \cdot v_k^* \\ \frac{\partial v_i^*}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\mu_m} \tau_{xyi} - b_{ij} \cdot g^{jk} \cdot u_k^* \\ \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} = -\tau_{xy}(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + b_{ji} \cdot g^{jk} \cdot \tau_{xyk} - X_i \\ \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} = -\sigma_y(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + \frac{\lambda_m}{\lambda_m + 2\mu_m} \cdot b_{ji} \cdot g^{jk} \cdot \sigma_{xk} + \\ + \frac{4(\lambda_m + \mu_m) \cdot \mu_m}{(\lambda_m + 2\mu_m) \cdot \mu_1} b_{ji} \cdot g^{j\alpha} \cdot b_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta k} \cdot v_k^* - Y_i \\ \sigma_y^j = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + 2\mu_m} \cdot g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha} + \frac{4(\lambda_m + \mu_m) \cdot \mu_m}{(\lambda_m + 2\mu_m) \cdot \mu_1} \cdot g^{j\alpha} \cdot b_{\alpha\beta} \cdot v^{*\beta} \end{array} \right. \quad (9)$$

Граничні умови по граням пластини записуються у вигляді (6, 7).  
Граничні умови на межі сусідніх шарів:



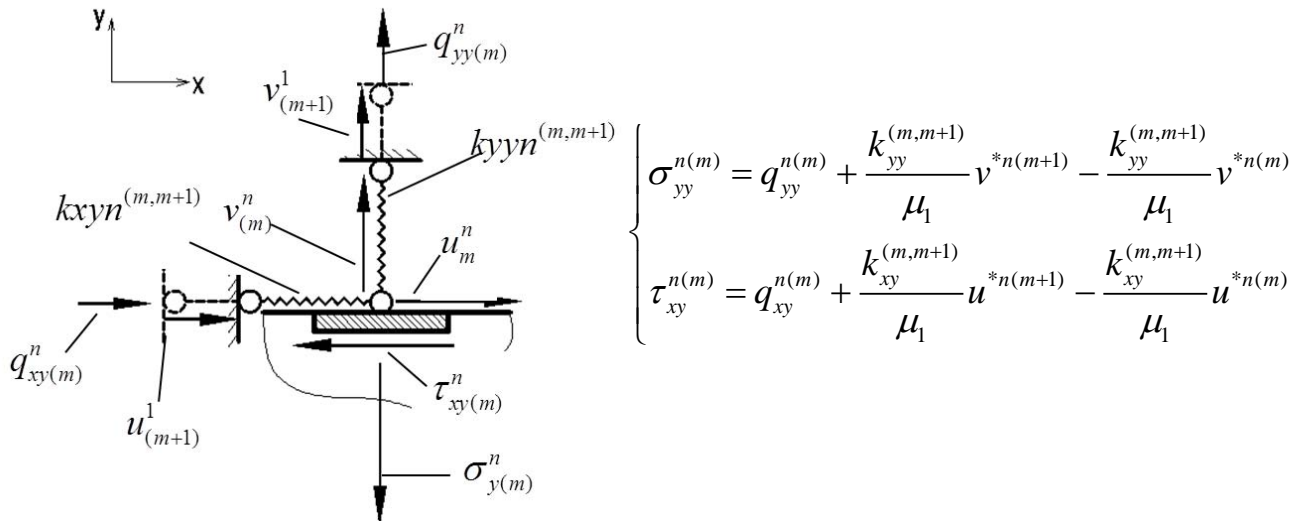


Рис. 9. Моделювання контакту між суміжними шарами конструкції на межі  $m$ -го та  $m + 1$ -го шару.

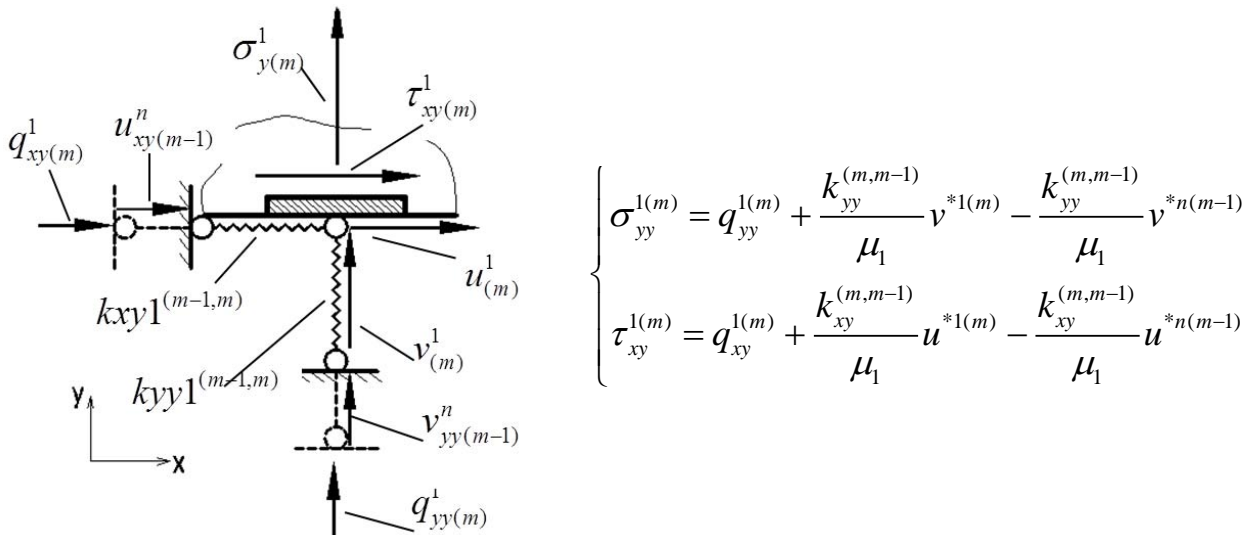


Рис. 10. Моделювання контакту між суміжними шарами конструкції на межі  $m - 1$ -го та  $m$ -го шару.

Далі вихідні диференціальні рівняння записуємо в загальному вигляді для шару під номером  $m$ . В роботі розглядається двошарова пластина. Запишемо рівняння для кожного шару окремо.

Редуковані диференціальні рівняння для 1-го шару, записані в моментах (10):

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du_i^{*(1)}}{dx} &= \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \sigma_{xi}^{(1)} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha^{*(1)} \\
 \frac{dv_i^{*(1)}}{dx} &= \tau_{xi}^{(1)} - b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha^{*(1)} \\
 \frac{d\sigma_{xi}^{(1)}}{dx} &= - \begin{bmatrix} k_{yx}^{*(0,1)} (u^{*1(1)} - u^{*n(0)}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k_{yx}^{*(1,2)} (u^{*1(2)} - u^{*n(1)}) \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha}^{*(1)} - X_i^{(1)} \\
 \frac{d\tau_{xyi}^{(1)}}{dx} &= - \begin{bmatrix} k_{yy}^{*(0,1)} (v^{*1(1)} - v^{*n(0)}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k_{yy}^{*(1,2)} (v_1^{*(2)} - v_n^{*(1)}) \end{bmatrix} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha}^{*(1)} + \frac{4(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)} b_{ji} g^{jk} b_{k\beta} g^{\beta\alpha} \sigma_{x\alpha}^{*(1)} - Y_i^{(1)} \\
 \sigma_y^{j(1)} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \sigma_x^{j(1)} + \frac{4(\lambda_1 + \mu_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} v^{\beta(1)}
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Редуковані диференціальні рівняння для 2-го шару, записані в моментах (11):

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du_i^{*(2)}}{dx} &= \frac{\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2} \sigma_{xi}^{(2)} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha^{*(2)} \\
 \frac{dv_i^{*(2)}}{dx} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \tau_{xi}^{(2)} - b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha^{*(2)} \\
 \frac{d\sigma_{xi}^{(2)}}{dx} &= - \begin{bmatrix} -k_{yx}^{*(1,2)} (u^{*1(2)} - u^{*n(1)}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{yx}^{*(2,3)} (u^{*1(3)} - u^{*n(2)}) \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha}^{*(2)} - X_i^{(2)} \\
 \frac{d\tau_{xyi}^{(2)}}{dx} &= - \begin{bmatrix} k_{yy}^{*(1,2)} (v^{*1(2)} - v^{*n(1)}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -k_{yy}^{*(2,3)} (v^{*1(3)} - v^{*n(2)}) \end{bmatrix} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha}^{*(2)} + \frac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2)} b_{ji} g^{jk} b_{k\beta} g^{\beta\alpha} \sigma_{x\alpha}^{*(2)} - Y_i^{(2)} \\
 \sigma_y^{j(2)} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \sigma_x^{j(2)} + \frac{4\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2)} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} v^{\beta(2)}
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Індекс  $(m)$  - показує до якого шару відноситься тензор напружень або тензор переміщень.  $k_{yx}^{*(m,m+1)} = \frac{k_{yx}^{(m,m+1)}}{\mu_1}$  - жорсткість пружини на межі двох

суміжних шарів з номерами ( $m$ ) та ( $m+1$ ). Шар під номером (0) та (3) – зовнішнє середовище навколо багатошарової пластини. Таким чином можна задати взаємні переміщення зовнішнього середовища, осадку опор, врахувати пружну ґрунтову основу.

Враховуючи граничні умови на бічних гранях (6а) та (6б), системи редукованих диференціальних рівнянь (10) та (11) розв'язуємо чисельно методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова. На алгоритмічній мові FORTRAN розроблено 2 програми.

1 – На основі неперервно-структурної моделі

2 – На основі дискретно-структурної моделі.

Розглядається двошарова пластина (рис.11), жорстко защемлена на бічних гранях, навантажена рівномірно-розподіленим навантаженням на верхній грані  $q = -5кН / м$ , довжина пластини  $l = 2м$ . Механічні характеристики шарів:

Шар №1  $h_1 = 0,3м$   $E_1 = 50 \cdot 10^7 кПа$   $\nu_1 = 0,3$

Шар №2  $h_2 = 0,2м$   $E_2 = 25 \cdot 10^7 кПа$   $\nu_2 = 0,3$

Контакт між шарами абсолютно жорсткий.

1) *Застосування неперервно-структурної моделі:*

Функція зміни модуля пружності буде мати вигляд

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 \leq y \leq h_1, a_1 = 1 \\ h_1 \leq y \leq h_2, a_2 = 0,5 \end{cases}$$

Середнє значення коефіцієнта Пуассона прийнято  $\nu_c = 0,3$ .

Розбиваємо кожен шар прямими на полоси шириною  $\Delta_1 = 0,05 м$ ,  $\Delta_2 = 0,04 м$ , в результаті в першому шарі маємо 6 прямих, у другому - 5 прямих. На границі двох суміжних шарів з'являється додаткова пряма, тому загальна кількість прямих  $n = 12$ .

2) *Застосування дискретно-структурної моделі:*

Розбиваємо кожен шар прямими на полоси,  $\Delta_1 = 0,05 м$ ,  $\Delta_2 = 0,04 м$ , в результаті в першому шарі маємо 7 прямих, в другому 6 прямих. Пряма на границі двох суміжних шарів дублюється. Для моделювання контакту між 1 та 2 шаром задаємо жорсткості вертикальних та горизонтальних в'язей  $k_{xy}^{(1,2)} = 10^{11}$  та  $k_{yy}^{(1,2)} = 10^{11}$ , щоб відтворити абсолютно жорсткий контакт між шарами.

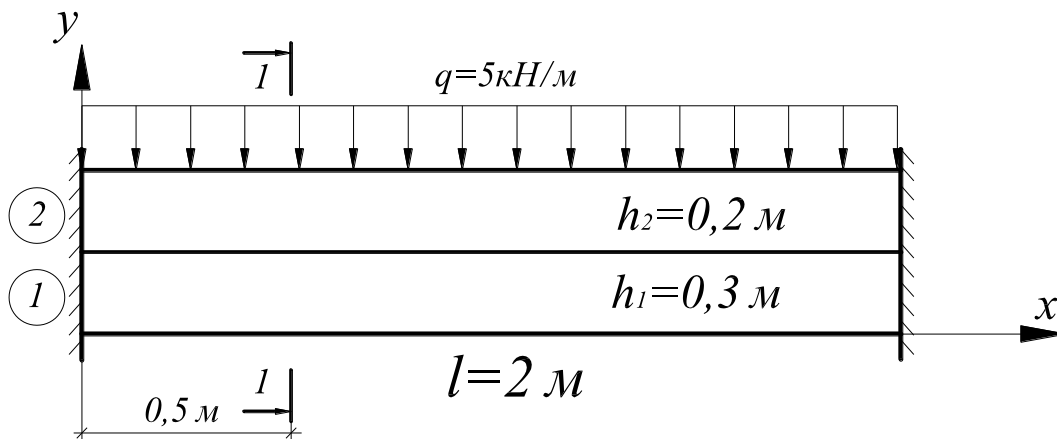
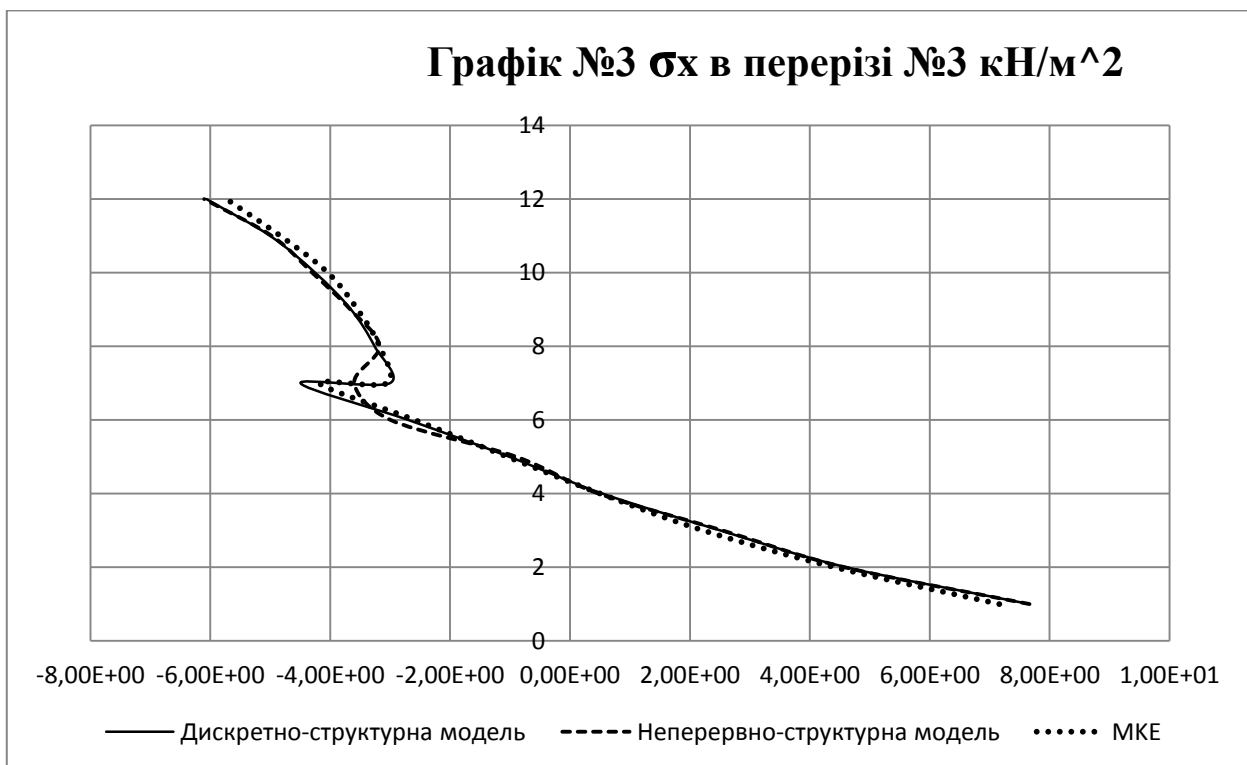
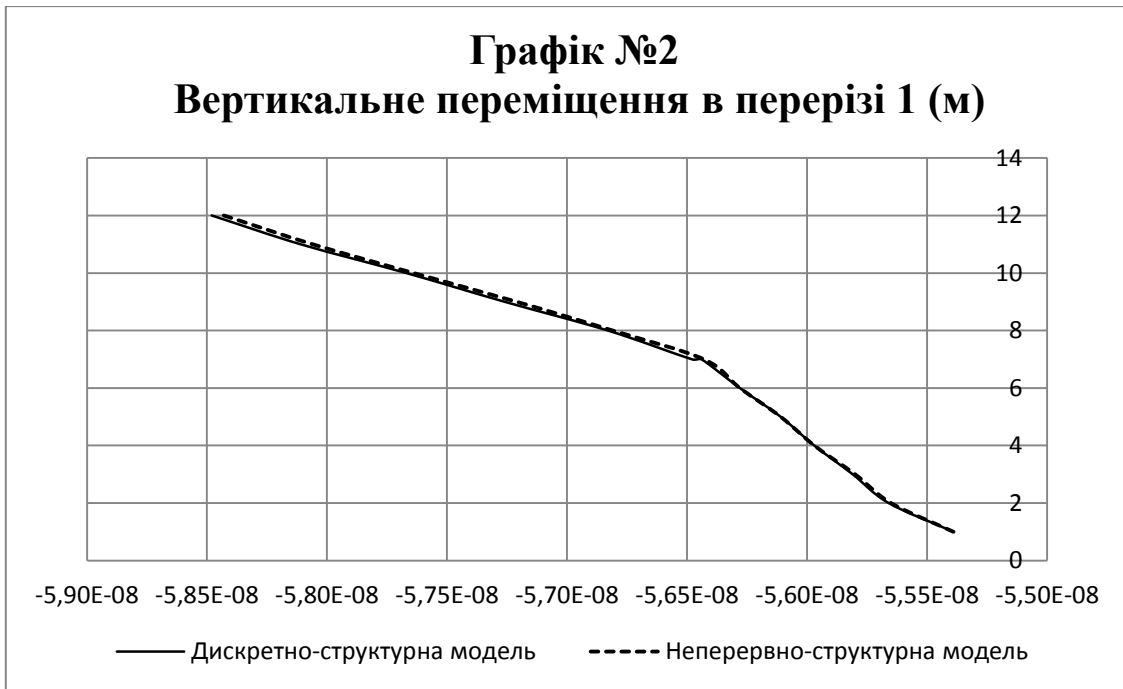


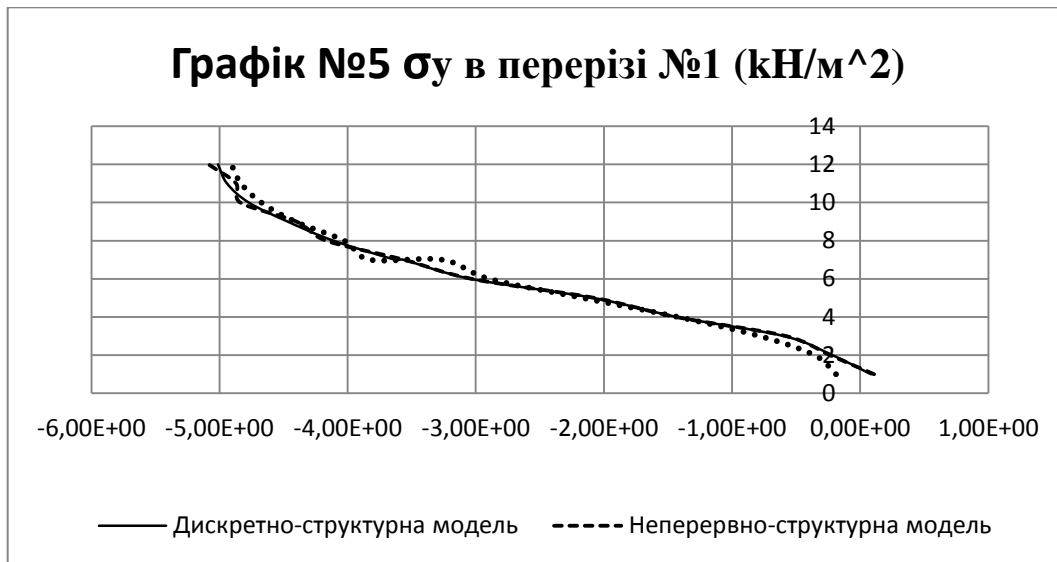
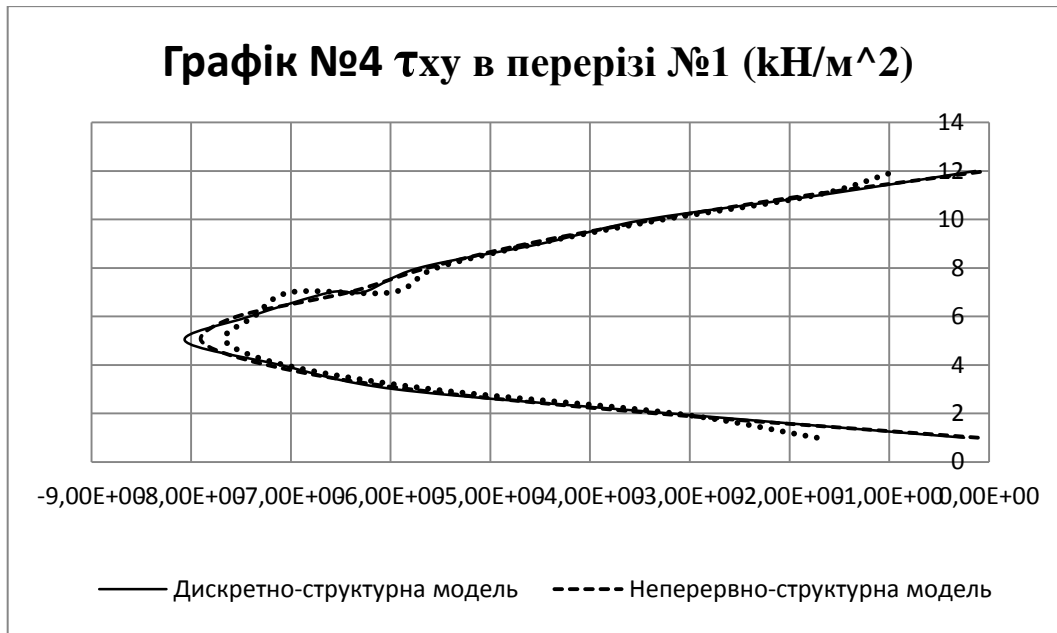
Рис. 11. Двошарова пластина, жорстко зацмлена по бічних гранях

На графіках (1-5) наведені результати, отримані за двома підходами для всіх компонентів вектора переміщень і напружень в  $\frac{1}{4}$  прольоту пластини та перевірені в програмному комплексі ANSYS.





На межі двох суміжних шарів, тобто на 7 прямій виникають розбіжності в отриманих результатах. На графіку №3 нормальні напруження на 7 прямій дають скачок в ДСМ, що дає можливість точно врахувати контакт між шарами на відміну від НСМ, яка через інтегрування згладжує скачки на контакті двох шарів.



**Висновки:** Головна перевагою ДСМ є висока точність розрахунку, можливість врахувати контакт між шарами, сили зчеплення та взаємні переміщення шарів. Але при значній кількості шарів виникають труднощі, пов'язані з великим числом розв'язувальних рівнянь, порядок яких  $p = 4 \cdot m$ , де  $m$  - кількість шарів. Таку модель зручно використовувати при кількості шарів до 4, 5. Великі розмірності масивів в програмі можуть перевищити допустимі границі.

НСМ зручна тим, що кількість рівнянь залишається стала – 4, кількість шарів можна задати необмежено, але функція, яка описує модуль пружності є розривною, контакт між шарами абсолютно жорстким, тому на границі двох суміжних шарів нормальні напруження згладжуються, що зменшує точність розрахунку.

Кожна з моделей може бути успішно використана для розрахунку шарових конструкцій, враховуючи особливості матеріалів шарів, їх контакту та призначення конструкції.

### Література:

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – С. 171-174.
2. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонки: Монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с: іл.
3. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М: «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1979.-392 с.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – 2-е изд., перераб. – М.: 1957. - 250 с.
5. Шкелев Л.Т., Станкевич А.Н., Пошивач Д.В., Корбаков А.Ф. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояния пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: Монография. – К.: КНУСА, 2004. – 136 с.
6. Чибіряков В. К. , Станкевич А. М. , Левківський Д. В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник, вип. 46. – К.: КНУБА, 2013. – С. 613 – 624.
7. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Д.В. Левківський До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування, випуск 36. – К.: КНУБА, 2010. — С. 413 – 423.
8. Жупаненко І.В., Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. Частоти вільних коливань товстої шарнірно-опертої пластини. // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд», випуск №85. – К.: КНУБА, 2010. - С.109 – 117.
9. С. М. Михлин Вариационные методы в математической физике// Гос-ное из-во технико-теоретической л-ры: М.: 1957. – 476 с.

### Аннотация

В данной работе рассматриваются 2 подхода к моделированию работы слоистой конструкции (непрерывно-структурная и дискретно-структурная модели). Задача решается в постановке плоской деформации. Для снижения размерности исходных дифференциальных уравнений используется метод «прямых» в комплексе с проекционным методом Бубнова-Галеркина-Петрова. Проведен анализ преимуществ и недостатков каждого подхода.

### Abstract

The article is concerned with two approaches to modeling of functioning of a multilayer structure (a continuous structure model and a discrete structure model). The problem can be solved by setting a task in the plane deformation. To reduce the measurability of the output equations there is applied the method of the “direct lines” in combination with Bubnov-Galerkin-Petrov projection method. An analysis of the advantages and disadvantages of each approach has been made.