

УДК539.3

к.т.н., доцент Станкевич А.М.,  
Левківський Д.В., Тімофєєв А.С.,  
Київський національний університет будівництва і архітектури

### РОЗРАХУНОК БАЛКИ-СТІНКИ МЕТОДОМ «ПРЯМИХ»

*Розглядається методика визначення напружено-деформованого стану балки-стінки за допомогою комбінації метода «прямих» та проекційного метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Для чисельного розв'язання редукованих рівнянь задачі застосовують метод дискретної ортогоналізації С.К.Годунова. На прикладі показано збіжність отриманих результатів з методом скінченних елементів.*

У сучасному будівництві широко використовуються площинні конструкції, які працюють як балка-стінка. Це і діафрагми монолітних залізобетонних будівель, перегородки, стінові панелі житлових будинків. Окремо слід зазначити висячі стіни цокольних поверхів, що опираються не на фундаменти, а на ранд-балки та обв'язувальні балки.

При збільшенні відношення висоти до довжини балки похибки наближеного рішення, наприклад на основі теорії вигину високих балок, зростають та стають неприпустимо великими.

Задача розрахунку балки-стінки (рис.1) відноситься до плоского напруженого стану і може бути вирішена за допомогою теорії пружності.

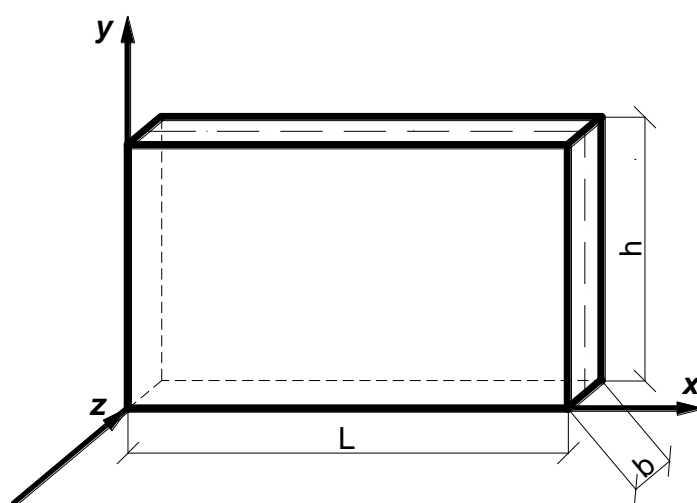


Рис.1. Балка-стінка

Основою алгоритму, що наводиться нижче, є визначення напружено-деформованого стану балки із застосуванням рівнянь плоскої задачі теорії

пружності (плоский напружений стан). Для зниження вимірності пропонується в комбінації з методом прямих використовувати проекційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Суть методу «прямих» («ліній», «відщеплень») полягає в зведенні будь-якої дво- чи тривимірної задачі до одновимірної та заміні диференціальних рівнянь в часткових похідних на звичайні диференціальні рівняння. Розв'язок отримується, як проекція шуканої функції на півпростір базисних функцій (1).

$$f(x, y) \approx \sum_{i=1}^n f^i(x) \cdot \varphi_i(y) \quad (1)$$

Основні рівняння для плоскої задачі теорії пружності отримуються з рівнянь об'ємної задачі шляхом виключення з них похідних по координаті  $z$ . Якщо вирішувати плоску задачу в напруженнях  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  та  $\tau_{yx}$ , то виходить система рівнянь, яка складається з:

- рівнянь рівноваги в проекціях на вісь  $x$ ,  $y$  (2):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

- фізичних рівнянь(3):

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (3)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

В подальшому у рівнянні (3) проводимо заміну сталих  $E$  та  $\nu$ , і отримуємо рівняння (4) :

$$\begin{cases} \sigma_x = (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda^* \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y = \lambda^* \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda^* + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (4)$$

де  $\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}$ ,  $\lambda$  та  $\mu$  – коефіцієнти Ляме.

Невідомі функції системи (2), (4) залежать від двох змінних. Для зниження вимірності розбиваємо балку-стінку по поперечній координаті прямими на  $n-1$  смугу з кроком  $\Delta$  (рис.2) та обираємо базисні кусково-лінійні фінітні функції  $\varphi_i(y)$ , які задовольняють умовам:  $\varphi_i(y)=1$  на  $i$ -й прямій,  $\varphi_i(y)=0$  на усіх інших прямих.

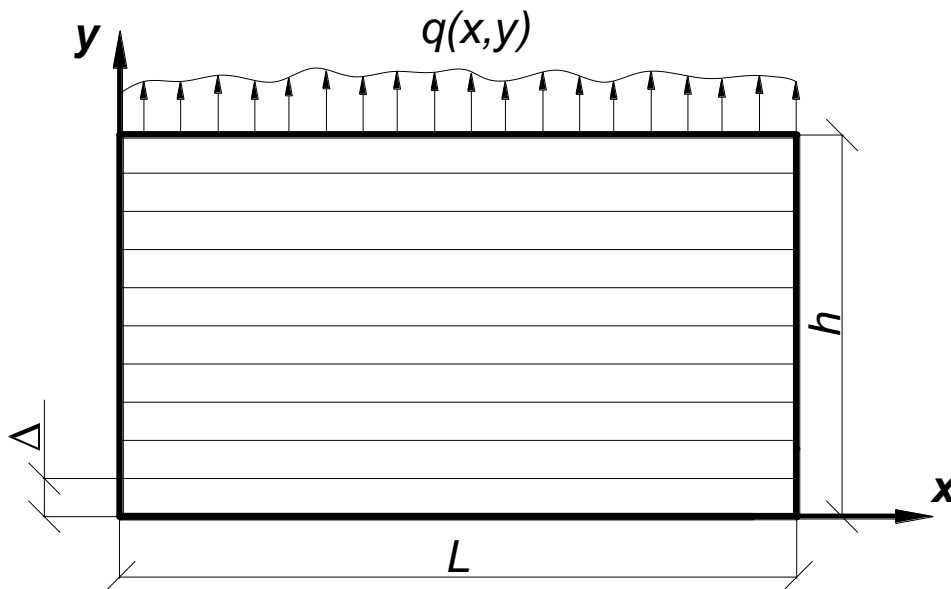


Рис.2. Плоский напружений стан балки-стінки.

На основі рівнянь (2) та (4) складаємо вихідні рівняння (5), як систему диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x} = -\frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x \\ \frac{\partial v^*}{\partial x} = -\frac{\partial u^*}{\partial y} + \tau_{xy} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y \\ \sigma_y = \frac{\lambda^*}{\mu} \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\lambda^* + 2\mu}{\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{4(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 2\mu} \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu} \sigma_x \end{array} \right. \quad (5)$$

де  $u^* = \mu u$ ,  $v^* = \mu v$ .

Далі граничні умови та процес редукування вихідної системи рівнянь приймаємо аналогічно наведеним в роботі [6].

У результаті редукована система диференціальних рівнянь представлена через переміщення і напруження у вигляді моментів від базисних функцій (6):

$$\begin{aligned} \frac{du^*_i}{dx} &= -\frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v^*_\alpha + \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu} \sigma_{xi} \\ \frac{dv^*_i}{dx} &= -b_{ij} g^{j\alpha} u^*_\alpha + \tau_{xyi} \\ \frac{d\sigma_{xi}}{dx} &= [k^*_{yx}(x) \delta_{i \cdot}^{1\alpha} g^{1\alpha} + k^*_{yx}(x) \delta_{i \cdot}^{n\alpha} g^{n\alpha}] \cdot u^*_\alpha + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha} - \\ & [q^-_{yx}(x) \delta_{i \cdot}^{1\alpha} + q^+_{yx}(x) \delta_{i \cdot}^{n\alpha}] - [k^*_{yx}(x) u^*_{c^-}(x) \delta_{i \cdot}^{1\alpha} + k^*_{yx}(x) u^*_{c^+}(x) \delta_{i \cdot}^{n\alpha}] - X_i \quad (6) \\ \frac{d\tau_{xyi}}{dx} &= [k^*_{yy}(x) \delta_{i \cdot}^{1\alpha} g^{1\alpha} + k^*_{yy}(x) \delta_{i \cdot}^{n\alpha} g^{n\alpha}] v^*_\alpha + \frac{\mu}{\lambda^* + 2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha} + \\ & \frac{4(\lambda^* + \mu)}{\lambda^* + 2\mu} b_{ji} g^{j\gamma} b_{\gamma\beta} g^{\beta\alpha} v^*_\alpha - [q^-_{yy}(x) \delta_{i \cdot}^{1\alpha} + q^+_{yy}(x) \delta_{i \cdot}^{n\alpha}] - \\ & [k^*_{yy}(x) v^*_{c^-}(x) \delta_{i \cdot}^{1\alpha} + k^*_{yy}(x) v^*_{c^+}(x) \delta_{i \cdot}^{n\alpha}] - Y_i \end{aligned}$$

Наступним етапом система диференціальних рівнянь в похідних першого порядку (6) розв'язується чисельно методом дискретної ортогоналізації С. К. Годунова. На алгоритмічній мові фортран розроблено програму визначення напружено-деформованого стану (НДС) балки-стілки.

Для тестування отриманих результатів розглянемо модель балки-стілки (рис.3.), жорстко закріпленої зліва та зправа. На балку-стілку прикладене

розподілене навантаження  $q = -10 \text{ кН/м}$ , Довжина балки  $l = 6 \text{ м}$ , висота  $h = 3 \text{ м}$ , модуль пружності  $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,2$ . Потрібно визначити НДС.

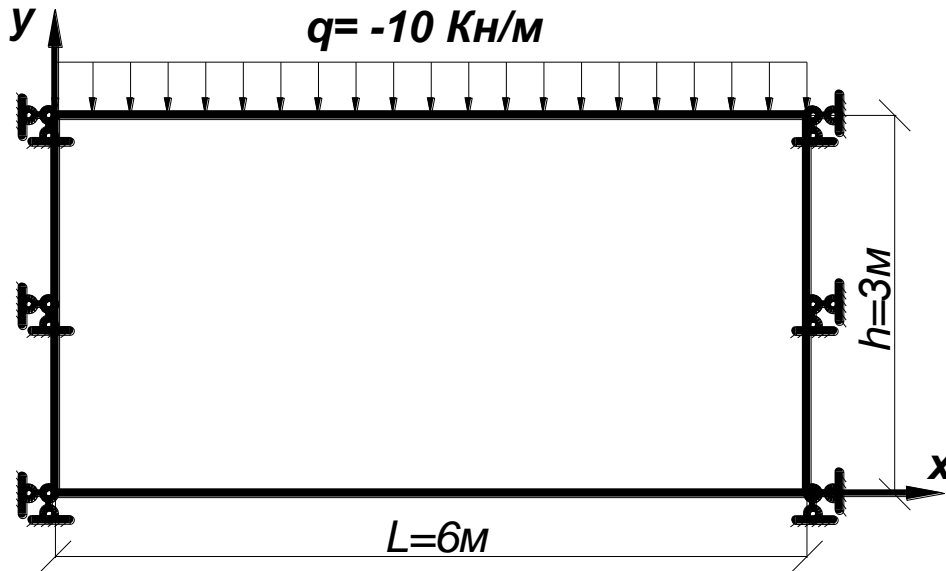
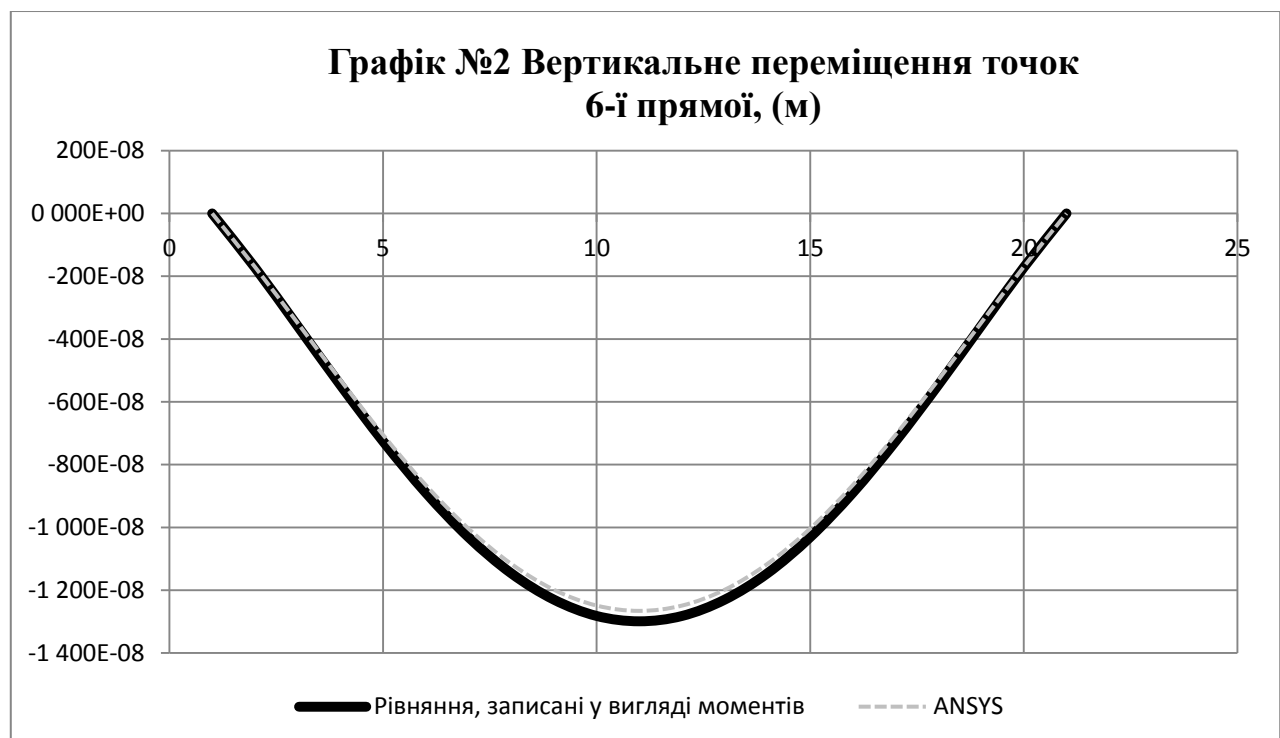
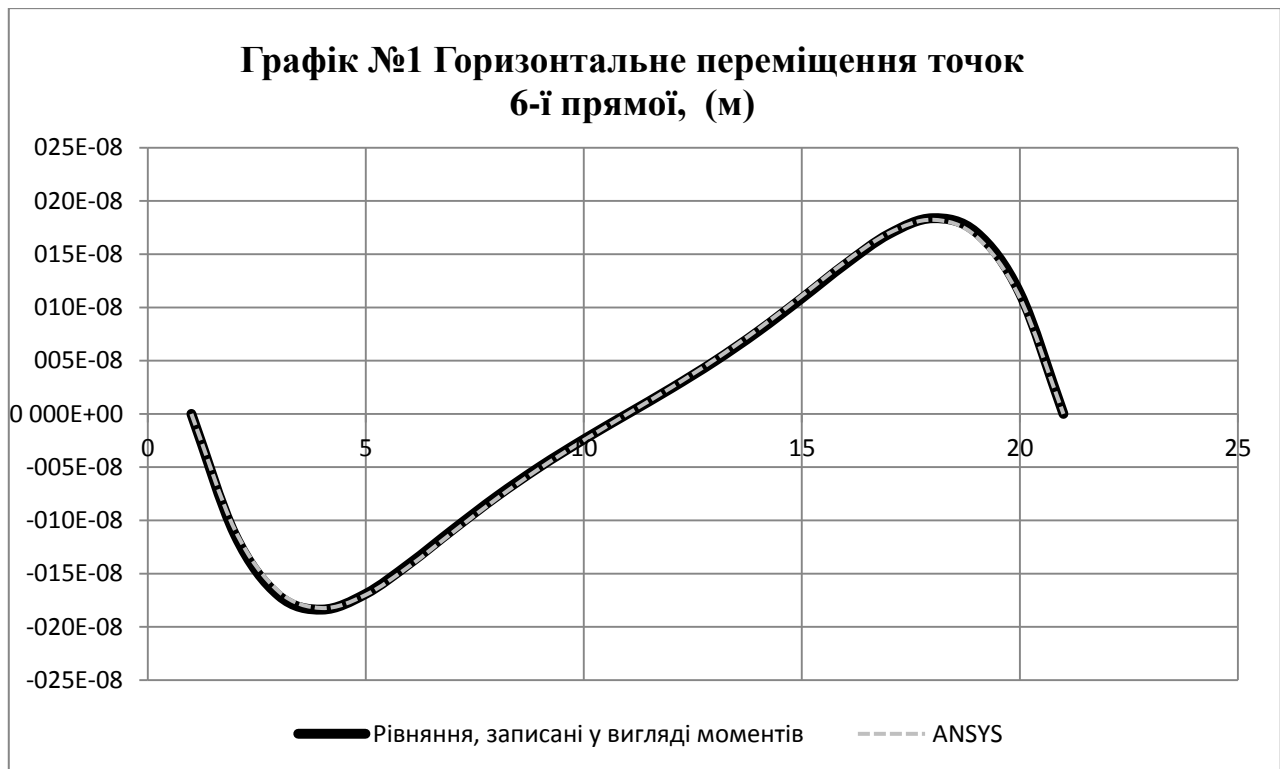


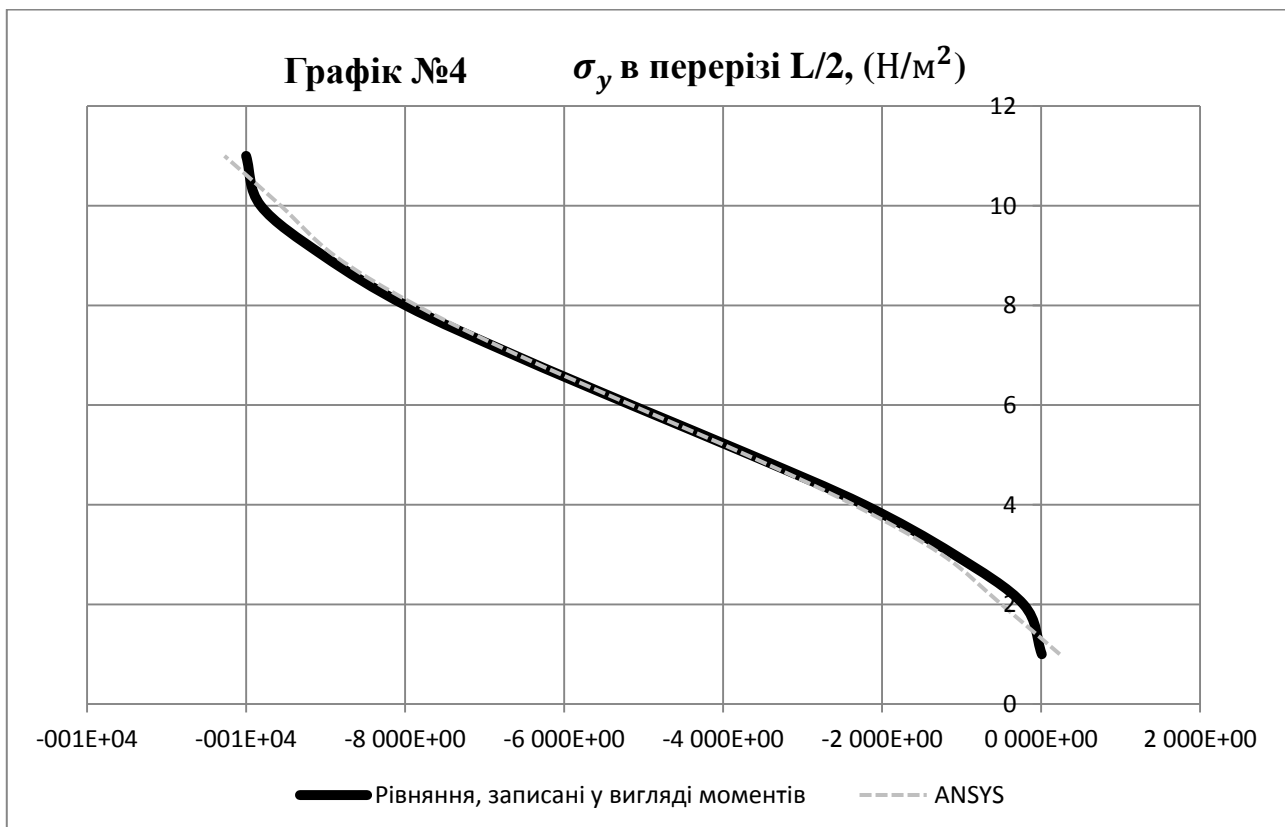
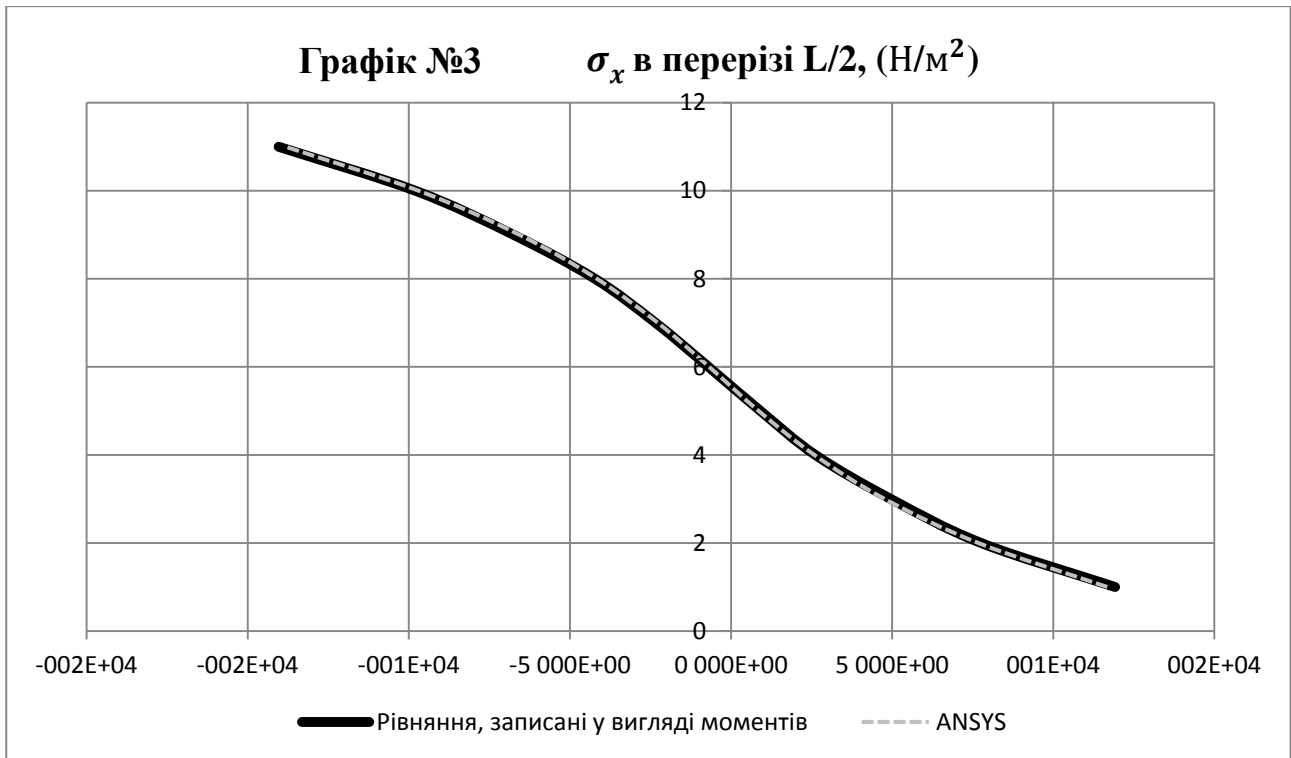
Рис.3. Дослідна модель балки-стілки.

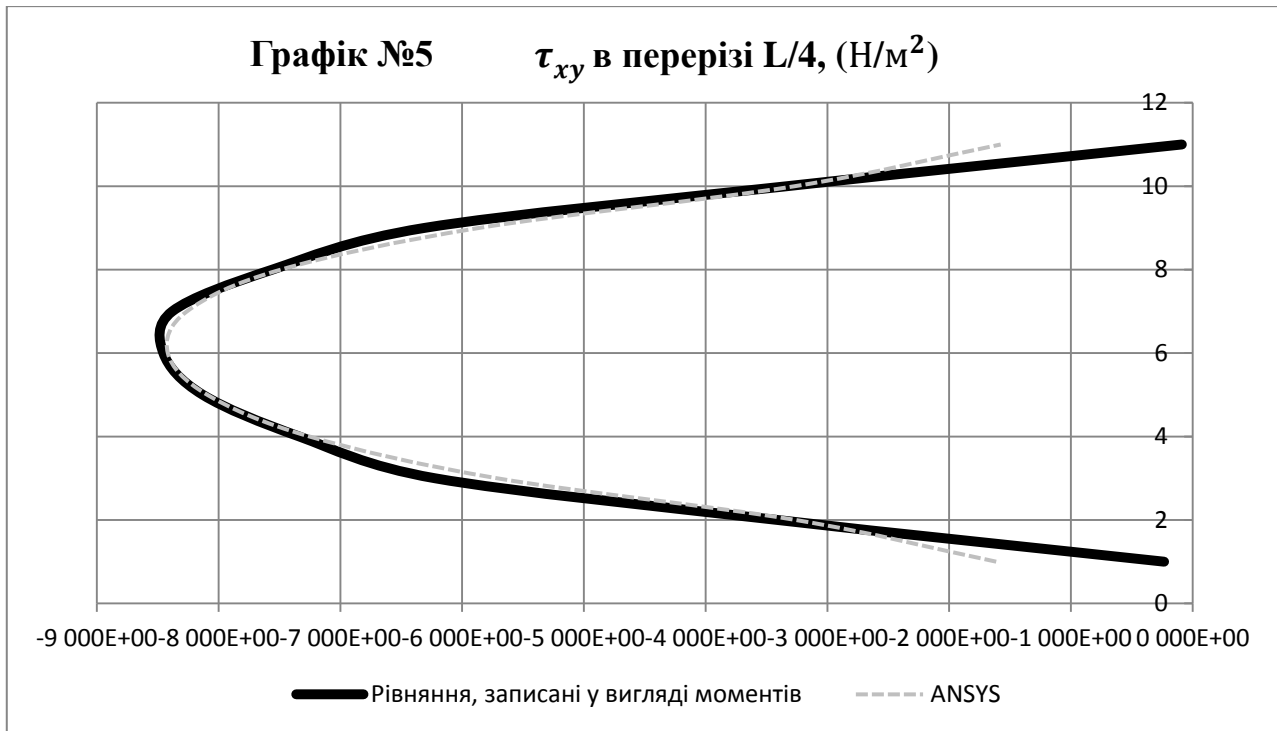
Розбиваємо балку стінку на 11 прямих по координаті  $y$  та встановлюємо 21 точку ортогоналізації по координаті  $x$ .

На графіках 1-5 показані горизонтальні та вертикальні переміщення точок 6-ї прямої, напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  в перерізі  $\frac{L}{2}$  та  $\tau_{xy}$  в перерізі  $\frac{L}{4}$ .

Для порівняння отриманих результатів, дана задача розв'язана методом скінченних елементів у програмному комплексі ANSYS. В таблиці 1 приведені результати горизонтального та вертикального переміщень, отримані за методом "прямих" та в програмному комплексі ANSYS.







Таблиця 1

№ прямої	Горизонтальне переміщення, (м)			Вертикальне переміщення, (м)		
	ANSYS	Метод прямих	Похибка %	ANSYS	Метод прямих	Похибка %
1	0	2,23E-17	0,00	0	9,31E-17	0,00
2	-1,09095E-07	-1,14E-07	3,88	-2,43E-07	-1,72E-06	1,12
3	-1,66628E-07	-1,71E-07	2,27	-4,98E-07	-3,59E-06	2,72
4	-1,82329E-07	-1,84E-07	0,80	-7,57E-07	-5,46E-06	2,94
5	-1,69967E-07	-1,69E-07	0,57	-1,01E-06	-7,25E-06	2,84
6	-1,42954E-07	-1,41E-07	1,60	-1,24E-06	-8,89E-06	2,73
7	-1,11034E-07	-1,09E-07	2,24	-1,43E-06	-1,03E-05	2,65
8	-7,966E-08	-7,76E-08	2,69	-1,59E-06	-1,15E-05	2,62
9	-5,08725E-08	-4,94E-08	2,94	-1,71E-06	-1,23E-05	2,56
10	-2,46778E-08	-2,39E-08	3,08	-1,78E-06	-1,28E-05	2,58
11	-3,09897E-20	1,65E-18	0,00	-1,81E-06	-1,30E-05	2,56
12	2,46778E-08	2,39E-08	3,08	-1,78E-06	-1,28E-05	2,58
13	5,08725E-08	4,94E-08	2,94	-1,71E-06	-1,23E-05	2,56
14	7,966E-08	7,76E-08	2,69	-1,59E-06	-1,15E-05	2,62
15	1,11034E-07	1,09E-07	2,24	-1,43E-06	-1,03E-05	2,65
16	1,42954E-07	1,41E-07	1,60	-1,24E-06	-8,89E-06	2,73
17	1,69967E-07	1,69E-07	0,57	-1,01E-06	-7,25E-06	2,84
18	1,82329E-07	1,84E-07	0,80	-7,57E-07	-5,46E-06	2,94
19	1,66628E-07	1,71E-07	2,27	-4,98E-07	-3,59E-06	2,72
20	1,09095E-07	1,14E-07	3,88	-2,43E-07	-1,72E-06	1,12
21	0	2,23E-17	0,00	0	-9,31E-17	0,00



**Висновки:** Комбінація метода “прямих” з узагальненим проекційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова підвищує точність розрахунку, спрощує процес редукції диференціальних рівнянь. Зникає проблема врахування законтурних прямих (точок), що є недоліком класичного підходу методу “прямих”. При порівнянні з даними, отримані в програмному комплексі ANSYS, найбільша відносна похибка не перевищує 4%.

### Література

1. Никифоров С.Н. Теория упругости и пластичности. - М.: Гослитиздат по строительству и архитектуре. 1955.г.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966.г.
3. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, изд. 3-е. – М.: Гостехиздат, 1949.
4. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник, вип. 36. – К.: КНУБА, 2010. – С. 413 – 423.
5. Чибіряков В. К. , Станкевич А. М. , Левківський Д. В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник, вип. 46. – К.: КНУБА, 2013. – С. 613 – 624.
6. Станкевич А.М., Левківський Д.В. Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом «прямих»// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник, вип. 49. – К.: КНУБА, 2013. – С. 509–521.

### Аннотация

В данной работе рассматривается методика определения напряженно-деформированного состояния балки-стенки с помощью комбинации метода «прямых» и проекционного метода Бубнова-Галеркина-Петрова. Для численного решения редуцированных уравнений задачи применяют метод дискретной ортогонализации С.К.Годунова. На примере показано сходимость полученных результатов с методом конечных элементов.

### Abstract

This paper describes a technique for determining the stress-strain state of the beam-to-wall construction using a combination of the "straight lines" method and the projection method of Bubnov-Galerkin-Petrov. The numerical solutions of the reduced equations is solved using the method of discrete orthogonalization S.K.Godunov. The example shows the convergence of the results obtained with "straight lines" method, and the finite elements method.