УДК 711:004.5

Мамедов Т.А.,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ, ЩО ОПИСУЮТЬ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ШУМУ В МІСТОБУДІВНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Наводяться математичні моделі, за допомогою яких можна описати поширення шуму для різних містобудівних ситуацій: двовимірний та тривимірний випадок.

Ключові слова: *імпеданс, щільність середовища, дифракція, рефракція, інтерференція, градієнт.*

Вступ. Процес розповсюдження шуму є надзвичайно складним, так як він супроводжується цілим рядом фізичних явищ, які всіляко впливають на змінення рівня шуму на шляху його розповсюдження. Можна виділити основні фактори – дивергенція та згасання звуку. Суть дивергенції полягає в зменшенні рівня звуку внаслідок розбіжності хвиль при їх безперешкодному розповсюдженню в середовищі. Затухання будемо розуміти, як спад рівня звуку внаслідок поглинення хвиль в середовищі.

В умовах розповсюдження шуму в житловій забудові крім названих явищ слід урахувати ще інтерференцію, відбиття від споруди, дифракцію, рефракцію, напрямок вітру, імпеданс по поверхні, нахил поверхні, а також місцезнаходження та конфігурація споруд.

Інтерференція виникає насамперед при взаємодії звукових хвиль з поверхнею землі та при відбитті від споруд.

Суть дифракції можна пояснити основуючись на принципі Гюгенса: «Кожна точка фронту втікаючої хвилі є точковим джерелом нової елементарної хвилі».

Значний вплив на розповсюдження звукових хвиль має напрямок вітру, зміна швидкості вітру та температура повітря в залежності від висоти над поверхнею землі. Швидкість розповсюдження звукової хвилі дорівнює векторній сумі швидкості в стійкому повітрі та швидкості вітру. Тому при попутному вітрі спостерігається переломлення звукових хвиль вниз. Інакше, рефракція відбувається зі спрямуванням вверх.

Планувальна структура забудови є фактором, який істотно впливає на розповсюдження звукових хвиль. На даний момент не існує методів, за допомогою яких можна було б описати явище дифракції при проходженні звукових хвиль через екрані складної конфігурації.

Нахил території забудови визначає форму поверхні. Очевидно, що складна форма поверхні призводить до труднощів при урахуванні інтерференції звукових хвиль.

Дещо про фізичні величини. Чутний звук – це механічне збудження часток в пружньому середовищі (в повітрі), яке сприймається людським слухом (16 гц $< F < 16$ кгц).

Шум характеризується тим, що має стохастичну залежність між звуковим тиском і часом. Фізичної різниці між шумом й звуком немає; вони утворюються по однаковим законам.

Звукова хвиля описується, головним чином, трьома характеристиками:

- звуковий тиск p – це незначне динамічне змінення статистичного тиску повітря.
- вектор коливальної швидкості v – його можна зообразити, як похідну від ветора часу миттєвого зсунення часток системи.
- вектор інтенсивності звуку I – характеризує звукову потужність, що проходить через одиничний елемент.

Основні параметри звукової хвилі мають зв'язок з середовищем, в якому звук розповсюджується через хвильовий опір середовища:

$$z = \rho \cdot c$$

де ρ – щільність середовища, c – швидкість звуку. Для повітря при нормальних атмосферних умовах $z = 408\,\text{Нс/м}^2$.

Хвильовий тиск залежить від температури повітря та статичного тиску. Зі звуковим тиском, коливальною швидкістю інтенсивності звуку він пов'язаний наступними рівняннями:

$$p = z \cdot v$$

$$I = p \cdot v = v^2 \cdot z = p^2/z$$

Але частіше використовують середні значення по часу квадрату звукового тиску $\overline{p^2}$ та ефективні значення $\tilde{p}$:

$$\overline{p^2} = \frac{1}{T_0} \int_0^T p^2(t)dt$$

$$\tilde{p} = \sqrt{\overline{p^2}}$$

де T – це час усереднення; t – поточний момент часу.

Математичні моделі. Ми будемо розглядати модельну задачу, коли в просторі є локальне точкове джерело з координатами x_0, y_0, z_0 і воно випромінює шум з різними частотами ω_k $(k = \overline{1, n})$. Кожній частоті відповідає амплітуда $A(\omega_k)$. Оскільки задача, яку ми розглядаємо, лінійна, то достатньо буде знайти рішення для однієї частоти, а потім за допомогою суперпозиції визначити рішення для інших частот. Нехай частота ω_k подає в тиск p вклад $p_k(x, y, z, t)$. Будемо вважати режим періодичним і тоді $p_k(t)$ буде мати вигляд:

$$p_k(x, y, z, t) = A(\omega_k) e^{i \cdot \omega_k \cdot t} \cdot U_k(x, y, z)$$

Тиск p_k задовольняє рівнянню Гельмогольца:

$$\Delta p_k = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p_k}{\partial t^2} + F_t$$

де a^2 – швидкість звуку.

Підставляючи останнє рівняння в передостаннє, для $U(x, y, z)$ ми отримуємо таке рівняння:

$$\Delta U + \frac{\omega_k^2}{a^2} \cdot p_k = \delta\big((x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)\big)$$

де δ – функція Дірака, що відповідає щільності точкового джерела.

Розглядаємо три типи екранів, причому всі ці екрани жорсткі, тому градієнт тиску на них дорівнює нулю:

1. Двовимірний випадок:

Для цього випадку при $x \geq 0, y = 0, z = 0$ ми будемо мати такий розв\`язок:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-A}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \frac{\cos \lambda \sqrt{R^2 + U^2}}{4\pi \sqrt{R^2 + U^2}} du +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-A}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \frac{\cos \lambda \sqrt{\overline{R^2} + U^2}}{\sqrt{\overline{R^2} + U^2}} du$$

де:

$$\lambda = \omega_k / a$$

$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\bar{R} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos[(\varphi + \varphi_0)/2]}$$

2. Тривимірний випадок (без врахування відбиття від землі):

При $x = 0, y \geq 0$:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}\tau^3(R) + \int_0^q \tau^4 \sqrt{R^2 + U^2} du + \frac{1}{2}\tau^3(\bar{R}) + \int_0^{\bar{q}} \sqrt{\overline{R^2} + U^2}\, du$$

де

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$\bar{R} = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$q = 2\sqrt{r\rho} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}$$

$$\bar{q} = 2\sqrt{r\rho} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$$

$$\tau^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\omega_k}{2\pi aR}\right)^{1/2} J_{-1/2} \frac{\omega_k}{2\pi aR}$$

$$\tau^4 = \frac{1}{4} \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{R^2 + U^2}} \cdot N_1 \frac{\omega_k}{a} \sqrt{R^2 + U^2}$$

3. Тривимірний випадок (з врахуванням відбиття від землі):

Розв`язок має такий вигляд (при $x = 0, y \geq 0, z \geq 0$):

$$U(x, y, z) = \frac{\lambda}{8\pi}\Bigg(\int_{-\infty}^{q} \frac{N_1\left(\lambda\sqrt{R^2 + U^2}\right)}{\sqrt{R^2 + U^2}} du + \int_{\infty}^{\bar{q}} \frac{N_1\left(\lambda\sqrt{\overline{R^2} + U^2}\right)}{\sqrt{\overline{R^2} + U^2}} du +$$

$$+ \int_{-\infty}^{q} \frac{N_1(\lambda\sqrt{R_*^2 + U^2})}{\sqrt{R_*^2 + U^2}} du + \int_{\infty}^{\bar{q}} \frac{N_1(\lambda\sqrt{\overline{R_*^2} + U^2})}{\sqrt{\overline{R_*^2} + U^2}} du$$

де

$$R_*^2 = r^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho^2 + (z + z_0)^2$$

$$\overline{R_*^2} = r^2 - 2r\rho\cos(\varphi + \varphi_0) + \rho^2 + (z + z_0)^2$$

В цих формулах:

x_0, y_0, z_0, x, y, z – прямокутні координати джерела та відповідно точки дослідження;

$\rho, \varphi_0, r, \varphi$ – полярні координати джерела та відповідно точки дослідження;

R – відстань від джерела шуму до точки дослідження;

J_n – функція Бесселя 1-го роду n-го порядку (функції Бесселя);

N_n – функція Бесселя 2-го роду n-го порядку (функції Неймана).

Висновки: Дані математичні моделі можна використовувати для розв`язку містобудівних задач, наслідком чого є зображення результатів та їх інтерпретація, що має дуже важливе значення. Для кожної з моделей слід вибрати такі частотні інтервали, щоб кожен інтервал достатньо повно охоплював спектр шумів у місті.

Ми знаємо, що розповсюдження шуму – це надзвичайно складний процес, але наведені математичні моделі можуть дати достатньо точні результати при розв`язанні містобудівних задач.

Література

1) Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т. Основи акустики – К. : Наукова думка, 2007. – 640с.
2) Тейлор Р. Шум. Пер. з англ. Д.І. Арнольда – М. : Мир, 1978. – 308с.
3) Скучик Е. Основы акустики. – М. : Мир, 1976. – 520с.
4) Стретт Дж.В. Теория звука. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 504с.

Аннотация

Приводятся математические модели, которые описывают распространение шума для различных градостроительных ситуаций: двумерный и трехмерный случай.

Ключевые слова: импеданс, плотность среды, дифракция, рефракция, интерференция, градиент.

Annotation

The article reviews mathematical models that describe the expansion of noise for different town-planning states: two-dimensional and three-dimensional cases.

Keywords: impedance, density of the environment, diffraction, refraction, interference, gradient.