УДК 519.21

канд. ф-м. наук, доц. Наголкіна З.І.,
Київський національний університет
будівництва і архітектури

ІМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ МАСОПЕРЕНОСУ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПОРИСТИХ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ

Досліджуються деякі властивості розв'язку стохастичного рівняння, яке представляє собою імовірнісну модель процесу масопереносу в пористих будівельних матеріалах.

Ключові слова. Пористі будівельні матеріали, коефіцієнт дифузії, швидкість фільтрації, імовірнісна модель, стохастичне рівняння, метод лінеаризації, рівняння масопереносу.

В сучасних будівельних технологіях широко застосовуються пористі і капілярно-пористі будівельні матеріали. При цьому процеси волого і масо – переносу в цих матеріалах описуються системою рівнянь в частинних похідних. В одновимірному випадку при ізотермічних умовах таке рівняння має вигляд [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1)$$

де $u(t,x)$ – кількість субстанції (маси, вологи) в момент часу t в точці з координатою x. D - коефіцієнт дифузії, v_x - швидкість фільтрації, яка визначається за законом Дарсі.

Чарунки порожнин в пористому середовищі утворюють випадково неоднорідну структуру. Саме тому течія крізь пористе середовище буде хаотичною. Такий хаотичний рух в деяких, найбільш загальних випадках, має імовірнісну математичну модель у вигляді стохастичного диференціального рівняння

$$d\zeta(t) = a(t,\zeta(t))dt + b(t,\zeta(t))dw(t) \qquad (2)$$

$a(t,x)$ – коефіцієнт знесення, який характеризує переміщення частинки субстанції під впливом макроскопічної швидкості і залежить від v_x. $b(t,x)$ - так званий коефіцієнт дифузії, який залежить від D і характеризує флуктуацію зміщення частинки внаслідок хаотичної складової руху. При виконанні певних умов на коефіцієнти рівняння (2) існує єдиний неперервний розв'язок, який є марковським процесом [2]. Згідно із класичною теорією стохастичних диференціальних рівнянь, умовне середнє функціоналу від розв'язку рівняння (2), а саме функція $u(t,x)=E_{t,x}f(\zeta(s))$, $s\ge t$, задовольняє рівнянню в частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (3)$$

Це рівняння в деякому розумінні аналогічне (1). Стохастичне рівняння (2) для (3) виконує роль рівняння для характеристик. Таким чином, досліджуючи властивості (2) можна отримати відповідні властивості (3).

Розглянемо метод мультиплікативної лінеаризації (2). При деяких обмеженнях на коефіцієнти цей метод може бути застосовано і для дослідження розв'язку (3). В роботі [3] було доведено існування мультиплікативного представлення розв'язку (2) вигляду

$$\zeta(t)=P-\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}T(t_{k+1},t_k)S(t_{k+1},t_k)\zeta_0 \qquad (4)$$

де $T(t_{k+1},t_k),S(t_{k+1},t_k)$ - відповідно розрішаючі оператори лінійних рівнянь вигляду

$$\zeta_1(t)=\zeta_{1k}+\int_{t_k}^{t}a_1(s)T(s,t_k)\zeta_{1k}(s)ds+\int_{t_k}^{t}g(s)ds \qquad (5)$$

$$\zeta_2(t)=\zeta_{2k}+\int_{t_k}^{t}b_1(s)S(s,t_k)\zeta_{2k}(s)dw(s)+\int_{t_k}^{t}G(s)dw(s) \qquad (6),$$

де $a_1(s)=a'_x(s,\zeta_{1k}),g(s)=a(s,\zeta_{1k})-a'_x(s,\zeta_{1k})\zeta_{1k}$, (7)

і $b_1(s)=b'_x(s,\zeta_{2k}),G(s)=b(s,\zeta_{2k})-b'_x(s,\zeta_{2k})\zeta_{2k}$, $s\in[t_k,t_{k+1}]$ (8)

Коефіцієнти рівнянь (5) і (6) є перші два члени розкладу в ряд Тейлора коефіцієнтів рівняння (2) на відрізку $[t_k,t_{k+1}]$. Таким чином можливість розкладу (4) забезпечується додатковими умовами на коефіцієнти рівняння (2). Розглянемо теорему.

Теорема. Нехай мають місце умови існування єдиного розв'язку рівняння (2). Крім того, нехай коефіцієнти рівняння (2) мають рівномірно обмежені ліпшецеві похідні першого і другого порядку. Тоді розв'язок рівняння (2) може бути представлено у вигляді (4).

Таким чином, до рівняння (2) застосовується метод мультиплікативної, або покрокової лінеаризації, що дає змогу отримати наближений розв'язок стохастичного диференціального рівняння (2).

Література.

1. Лыков А.В. Тепломассообмен (Справочник). - М.: Энергия, 1971. - 560 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов.” ”, М.: Наука, 1977. - 568 с.
3. Наголкина З.И. Мультипликативные представления решений уравнений переноса. Вопросы технической теплофизики. - К.: Наукова думка, 1984.

Аннотация.

Исследуются некоторые свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, которые представляют собой вероятностную модель явлений переноса в пористых строительных материалах.

Annotation.

Some properties of the solutions of the stochastic equation are considered. This equation is a probability model of the mass transfer process for porous bilding materials.