УДК 514.18 к.т.н. Скочко В.І.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

РІВНЯННЯ ПАРАМЕТРІВ СТАНУ ТА ПОЛОЖЕННЯ В'ЯЗІ, ЩО СПОЛУЧАЄ ВІЛЬНИЙ ТА ЗАКРІПЛЕНИЙ ВУЗЛИ СІТЧАСТОЇ СТРУКТУРИ

Розглядаються принципи побудови рівнянь взаємозв'язку між геометричними й фізичними параметрами в'язей дискретної моделі сітки та параметрами польових структур, які на неї діють, при умові, що дані в'язі з'єднують рухомі та базові (задані як крайові умови) вузли моделі.

Постановка проблеми. Якщо при моделюванні того чи іншого фізичного процесу, явища або об'єкта в якості моделі застосовується дискретний образ у вигляді сітчастої структури, виникає необхідність у встановленні закономірностей, що визначають зв'язок між параметрами в'язей та вузлів цієї структури. Найбільш наочною моделлю сітчастої структури є стрижнева конструкція, в'язі якої працюють лише на стиск або розтяг. Така конструкція передбачає унеможливлення виникнення у її в'язях згинальних моментів та дотичних зусиль, внаслідок того, що усі вузли системи представляють собою шарнірні з'єднання. Результуюча форма такої дискретної системи визначається жорсткістними характеристиками в'язей, величиною вузлових зовнішніх зусиль, а також топологією конструкції й положенням нерухомих (базових) вузлів. Загалом, за кількістю ступенів вільності стрижні зазначеної моделі можна поділити на два типи: 1) ті, що з'єднують два вільні (рухомі) вузли, 2) ті, які сполучають один вільний та один базовий вузли.

Встановивши залежність між параметрами жорсткості усіх в'язей моделі, координатами її вузлів, величинами вузлових навантажень та параметрами польових структур, які визначають величини відповідних навантажень, можна вирішувати оптимізаційні задачі, пов'язані з корегуванням форми стрижневої системи, а також характеру розподілу внутрішніх зусиль.

Аналіз основних досліджень та публікацій. В роботах [1, 2] було викладено основні диференційні залежності між геометричними і фізичними параметрами сітчастих структур та векторних полів, під дією яких ці структури перебувають у стані статичної рівноваги. На основі даних залежностей для стрижнів 1-го типу були побудовані параметричні рівняння стану, що встановлюють зв'язок між жорсткістними характеристиками (параметрами) в'язей, координатами їх вузлів та величинами скалярних потенціалів польових структур, формуючих модель. В найбільш загальному вигляді для довільного стрижня S_aS_b, що сполучає a-й та b-й вільні вузли, параметричні рівняння стану можуть мати наступну форму:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\delta_{a,i}^{2}\cdot\aleph_{a,i}+\chi\cdot\delta_{a,b}^{2}\cdot\aleph_{a,b}+\sum_{j=1}^{n-1}\delta_{b,j}^{2}\cdot\aleph_{b,j}-\left(\varphi_a+\varphi_b\right)+B_{a,b}=0\,, \qquad (1)$$

або:

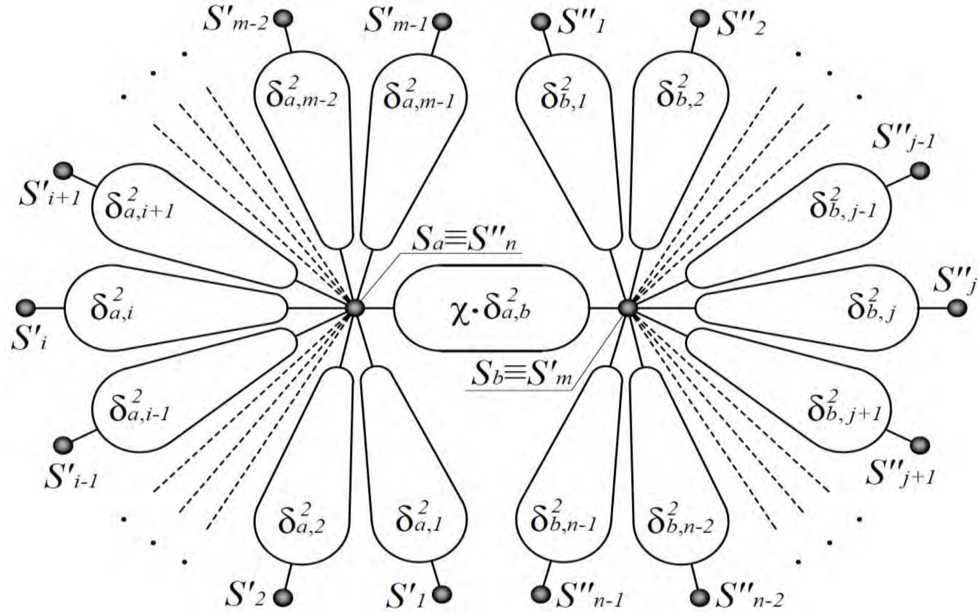
$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\left(\delta_{i,a}^{2}+\left(x_i-x_a\right)\cdot x_b+\left(y_i-y_a\right)\cdot y_b+\left(z_i-z_a\right)\cdot z_b\right)\cdot\aleph_{a,i}\right]+\chi\cdot\delta_{a,b}^{2}\cdot\aleph_{a,b}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(\delta_{j,b}^{2}+\left(x_j-x_b\right)\cdot x_a+\left(y_j-y_b\right)\cdot y_a+\left(z_j-z_b\right)\cdot z_a\right)\cdot\aleph_{b,j}\right]+ \qquad (2)$$
$$+\left(\Im_{xb}\cdot x_a+\Im_{y_b}\cdot y_a+\Im_{zb}\cdot z_a\right)+\left(\Im_{xa}\cdot x_b+\Im_{y_a}\cdot y_b+\Im_{za}\cdot z_b\right)-$$
$$-\left(\varphi_a+\varphi_b\right)+B_{a,b}=0\,,$$

де:

$$\aleph_{i,j}=R_{i,j}\big/\delta_{i,j}\,. \qquad (3)$$

Тут: $\delta_{i,j}$, $R_{i,j}$ та $\aleph_{i,j}$ – довжина в'язі між i-м та j-м вузлами, абсолютна величина зусилля у ній та параметр її жорсткості; $\Im_{x\,i}$, $\Im_{y\,i}$ та $\Im_{z\,i}$ – проекції вектора поля впливу в i-му вузлі; φ_i та G_i – функція скалярного потенціалу векторного поля впливу та константа інтегрування в i-му вузлі; m та n – кількість вузлів суміжних із a-м та b-м вузлами відповідно; $B_{i,j}$ – константа, що є сумарним результатом операцій інтегрування та заміни діагональних елементів матриці коефіцієнтів системи рівнянь типу (1) та (2) на відмінні від $2\cdot\delta_{i,j}$ та нульові відповідно (для підвищення універсальності при використанні рівнянь).

Рівняння (1) та (2) можуть бути зображені у формі обчислювальних шаблонів. Приклад такого шаблону для рівняння (1) показано на рисунку 1.



$$-\left(\varphi_a+\varphi_b\right)+B_{a,b}=0\,.$$

Рис.1. Обчислювальний шаблон, що ілюструє рівняння (1).

Загалом, рівняння (1) та (2) дозволяють змінювати форму сітчастої структури шляхом корегування величин параметрів жорсткості її в'язей. Однак, положення рухомих вузлів усієї моделі визначаються з системи статичних рівнянь рівноваги, й залежать від координат базових вузлів, параметрів жорсткості й величин зовнішніх впливів. Для тривимірних моделей система таких рівнянь рівноваги деякого *a*-го вузла має наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - x_a\right)\cdot \aleph_{a,i} + \Im_{xa} = 0\,, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - y_a\right)\cdot \aleph_{a,i} + \Im_{y_a} = 0\,, \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(z_i - z_a\right)\cdot \aleph_{a,i} + \Im_{za} = 0\,. \qquad (6)$$

Основна частина. Спираючись на принцип побудови параметричних рівнянь стрижнів 1-го типу, викладений у [2], запишемо аналогічні рівняння для стрижнів 2-го типу. Для цього розглянемо стан статичної рівноваги стрижня, який сполучає деякий вільний вузол даної системи S_a із нерухомим вузлом S_{ref} (індексом *ref* позначатимемо фіксовані вузли; *reference point* (*з англ.*) – *базова точка*). Як і раніше користуватимемось принципом вирізання стрижнів та вузлів для одержання рівнянь статичної рівноваги базового вузла S_{ref} та в'язі S_aS_{ref} [3]. Проте, вузол S_{ref} належить не тільки стрижневій системі, а й являється частиною оточуючого середовища, до якого і кріпиться вся сітчаста просторова конструкція. А тому для урівноваження досліджуваного стрижня слід замінити відсічений в околі опорного вузла S_{ref} фрагмент нерухомого середовища (або у фізичному сенсі матеріальної субстанції) на відповідне реакційне зусилля цього середовища $\overline{R}_{ref}$ (рис. 2). Таке зусилля також називають реакцією опори.

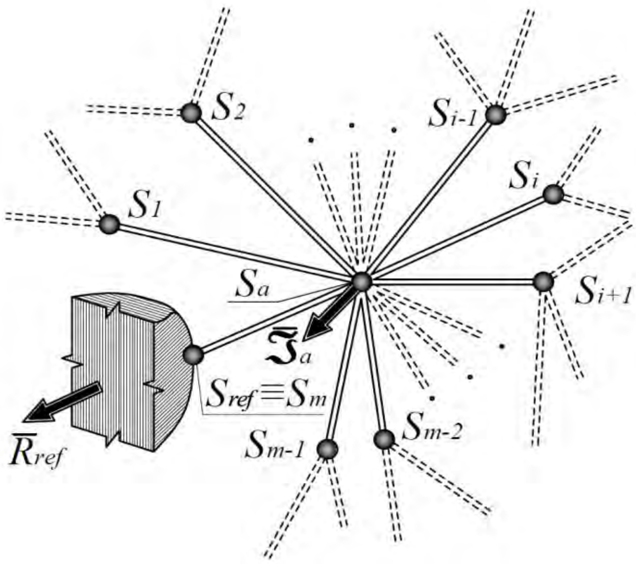


Рис.2. Статична рівновага стрижня, що сполучає вільний та базовий вузли.

Зважаючи на реакцію опори у фіксованому вузлі, запишемо суму усіх зусиль, що діють на даний вузол та стрижень $S_a S_{ref}$ у векторній формі. Відповідно матимемо:

$$\overline{R}_{ref,a}+\overline{R}_{ref}=0\,, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\overline{R}_{a,i}+\overline{R}_{ref}+\overline{\Im}_a=0\,. \tag{8}$$

Проектуючи члени тотожностей (7) та (8) на координатні осі, та враховуючи вираз (3), отримаємо:

для вузла S_{ref}:

$$\left(x_a-x_{ref}\right)\cdot\aleph_{ref,a}+R_{x\,ref}=0\,, \tag{9}$$

$$\left(y_a-y_{ref}\right)\cdot\aleph_{ref,a}+R_{y\,ref}=0\,, \tag{10}$$

$$\left(z_a-z_{ref}\right)\cdot\aleph_{ref,a}+R_{z\,ref}=0\,; \tag{11}$$

для стрижня $S_a S_{ref}$:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left(x_i-x_a\right)\cdot\aleph_{a,i}+\Im_{x\,a}+R_{x\,ref}=0\,, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left(y_i-y_a\right)\cdot\aleph_{a,i}+\Im_{y\,a}+R_{y\,ref}=0\,, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left(z_i-z_a\right)\cdot\aleph_{a,i}+\Im_{z\,a}+R_{z\,ref}=0\,. \tag{14}$$

Скористаємось обома принципами побудови параметричних рівнянь стрижнів 2-го типу.

Якщо досліджувана в’язь належить системі, кількість стрижнів якої не перевищує кількості її вузлів, то шукане рівняння може бути одержане шляхом почергового інтегрування рівностей (4) – (6) та (9) – (11) по координатах вузлів S_a та S_{ref} відповідно з подальшим додаванням результуючих тотожностей. При цьому слід враховувати, що вузол S_m, суміжний з вузлом S_a, співпадає з вузлом S_{ref}, а значить:

$$\aleph_{a,m}=\aleph_{a,ref}\,. \tag{15}$$

В результаті, з урахуванням виразу (15), матимемо:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m-1}\delta_{a,i}^2\cdot\aleph_{a,i}+2\cdot\delta_{a,ref}^2\cdot\aleph_{a,ref}-\varphi_a+\\+\left(R_{x\,ref}\cdot x_{ref}+R_{y\,ref}\cdot y_{ref}+R_{z\,ref}\cdot z_{ref}\right)+D_{a,ref}=0\,,\end{gathered} \tag{16}$$

$$D_{a,ref}=G_a+G_{ref}\,. \tag{17}$$

$D_{a,ref}$ – сумарна константа інтегрування рівностей (4) – (6) та (9) – (11).

Якщо ж кількість в’язей системи більша за кількість її вузлів, то шукане параметричне рівняння одержуватиметься почерговим інтегруванням рівностей (12) – (14) по координатах вузлів S_a та S_{ref} з подальшим додаванням результуючих рівнянь та з урахуванням виразу (15). Отримаємо таку залежність:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left(\delta_{i,a}^{2}+\left(x_i-x_a\right)\cdot x_{ref}+\left(y_i-y_a\right)\cdot y_{ref}+\left(z_i-z_a\right)\cdot z_{ref}\right)\cdot\aleph_{a,i}+$$
$$+\left(\Im_{xa}\cdot x_{ref}+\Im_{y_a}\cdot y_{ref}+\Im_{za}\cdot z_{ref}\right)+\left(R_{xref}\cdot x_a+R_{y_{ref}}\cdot y_a+R_{zref}\cdot z_a\right)+ \qquad (18)$$
$$+\left(R_{xref}\cdot x_{ref}+R_{y_{ref}}\cdot y_{ref}+R_{zref}\cdot z_{ref}\right)-\varphi_a+D_{a,ref}=0\,.$$

Тут $D_{a,ref}$ – те саме, що й в формулі (17).

Рівняння (16) та (18) мають певні обмеження у застосуванні. Перше може застосовуватись лише у випадку, коли кількість вузлів переважає кількість в'язей. А система других рівнянь може бути виродженою при великій кількості елементів стрижневої конструкції. Однак, обидва ці рівняння можуть бути адаптовані для будь-якого рівня складності конструкції, незалежно від її топологічних особливостей [2]. Для цього слід додати до рівностей (16) та (18) відповідні тотожності:

$$\left(\chi-2\right)\cdot\delta_{a,ref}^{2}\cdot\aleph_{a,ref}-H_{a,ref}=0\,, \qquad (19)$$

$$\chi\cdot\delta_{a,ref}^{2}\cdot\aleph_{a,ref}-H_{a,ref}=0\,. \qquad (20)$$

Матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\delta_{a,i}^{2}\cdot\aleph_{a,i}+\chi\cdot\delta_{a,ref}^{2}\cdot\aleph_{a,ref}+ \qquad (21)$$
$$+\left(R_{xref}\cdot x_{ref}+R_{y_{ref}}\cdot y_{ref}+R_{zref}\cdot z_{ref}\right)-\varphi_a+B_{a,ref}=0\,,$$

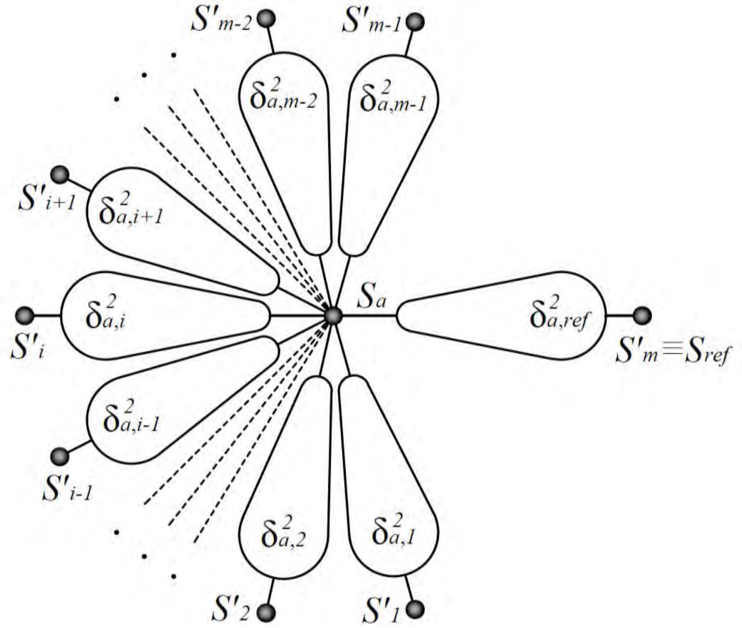
$$\sum_{i=1}^{m-1}\left(\delta_{i,a}^{2}+\left(x_i-x_a\right)\cdot x_{ref}+\left(y_i-y_a\right)\cdot y_{ref}+\left(z_i-z_a\right)\cdot z_{ref}\right)\cdot\aleph_{a,i}+\chi\cdot\delta_{a,ref}^{2}\cdot\aleph_{a,ref}+$$
$$+\left(R_{xref}\cdot x_a+R_{y_{ref}}\cdot y_a+R_{zref}\cdot z_a\right)+\left(\Im_{xa}\cdot x_{ref}+\Im_{y_a}\cdot y_{ref}+\Im_{za}\cdot z_{ref}\right)+ \qquad (22)$$
$$+\left(R_{xref}\cdot x_{ref}+R_{y_{ref}}\cdot y_{ref}+R_{zref}\cdot z_{ref}\right)-\varphi_a+B_{a,ref}=0\,.$$

де:

$$B_{a,ref}=D_{a,ref}-H_{a,ref}\,. \qquad (23)$$

Рівняння (16), (18), (21) та (22), а також процес їх утворення можна проілюструвати у вигляді окремих обчислювальних шаблонів та результатів їх злиття. На рисунку 3 зображено процес побудови обчислювального шаблона еквівалентного рівності (21) для стрижня, що з'єднує вільний S_a та базовий S_{ref} вузли, на основі додавання окремих шаблонів цих вузлів та рівності (19).

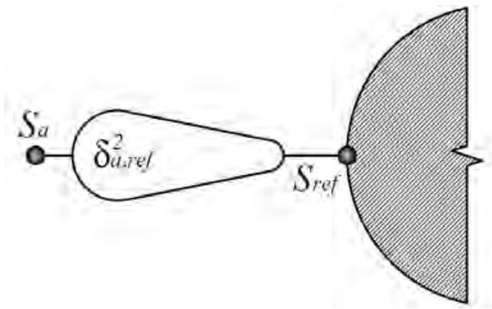
Обчислювальний шаблон для вузла S_a



$$-\varphi_a + G_a = 0$$

+

Обчислювальний шаблон для вузла S_{ref}



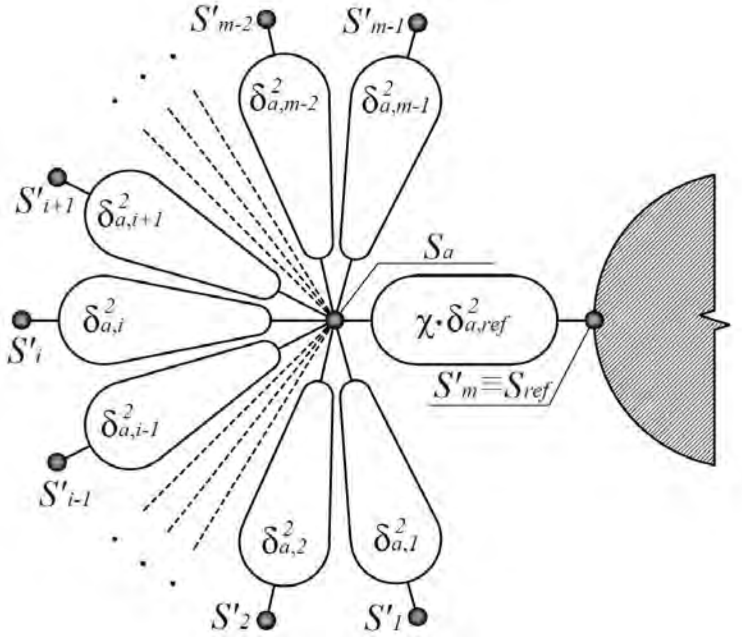
$$+R_{x\,ref}\cdot x_{ref} + R_{y\,ref}\cdot y_{ref} +$$
$$+R_{z\,ref}\cdot z_{ref} + G_{ref} = 0$$

+

$$(\chi - 2)\cdot\delta^2_{a,ref}\cdot\aleph_{a,ref} - H_{a,ref} = 0$$

‖

Обчислювальний шаблон для стрижня S_aS_{ref}



$$+R_{x\,ref}\cdot x_{ref} + R_{y\,ref}\cdot y_{ref} +$$
$$+R_{z\,ref}\cdot z_{ref} - \varphi_a +$$
$$+B_{a,ref} = 0$$

Рис.3. Побудова обчислювального шаблона еквівалентного рівності (21).

Необхідно додати, що адаптація рівнянь (16) і (18) до вигляду (21) і (22) відповідно не несе жодних негативних наслідків при вирішенні оптимізаційних задач, пов'язаних із внесенням коректив до величин або характеру перерозподілу параметрів жорсткості стрижнів по усій конструкції. Це пояснюється тим, що при уточненні цільових функцій не потрібно визначати величини констант інтегрування та заміни членів параметричних рівнянь. Більш того, зазначена адаптація дозволяє уникнути небажаних ефектів, пов'язаних з топологічними особливостями дискретних моделей.

Висновки. При складанні системи параметричних рівнянь для вирішення вище згаданих оптимізаційних задач слід використовувати два типи рівнянь: 1) рівняння типу (1) або (2) для опису поточного стану стрижнів, які сполучають два вільні вузли моделі; 2) рівняння типу (21) або (22) для опису стану стрижнів, які сполучають вільний та базовий вузли.

Список використаних джерел:

1. Скочко В.І. Диференціальні закономірності між геометричними і фізичними параметрами сітчастих структур та полів, що їх врівноважують / В.І. Скочко, Л.О. Скочко // Основи і фундаменти. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 33. – С. 85-95.

2. Скочко В.І. Рівняння параметрів стану та положення в'язей сітчастих структур / В. І. Скочко, Л. О. Скочко // Основи і фундаменти. – К.: КНУБА, 2014. – Вип. 34. – В друці.

3. Скочко В.І. Деякі аспекти опису рівноваги елементів сітчастої структури / В. І. Скочко // Збірник наукових праць: «Будівництво та техногенна безпека». – Сімферополь.: НАПКБ, 2013. – Вип. 48. – С. 172-180.

Аннотация

В работе рассматриваются принципы построения уравнений взаимосвязи между геометрическими и физическими параметрами связей дискретной модели сетки и параметрами полевых структур, действующих на неё, при условии, что данные связи соединяют подвижные и базовые (заданные как краевые условия) узлы модели.

The summary

This article describes the ways to build the equations of relationships between geometrical and physical parameters of the grid's discrete model connections and between the field structures parameters acting on it, providing that these connections join movable and base (defined as the boundary conditions) nodes of this model.