

УДК 539.3

Левківський Д.В.,
Київський національний університет будівництва і архітектури**ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ
ТОВСТОЇ ДВОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ**

Для визначення частот і форм власних коливань двошарової пластини в постановці плоскої деформації використовується дискретно-континуальна модель. Дана модель побудована на основі методу сил. Зниження вимірності виконується методом "прямих" у поєднанні з проєкційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Для чисельної реалізації та формування матриці впливу використовується метод ортогональної прогонки С.К.Годунова. Власні числа та вектори матриці впливу визначаються методом Якобі.

Багатошарові конструкції часто експлуатуються в умовах інтенсивних динамічних навантажень. При розрахунку фундаментів, плит перекриття промислових будівель, покриттів автомобільних доріг і аеродромів динамічний фактор відіграє вирішальну роль. Це імпульсні та ударні навантаження при русі коліс транспортних засобів, ударне навантаження під час посадки літака. Такі впливи можуть призвести до руйнування конструкцій. Тому постає питання підвищити точність розрахунку таких конструкцій, використовуючи комбіновані підходи.

Дана робота є початком дослідження цього напрямку і тому розглядаються лише власні коливання багатошарових систем, але запропонована комбінована методика в подальшому може бути розширена на нестационарні динамічні задачі.

У статті [6] розглядається використання дискретно-континуальної моделі для визначення частот і форм власних коливань товстої одношарової плити. Задача вирішується в постановці плоскої деформації, використовуючи рівняння Нав'є та рівняння узагальненого закону Гука. Для зниження вимірності по висоті пластина розбивається прямими і обираються базисні кусково-лінійні фінітні функції. Детально процес редукції вихідних рівнянь описано в роботах [1, 2]. Граничні умови моделюються вертикальними та горизонтальними стержнями заданої жорсткості. Всі редуковані рівняння записуються в моментах. Редукована система диференціальних рівнянь розв'язується використовуючи метод дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [3]. На наступному етапі формується матриця впливу. Для цього розрахункова модель розбивається по довжині на ділянки (рис.1). У середині кожної ділянки зосереджується її маса. За невідомі величини приймають переміщення, що

характеризують степені вільності зосереджених мас, а динамічні рівняння складаються за алгоритмом метода сил.

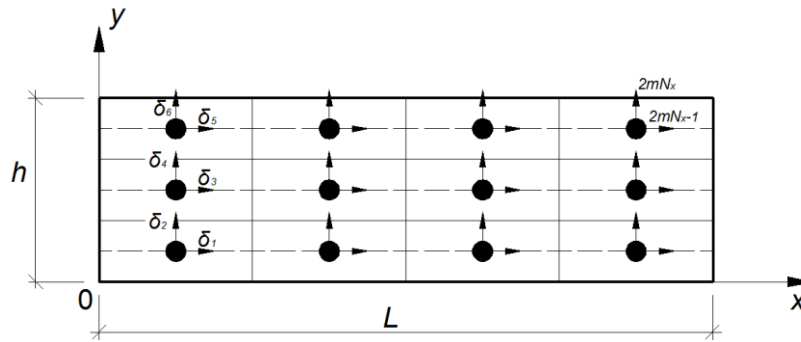


Рис. 1 Дискретно-континуальна модель

В результаті записується рівняння (1).

$$\Pi T \frac{d^2 \vec{Y}}{dt^2} + \vec{Y} = \vec{0} \tag{1}$$

де Π - матриця впливу, T - матриця інерції, в даному випадку діагональна ΠT та позитивно визначена.

Рівняння (1) перетворюється до вигляду:

$$\sqrt{T} \Pi \sqrt{T} \frac{d^2 \vec{Y}^*}{dt^2} + \vec{Y}^* = \vec{0}$$

, де позначено: $\vec{Y}^*(t) = \sqrt{T} \cdot \vec{Y}(t)$ заміна

$$\sqrt{T} \Pi \sqrt{T} = \Pi^*$$

$$\Pi^* \frac{d^2 \vec{Y}^*}{dt^2} + \vec{Y}^* = \vec{0} \tag{2}$$

Матриця Π^* є також симетричною та позитивно визначеною. $\Pi^* = \sqrt{T} \Pi \sqrt{T}$
 В подальшому власні числа та вектори визначаються методом Якобі для матриці Π^* і формується розв'язок рівняння у вигляді (3):

$$\vec{Y}^*(t) = \vec{Y}_0^*(t) \sin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

Для визначення частот та форм власних коливань двошарової конструкцій виконуються аналогічні дії. Двошарова система розглядається як одношарова зі змінним по висоті модулем пружності. По висоті кожен шар пластини розбивається прямими (рис. 2) та обираються базисні функції (рис. 3).

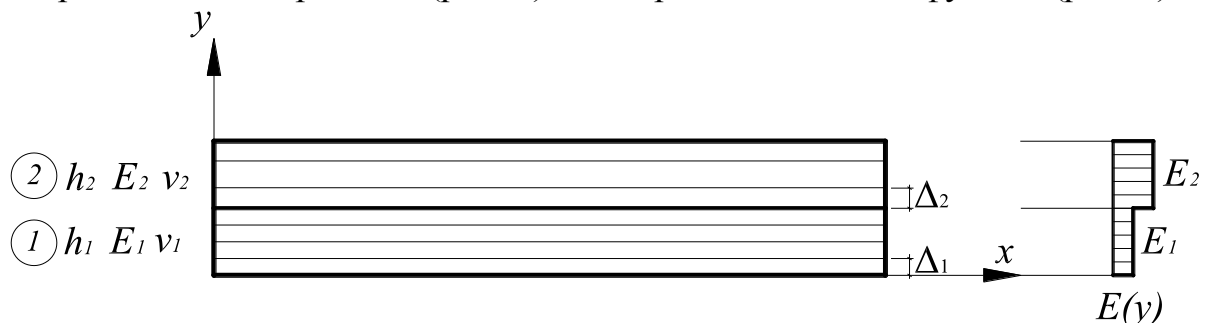


Рис.2 Двошарова пластина (плоска деформація)

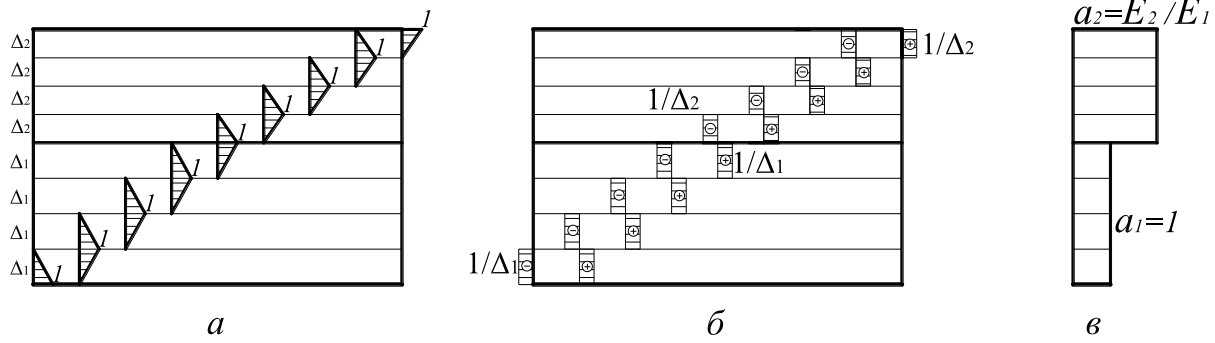


Рис. 3

а) базисні функції; б) похідна від базисних функцій; в) функція зміни модуля пружності

В результаті формується редукована система розв’язувальних рівнянь, які залежать від координати (4), детально процес редукції описано в x роботі [7].

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial u_i^*}{\partial x} &= \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot C1_{ij} \cdot g^{ja} \cdot \sigma_{xa} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot b_{ij} \cdot g^{ja} \cdot v_\alpha^* \\
 \frac{\partial v_i^*}{\partial x} &= C1_{ij} \cdot g^{ja} \cdot \tau_{xy\alpha} - b_{ij} \cdot g^{ja} \cdot u_\alpha^* \\
 \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} &= -\tau_{xy}(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + b_{ji} \cdot g^{ja} \cdot \tau_{xy\alpha} \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X_\alpha \\
 \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} &= -\sigma_y(x, y) \cdot \varphi_i(y) \Big|_0^h + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot b_{ji} \cdot g^{ja} \cdot \sigma_{xa} + \frac{4(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot b_{ji} \cdot g^{jk} \cdot C2_{k\beta} \cdot g^{\beta\alpha} \cdot v_\alpha^* - Y_\alpha \\
 \sigma_y^j &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot g^{ja} \cdot \sigma_{xa} + \frac{4(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \cdot g^{jk} \cdot C2_{k\beta} \cdot g^{\beta\alpha} \cdot v_\alpha^*
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Розглядаються одиничні стани системи, визначаються переміщення відповідних мас та будується матриця впливу. Система диференціальних рівнянь розв’язується методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова, інтегрування виконується методом Рунге-Кутта-Мерсона. В результаті відповідні переміщення мас створюють матрицю впливу.

Маємо задачу на власні числа для симетричної матриці : Π^*
 $(\Pi^* - \lambda E)\vec{Y}_0 = \vec{0}$, де $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$.
 Ця задача розв’язується методом Якобі. Знаходяться власні числа і відповідно частоти власних коливань та ω власні вектори $\vec{Y}_0^*(t)$

На конкретному прикладі перевіримо можливість застосування дискретно-континуальної моделі.

Розглянемо плоску деформацію двошарової пластини. На (рис. 4) показані геометричні та фізико-механічні характеристики шарів. Контакт між шарами вважається абсолютно жорстким. По бічних гранях пластини може бути закріплена шарнірно або жорстким защемленням. Результати були перевірені програмними комплексами Ansys та Nastran. В таблицях (1-3) приведені 5 перших частот власних коливань двошарової системи. Результати показали високу збіжність при збільшенні розбиття на маси по висоті. Розглянуто найбільш оптимальний варіант розбиття системи на маси. Приймається 3 маси по висоті та 10 мас по довжині, кожна маса має 2 степеня вільності.

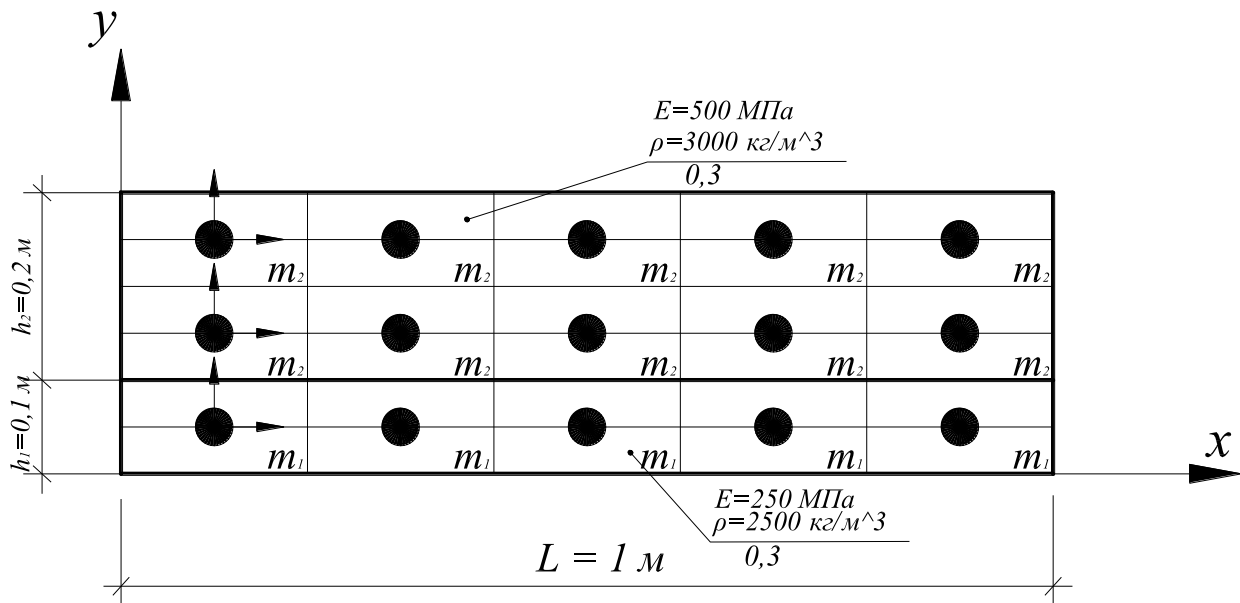


Рис. 4 Розрахункова модель двошарової пластини

Таблиця 1. Частоти власних коливань (Гц)
(жорстке защемлення при $x = 0$ та $x = l$)

	ANSYS	Nastran	Метод прямих
1	25,389	25,389	25,17
2	54,241	54,241	54,28
3	64,018	64,018	58,42
4	87,928	87,928	71,46
5	122,46	122,46	83,39

Таблиця 2. **Частоти власних коливань (Гц)**
(при - жорстке зацмлення, при $x=0$ $x=l$ - вільний край)

	ANSYS	Nastran	Метод прямих
1	4,464	4,464	5,49
2	25,779	25,779	26,42
3	50,355	50,355	31,42
4	65,042	65,042	55,01
5	113,02	113,02	75,40

Таблиця 3. **Частоти власних коливань (Гц)**
(шарнірне закріплення при та $x=0$ $x=l$)

	ANSYS	Nastran	Метод прямих
1	0,00	0,00	0,00
2	14,27	14,27	14,33
3	45,75	45,75	44,55
4	82,70	82,70	100,90
5	120,91	120,91	135,90

Використання дискретно-континуальної моделі для динамічного розрахунку багатошарових пластин дає достатню точність розрахунку і може бути в подальшому використана для розрахунку більш складних систем, дво та тривимірних задач, для визначення вимушених коливань, врахування ударного навантаження.

Література

1. Станкевич А. М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с.413-423.
2. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013 – с.613-624.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171-174.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории

упругости. – М.: Изд. «Наука», 1966 – 709 с.

5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.

6. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Дискретно-континуальна модель для розрахунку товстих пластин на динамічні впливи // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 51 – К.: КНУБА, 2014 – с.678-687.

7. Левківський Д.В. Визначення напружено-деформованого стану двохшарової конструкції методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 50 – К.: КНУБА, 2013 – с.342-356.

Аннотация

Для определения частот и форм собственных колебаний двухслойной пластины в постановке плоской деформации используется дискретно-континуальная модель. Данная модель построена на основе метода сил. Снижение размерности выполняется методом "прямых" в сочетании с проекционным методом Бубнова-Галеркина-Петрова. Для численной реализации и формирования матрицы влияния используется метод ортогональной прогонки С.К. Годунова. Собственные числа и векторы матрицы влияния определяются методом Якоби.

Abstract

To determine the frequency and forms of natural vibrations of a two-layer plate in plane strain formulation using discrete-continuum model. This model is based on the method of forces. Reducing dimension is performed by the "direct" in conjunction with the projection of the Bubnov-Galerkin-Petrov. For the numerical implementation and impact matrix formation using the method of discrete orthogonalization S.K.Godunova. Eigenvalues and vectors of a matrix effect are determined by Jacobi.