УДК 539.3
д.т.н., професор Чибіряков В.К.,
к.т.н., доцент Станкевич А.М., Левківський Д.В., Мельничук В.Ф.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

# ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ БРУСА.

*Запропоновано новий комбінований варіант методу прямих для розв'язання задачі термопружності бруса. Основна ідея полягає у застосуванні для зниження вимірності вихідних рівнянь узагальненого методу Бубнова-Гальоркіна-Петрова, після чого задача реалізується за допомогою ефективного чисельного методу розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь — методу С.К.Годунова. Традиційно у роботі застосовано індексну форму запису, яка широко застосовується в тензорному численні. Запропонована методика має великі перспективи для розв'язання задач динаміки, термопружності та тривимірних задач.*

Одним із найбільш ефективних методів розв'язку багатовимірних задач будівельної механіки є комбінований підхід, за яким задача розв'язується у два етапи — спочатку понижується розмірність вихідних рівнянь, а на другому етапі редукована задача розв'язується аналітично або чисельно.

Традиційно у будівельній механіці пониження розмірності вихідних рівнянь базувалось на певних гіпотезах. Відповідно, перший етап методу виділявся в окреме дослідження — це теорія стержнів, теорія пластин, теорія оболонок. Гіпотези, які застосовувались, були достатньо сильні або менш точні, що призвело до створення різних теорій пластин та оболонок.

Останнім часом пониження розмірності вихідних рівнянь почали виконувати із застосуванням математичних методів (наприклад, теорія оболонок І.Н.Векуа [1]), а разом із наступним розв'язком редукованих рівнянь вважати єдиним комбінованим методом розв'язку задач математичної фізики. До таких методів можна віднести, наприклад, метод Власова-Кантаровича. Такі комбіновані методи є альтернативними у порівнянні із загальними чисельними методами, такими як метод кінцевих елементів, метод кінцевих різниць та варіаційно-різницевий метод. Навіть метод граничних інтегральних рівнянь потрібно віднести до комбінованих методів, тому що у ньому за допомогою певних математичних перетворень також відбувається пониження розмірності вихідних рівнянь задачі на одиницю. Як правило, пониження розмірності (це не стосується методу граничних інтегральних рівнянь) навіть математичними методами пов'язано із геометричними характеристиками об'єктів, що розглядаються. Це значно обмежує геометрію класів задач, для яких можливо застосування комбінованих методів. Але обмеження складності геометрії, з іншого боку, дозволяє застосовувати дуже ефективні чисельні методи. Це у свою чергу підвищує точність та стійкість чисельного розрахунку, та значно скорочує використання машинного часу.

Одним із достатньо відомих методів пониження розмірності вихідних рівнянь є „метод прямих”, у якому по одній координаті застосовуються кінцеві різниці. Цей метод буде ефективним, якщо вихідні рівняння — двовимірні, тому що редуковані рівняння стають системами звичайних диференціальних рівнянь. У випадку сталих коефіцієнтів у цих рівняннях можливий аналітичний розв’язок системи таких рівнянь (Винокуров Л.П. [2], Шкельов Л.Т. [3]). Завдяки цьому метод прямих, в основному, використовували для розв’язку статичних задач для пластин і оболонок сталої товщини.

Авторами цієї роботи пропонується новий варіант пониження розмірності при застосуванні методу прямих, що значно розширює його можливості. Запропонований узагальнений метод прямих поширюється на задачі розрахунку плит змінної товщини, задачі динаміки, застосовується за двома координатами. Основна ідея узагальненого методу прямих полягає у пониженні розмірності вихідних рівнянь за просторовою координатою проекційним методом. Проекційним методом можна вважати, наприклад, метод Бубнова-Гальоркіна, узагальнений Петровим Г.І. [4]. Для товстої пластини сталої товщини, а також задач плоскої деформації (двовимірна задача) за базисні функції по поперечній координаті обираються локально-обмежені кусково-лінійні фінітні функції.

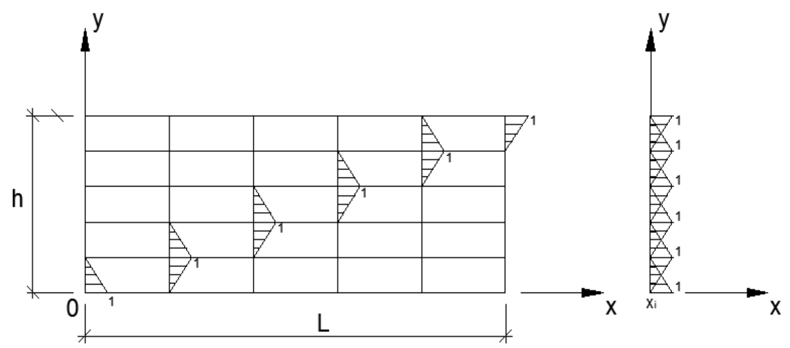


Рис. 1. Базисні функції.

Як і у традиційному варіанті методу прямих, на розрахунковий переріз бруса наносимо $n$ прямих (включаючи дві граничні) із рівним кроком $\Delta$. Але, для пониження розмірності використовуємо не метод кінцевих різниць, а узагальнений метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова. За координатою $y$ невідомі функції, наприклад, $U(x,y)$ наближено шукаємо у вигляді:

$$U(x,y) \approx U^{i}(x) \cdot \varphi_i(y) \tag{1}$$

Отже, як з'ясувалось, побудований алгоритм пониження розмірності формально нагадує алгебраїчні перетворення тензорного числення. У зв'язку з чим в узагальненому методі прямих суттєво використовується тензорна символіка та відповідні правила. Наприклад, за індексами, які повторюються передбачається сумування. Розв'язувальні рівняння (редуковані), відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна, після підстановки наближених співвідношень вигляду (1) множаться скалярно у гільбертовому просторі на базисні функції $\varphi_j(y)$. Це дозволяє нев'язку кожного рівняння звести до нуля.

Потрібно зауважити, що у методі Бубнова-Гальоркіна базисні функції повинні задовольняти однорідні граничні умови за координатою $y$. Хоча дані базисні функції не задовольняють таким умовам, але, відповідно до узагальнення Петрова Г.І. [4], достатньо, щоб ці функції задовольняли природні граничні умови. Також слід зауважити, що при побудові редукованих рівнянь для інтенсивних невідомих (переміщення у теорії пружності) та екстенсивних невідомих (напруження) перетворення відповідних доданків виконується по-різному. При цьому отримуємо дві основні матриці — $G$ та $B$, які в індексній формі записуються так:

$$g_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j), \qquad b_{ij} = (\varphi_i, \frac{d\varphi_j}{dy}).$$

Тут позначено скалярний добуток двох функцій:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^h \varphi_i(y) \cdot \varphi_j(y) dy \tag{2}$$

Для пониження розмірності плоскої задачі теорії пружності перетворення доданків із похідною по $y$ від функції типу переміщення та функції типу напруження виконується по-різному:

$$\left( \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}, \varphi_i(y) \right) = \int_0^h \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \cdot \varphi_i(y) dy = \int_0^h \frac{\partial (U^{j}(x) \cdot \varphi_j(y))}{\partial y} \cdot \varphi_i(y) dy =$$

$$= U^{j}(x) \cdot \int_0^h \varphi'_j(y) \cdot \varphi_i(y) dy = b_{ij} U^{j}(x). \tag{3}$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial y}, \varphi_i(y) \right) = \int_0^h \frac{\partial \sigma_x(x,y)}{\partial y} \cdot \varphi_i(y) dy =$$

$$(\sigma_x(x,y) \cdot \varphi_i(y))\Big|_0^h - \int_0^h \sigma_x(x,y) \cdot \varphi_i'(y) dy =$$

$$(\sigma_x(x,h) \cdot \varphi_n(h) - \sigma_x(x,0) \cdot \varphi_1(0)) - \int_0^h \sigma_x^j(x) \cdot \varphi_j(y) \cdot \varphi_i'(y) dy = \qquad (4)$$

$$(\sigma_x(x,h) \cdot \varphi_n(h) - \sigma_x(x,0) \cdot \varphi_1(0)) - b_{ji} \sigma_x^j(x).$$

Тут $\{b_{ji}\}$ — матриця транспонована від $\{b_{ij}\}$.

Особливістю даного функціонального базису є те, що цей базис не ортогональний, тому, як і у тензорній алгебрі з'являються два типи індексних величин, наприклад $U_i$ та $U^j$. Ці величини відрізняються за правилами перетворення при переході до іншого базису — верхнім індексом позначаються контраваріантні величини, а нижнім — коваріантні. Відповідно, двох індексна величина $\{g^{ij}\}$ є двічі коваріантним метричним тензором, а зворотна матриця $\{g_{ij}\}$ є двічі контраваріантним метричним тензором. Метричний тензор забезпечує перехід від коваріантних к контраваріантним компонентам та навпаки:

$$U_i = g_{ij} U^j; \qquad U^i = g^{ij} U_j. \qquad (5)$$

У зв'язку з тим, що скалярний добуток у даному випадку — це інтеграл від добутку функціональних множників скалярного добутку, то у математиці коваріантні та контраваріантні функціональні величини мають визначені назви. Тому що коваріантні компоненти з'являються у розкладанні по базису (рис. 1.), їх назвали коефіцієнтами. Оскільки коваріантні величини з'являються як скалярні добутки із елементами базису:

$$U_i(x,y) = \left( U(x,y), \varphi_i(y) \right) = \int_0^h U(x,y) \cdot \varphi_i(y) dy,$$

їх будемо називати — моментами.

Отже, редуковані рівняння можна записати у чотирьох видах:

- у моментах, якщо переміщення та напруження у моментах;
- у коефіцієнтах, якщо усі невідомі записані у коефіцієнтах;
- два варіанти комбінованого запису: переміщення у моментах,

напруження у коефіцієнтах або переміщення у коефіцієнтах, напруження у моментах.

Після запису редукованих рівнянь потрібно побудувати редуковані граничні умови та редуковані початкові умови. Далі потрібно сформулювати редуковану крайову або початково-крайову задачу.

Застосуємо запропоновану методику до розв'язання задачі про теплові напруження в брусі прямокутного поперечного перерізу (рис. 2.), які обіймає тривимірну область:

$$\left[0 \le x \le l\right] \times \left\lfloor 0 \le y \le h_y \right\rfloor \times \left[0 \le z \le h_z\right].$$

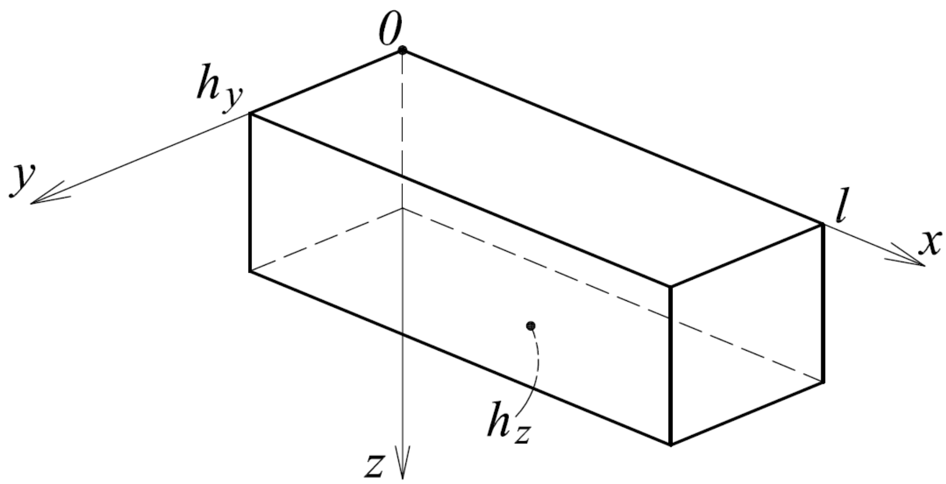


Рис. 2. Брус

Задачу про теплові напруження будемо розглядати у межах важливого розділу теорії пружності — термопружності [5, 6]. У даній задачі розглядаються два фізичних поля — теплове та механічне. Теплове поле у твердих тілах описується рівняннями теплопровідності. У найбільш узагальненому вигляді теплове поле залежить не тільки від трьох просторових координат, а також від часової координати. Відповідна задача про визначення компонент теплового поля, що залежить від часової координати описується рівняннями нестаціонарної теплопровідності. Як систему диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку за просторовими та часовою координатами, ці рівняння записуємо у вигляді:

$$
\begin{cases}
\rho \cdot c \cdot \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial q_y}{\partial y} + \dfrac{\partial q_z}{\partial z} + Q(x, y, z, t), \\
q_x = -\lambda_T \dfrac{\partial T}{\partial x}, \\
q_y = -\lambda_T \dfrac{\partial T}{\partial y}, \\
q_z = -\lambda_T \dfrac{\partial T}{\partial z}.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Тут позначено $T = T(x, y, z, t) -$температурна функція, $q_x, q_y, q_z$ — компоненти теплового потоку $\vec{q}(x, y, z)$, $\rho$ — щільність матеріалу, $c$ — питома теплоємкість, $\lambda$ — коефіцієнт теплопровідності.

Для забезпечення єдиності розв’язку системи (3) потрібно задати початкові та граничні умови. Початкові умови будемо задавати у вигляді: при $t = 0$; $T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z)$, тут $T_0(x, y, z)$ — розподіл температури по усьому об’єму тіла у початковий момент часу.

Граничні умови задачі будемо задавати у вигляді умов конвективного теплообміну при $x = 0, l$.

При $x = 0$: $q_x(0, y, z, t) = -\alpha_{xt}^0 (T_x^0 - T_{xc}^0) - q_{xc}(0, y, z, t)$, (7)
при $x = l$: $q_x(l, y, z, t) = \alpha_{xt}^l (T_x^l - T_{xc}^l) + q_{xc}(l, y, z, t)$.

Тут індексом „$c$” позначено температуру та відомі теплові потоки зовнішньої середи з відповідної частини граничної поверхні бруса.

При $y = 0$: $q_y(x, 0, z, t) = -\alpha_{yt}^0 (T_y^0 - T_{yc}^0) - q_{yc}(x, 0, z, t)$, (8)
при $y = h_y$: $q_y(x, h_y, z, t) = \alpha_{yt}^{h_y} (T_y^{h_y} - T_{yc}^{h_y}) - q_{yc}(x, h_y, z, t)$.
При $z = 0$: $q_z(x, y, 0, t) = -\alpha_{zt}^0 (T_z^0 - T_{zc}^0) - q_{zc}(x, y, 0, t)$, (9)
при $z = h_z$: $q_z(x, y, h_z, t) = \alpha_{zt}^{h_z} (T_z^{h_z} - T_{zc}^{h_z}) + q_{zc}(x, y, h_z, t)$.

У подальших чисельних розрахунках така форма врахування граничних умов дозволяє враховувати на відповідній частині поверхні граничні умови першого роду (якщо $\alpha \Rightarrow \infty$) та граничні умови другого роду (якщо $\alpha \Rightarrow 0$).

Відомо, що зміна у часі температури твердого тіла практично не викликає динамічних ефектів, тому механічні поля (поле переміщень, поле напружень та деформацій) не залежать від часу. Такі стаціонарні поля описуються статичними рівняннями у частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} - X,$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} - Y, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} - Z.$$

$$\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x} = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}\sigma_x - \frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial y} - \frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial z} + \frac{(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}\alpha_t(T-T_0),$$

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial x} = \tau_{xy} - \frac{\partial\tilde{U}}{\partial y}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\tilde{W}}{\partial x} = \tau_{xz} - \frac{\partial\tilde{U}}{\partial z}.$$

Окремо розглядаються рівняння:

$$\sigma_y = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x} + \frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial y} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial z} - \frac{(3\lambda+2\mu)}{\mu}\alpha_t(T-T_0), \tag{12}$$

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial x} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\tilde{V}}{\partial y} + \frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial\tilde{W}}{\partial z} - \frac{(3\lambda+2\mu)}{\mu}\alpha_t(T-T_0), \tag{13}$$

$$\tau_{yz} = \left(\frac{\partial\tilde{W}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{V}}{\partial z}\right). \tag{14}$$

Тут введено позначення: $\tilde{U} = \mu U$; $\tilde{V} = \mu V$; $\tilde{W} = \mu W$.

Граничні умови напружено-деформованого стану в загальному вигляді записуються подібно до роботи [7]. Для побудови граничних умов записуємо суму проекцій усіх силових факторів на відповідну вісь. Наприклад,

при $x = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}}\sigma_x^0 - \frac{k_{xx}^0}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}}U^0 + \frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}}q_{xx}^0 + \frac{k_{xx}^0}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}}\Delta_x^0 = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}\tau_{xy}^0-\frac{k_{xy}^0}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}V^0+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}q_{xy}^0+\frac{k_{xy}^0}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}\Delta_y^0=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}\tau_{xz}^0-\frac{k_{xz}^0}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}W^0+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}q_{xz}^0+\frac{k_{xz}^0}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}\Delta_z^0=0.$$

Аналогічно записуються умови рівноваги на інших гранях бруса. Відмінність запису полягає у зміні верхніх індексів змінних, наприклад, $k_{xx}^l$ — жорсткість пружини у напрямку осі $X$, на площадці перпендикулярній осі $X$, при $x=l$.

Після запису необхідних рівнянь виконується процедура зниження вимірності рівнянь по координатам $y$ та $z$.

Перше рівняння системи (6) скалярно множимо на $\{\varphi_i=\varphi_i(y)\}$ при $i=1,.....,n$ та виконуємо редукування по координаті $y$:

$$\left((\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+Q(x,y,z,t)),\varphi_i(y)\right);$$

$$\frac{\partial q_{xi}}{\partial x}+\delta_{\cdot i}^{n\cdot}\cdot q_y^i(x,z,t)-\delta_{\cdot i}^{1\cdot}\cdot q_y^i(x,z,t)-b_{ji}g^{j\alpha}q_{y\alpha}(x,z,t)+\frac{\partial q_{zi}}{\partial z}-$$
$$-\rho c\frac{\partial T_i}{\partial t}+Q_i(x,z,t)=0. \qquad (15)$$

Наступним кроком є редукування по $z$ рівності (15):

$$\left((\frac{\partial q_{xi}}{\partial x}+\delta_{\cdot i}^{n\cdot}\cdot q_y^i(x,z,t)-\delta_{\cdot i}^{1\cdot}\cdot q_y^i(x,z,t)-b_{ji}g^{j\alpha}q_{y\alpha}(x,z,t)+\frac{\partial q_{zi}}{\partial z}-\right.$$
$$\left.-\rho c\frac{\partial T_i}{\partial t}+Q_i(x,z,t)),\varphi_k(z)\right);$$

$$\frac{\partial q_{xik}}{\partial x}+\left[\delta_{\cdot i}^{n\cdot}\cdot q_{y\cdot k}^{i\cdot}(x,t)-\delta_{\cdot i}^{1\cdot}\cdot q_{y\cdot k}^{i\cdot}(x,t)\right]-b_{ji}g^{j\alpha}q_{y\alpha k}(x,t)+ \qquad (16)$$
$$+\left[\delta_{\cdot k}^{m\cdot}\cdot q_{zi\cdot}^{\cdot k}(x,t)-\delta_{\cdot k}^{1\cdot}\cdot q_{zi\cdot}^{\cdot k}(x,t)\right]-b_{pk}g^{ps}q_{zis}(x,t)-\rho c\frac{\partial T_{ik}}{\partial t}+Q_{ik}(x,t)=0$$

Потрібно зауважити, що індекси $i,j,\alpha,\beta,\gamma$ — відповідають за редукування по координаті $y$, а індекси $k,p,s,\varepsilon,\phi$ — за редукування по координаті $z$; $n$ — кількість прямих вздовж осі $y$, а $m$ — вздовж осі $z$.

Отже, враховуючи зазначене, маємо:

$$\left[\delta^{n\cdot}_{\cdot i}\cdot q^{\;i\cdot}_{y\cdot k}-\delta^{1\cdot}_{\cdot i}\cdot q^{\;i\cdot}_{y\cdot k}\right]=\begin{bmatrix}-q^{\;1\cdot}_{y\cdot k}\\0\\\vdots\\0\\q^{\;n\cdot}_{y\cdot k}\end{bmatrix};\qquad\left[\delta^{m\cdot}_{\cdot k}\cdot q^{\;\cdot k}_{zi\cdot}-\delta^{1\cdot}_{\cdot k}\cdot q^{\;\cdot k}_{zi\cdot}\right]=\begin{bmatrix}-q^{\;\cdot 1}_{zi\cdot}\\0\\\vdots\\0\\q^{\;\cdot m}_{zi\cdot}\end{bmatrix}.$$

Після врахування граничних умов (8), (9) отримуємо:

$$\left[\delta^{n\cdot}_{\cdot i}\cdot q^{\;i\cdot}_{y\cdot k}-\delta^{1\cdot}_{\cdot i}\cdot q^{\;i\cdot}_{y\cdot k}\right]=\begin{bmatrix}\alpha^{\;0}_{yt}\cdot T^{\;1\cdot}_{y\cdot k}\\0\\\vdots\\0\\\alpha^{\;h_y}_{yt}\cdot T^{\;n\cdot}_{y\cdot k}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha^{\;0}_{yt}\cdot T^{\;1\cdot}_{yc\cdot k}\\0\\\vdots\\0\\\alpha^{\;h_y}_{yt}\cdot T^{\;n\cdot}_{yc\cdot k}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q^{\;1\cdot}_{yc\cdot k}\\0\\\vdots\\0\\-q^{\;n\cdot}_{yc\cdot k}\end{bmatrix},$$

$$\left[\delta^{\cdot m}_{i\cdot}\cdot q^{\;\cdot k}_{zi\cdot}-\delta^{\cdot 1}_{i\cdot}\cdot q^{\;\cdot k}_{zi\cdot}\right]=\begin{bmatrix}\alpha^{\;0}_{zt}\cdot T^{\;\cdot 1}_{zi\cdot}\\0\\\vdots\\0\\\alpha^{\;h_z}_{zt}\cdot T^{\;\cdot m}_{zi\cdot}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha^{\;0}_{zt}\cdot T^{\;\cdot 1}_{zci\cdot}\\0\\\vdots\\0\\\alpha^{\;h_z}_{zt}\cdot T^{\;\cdot m}_{zci\cdot}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}q^{\;\cdot 1}_{zci\cdot}\\0\\\vdots\\0\\-q^{\;\cdot m}_{zci\cdot}\end{bmatrix}.$$

Введемо такі позначення:

$$T\alpha^{\;i\cdot}_{y\cdot k}=\begin{bmatrix}\alpha^{\;0}_{yt}\cdot T^{\;1\cdot}_{y\cdot k}\\0\\\vdots\\0\\\alpha^{\;h_y}_{yt}\cdot T^{\;n\cdot}_{y\cdot k}\end{bmatrix};\quad TC^{\;i\cdot}_{y\cdot k}=\begin{bmatrix}\alpha^{\;0}_{yt}\cdot T^{\;1\cdot}_{yc\cdot k}\\0\\\vdots\\0\\\alpha^{\;h_y}_{yt}\cdot T^{\;n\cdot}_{yc\cdot k}\end{bmatrix};\quad q^{\;i\cdot}_{yc\cdot k}=\begin{bmatrix}q^{\;1\cdot}_{yc\cdot k}\\0\\\vdots\\0\\-q^{\;n\cdot}_{yc\cdot k}\end{bmatrix};$$

$$T\alpha_{zi\cdot}^{\cdot k}=\begin{bmatrix}\alpha_{zt}^{0}\cdot T_{zi\cdot}^{\cdot 1}\\0\\\vdots\\0\\\alpha_{zt}^{h_z}\cdot T_{zi\cdot}^{\cdot m}\end{bmatrix};\quad TC_{zi\cdot}^{\cdot k}=\begin{bmatrix}\alpha_{zt}^{0}\cdot T_{zci\cdot}^{\cdot 1}\\0\\\vdots\\0\\\alpha_{zt}^{h_z}\cdot T_{zci\cdot}^{\cdot m}\end{bmatrix};\quad q_{zci\cdot}^{\cdot k}=\begin{bmatrix}q_{zci\cdot}^{\cdot 1}\\0\\\vdots\\0\\-q_{zci\cdot}^{\cdot m}\end{bmatrix}.$$

Враховуючи введені позначення отримуємо редуковане рівняння:

$$\frac{\partial q_{xik}}{\partial x}+\left[g^{i\alpha}\cdot T\alpha_{y\alpha k}-g_{k\varepsilon}\cdot TC_{y}^{i\varepsilon}+g^{i\alpha}\cdot q_{yc\alpha k}\right]-b_{ij}g^{j\alpha}q_{y\alpha k}+$$

$$+\left[g^{k\varepsilon}\cdot T\alpha_{zi\varepsilon}-g_{i\alpha}\cdot TC_{z}^{\alpha k}+g^{k\varepsilon}\cdot q_{zci\varepsilon}\right]-b_{pk}g^{ps}q_{zis}-\rho c\frac{\partial T_{ik}}{\partial t}+Q_{ik}=0.$$

Аналогічно виконуємо редукування решти рівнянь системи (6).

$$q_{xik}=-\lambda_T\frac{\partial T_{ik}}{\partial x};$$

$$q_{yik}=-\lambda_T b_{ij}g^{j\alpha}T_{\alpha k}(x,t);$$

$$q_{zik}=-\lambda_T b_{ip}g^{ps}T_{sk}(x,t).$$

Після підстановки у попереднє рівняння остаточно маємо:

$$-\lambda_T\frac{\partial^2 T_{ik}}{\partial x^2}+\left[g^{i\alpha}T\alpha_{y\alpha k}-g_{k\varepsilon}TC_{y}^{i\varepsilon}+g^{i\alpha}q_{yc\alpha k}\right]+\lambda_T b_{ij}g^{j\alpha}b_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}T_{\gamma k}+$$

$$\left[g^{k\varepsilon}T\alpha_{z\varepsilon i}-g_{i\alpha}TC_{z}^{\alpha k}+g^{k\varepsilon}q_{zc\varepsilon i}\right]+\lambda_T b_{ip}g^{ps}b_{s\phi}g^{\phi\varepsilon}T_{\varepsilon k}-\rho c\frac{\partial T_{ik}}{\partial t}+Q_{ik}=0$$

Редуковані початкові умови записуємо так: $T_{ik}(x,0)=T_{ik}^{0}(x)$.

Наступний етап полягає у редукуванні рівнянь (10)-(11), в які підставляємо вирази (12) – (14) для $\sigma_z$, $\sigma_y$, $\tau_{yz}$.

$$\frac{d\tilde{U}_{ik}}{dx}=\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}\sigma_{xik}-\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}b_{ij}g^{j\alpha}\tilde{V}_{\alpha k}-$$

$$-\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)}b_{kp}g^{ps}\tilde{W}_{is}+\frac{(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}\alpha_t(T_{ik}-T_{ik}^{0});\qquad(17)$$

$$\frac{d\tilde{V}_{ik}}{dx} = \tau_{xyik} - b_{ij} g^{j\alpha} \tilde{U}_{\alpha k} \; ; \tag{18}$$

$$\frac{d\tilde{W}_{ik}}{dx} = \tau_{xzik} - b_{kp} g^{ps} \tilde{U}_{is} \; ; \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\sigma_{xik}}{dx} = -b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha k} + b_{pk} g^{ps} \tau_{xzis} - \left[ \delta^{n\cdot}_{\cdot i} \tau_{xy\cdot k}^{\;\; i\cdot} - \delta^{1\cdot}_{\cdot i} \tau_{xy\cdot k}^{\;\; i\cdot} \right] - \\ - \left[ \delta^{m\cdot}_{\cdot k} \tau_{xyi\cdot}^{\;\;\cdot k} - \delta^{1\cdot}_{\cdot k} \tau_{xyi\cdot}^{\;\;\cdot k} \right] - X_{ik} \; ;\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\tau_{xyik}}{dx} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha k} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \tilde{V}_{ik} + \\ + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \left[ b_{ji} g^{j\alpha} \right] \cdot \left[ b_{kp} g^{ps} \right] \tilde{W}_{\alpha s} - \frac{2(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \alpha_t (T_{\alpha k} - T^0_{\alpha k}) + \\ + b_{pk} g^{ps} b_{s\phi} g^{\phi\varepsilon} \tilde{V}_{i\varepsilon} + \left[ b_{pk} g^{ps} \right] \cdot \left[ b_{ij} g^{j\alpha} \right] \tilde{W}_{\alpha s} - \\ - \left[ \delta^{n\cdot}_{\cdot i} \sigma_{y\cdot k}^{\; i\cdot} - \delta^{1\cdot}_{\cdot i} \sigma_{y\cdot k}^{\; i\cdot} \right] - \left[ \delta^{m\cdot}_{\cdot k} \tau_{xzi\cdot}^{\;\;\cdot k} - \delta^{1\cdot}_{\cdot k} \tau_{xzi\cdot}^{\;\;\cdot k} \right] - Y_{ik} \; ;\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\tau_{xzik}}{dx} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} b_{pk} g^{ps} \sigma_{xis} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{pk} g^{ps} b_{s\phi} g^{\phi\varepsilon} \tilde{W}_{i\varepsilon} + \\ + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu} \left[ b_{pk} g^{ps} \right] \cdot \left[ b_{ij} g^{j\alpha} \right] \tilde{V}_{\alpha s} - \frac{2(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu} \alpha_t b_{pk} g^{ps} (T_{is} - T^0_{is}) + \\ + \left[ b_{ji} g^{j\alpha} \right] \cdot \left[ b_{kp} g^{ps} \right] \tilde{V}_{\alpha s} + b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} \tilde{W}_{\alpha k} - \\ - \left[ \delta^{n\cdot}_{\cdot i} \tau_{yz\cdot k}^{\;\; i\cdot} - \delta^{1\cdot}_{\cdot i} \tau_{yz\cdot k}^{\;\; i\cdot} \right] - \left[ \delta^{m\cdot}_{\cdot k} \sigma_{zi\cdot}^{\;\;\cdot k} - \delta^{1\cdot}_{\cdot k} \sigma_{zi\cdot}^{\;\;\cdot k} \right] - Z_{ik} \; .\end{gathered} \tag{22}$$

Редуковані граничні умови напружено-деформованого стану бруса при $x = 0$ матимуть такий вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(k^0_{xx})^2}} \sigma^0_{xik} - \frac{k^0_{xx}}{\sqrt{1+(k^0_{xx})^2}} \tilde{U}^0_{ik} + \frac{1}{\sqrt{1+(k^0_{xx})^2}} q^0_{xxik} + \frac{k^0_{xx}}{\sqrt{1+(k^0_{xx})^2}} \Delta^0_{xik} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}\tau_{xyik}^0-\frac{k_{xy}^0}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}\tilde{V}_{ik}^0+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}q_{xyik}^0+\frac{k_{xy}^0}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}}\Delta_{yik}^0=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}\tau_{xzik}^0-\frac{k_{xz}^0}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}\tilde{W}_{ik}^0+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}q_{xzik}^0+\frac{k_{xz}^0}{\sqrt{1+(k_{xz}^0)^2}}\Delta_{zik}^0=0;$$

аналогічний вигляд граничних умов при $x=l$:

$$-\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^l)^2}}\sigma_{xik}^l-\frac{k_{xx}^l}{\sqrt{1+(k_{xx}^l)^2}}\tilde{U}_{ik}^l+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^l)^2}}q_{xxik}^l+\frac{k_{xx}^l}{\sqrt{1+(k_{xx}^l)^2}}\Delta_{xik}^l=0,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^l)^2}}\tau_{xyik}^l-\frac{k_{xy}^l}{\sqrt{1+(k_{xy}^l)^2}}\tilde{V}_{ik}^l+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^l)^2}}q_{xyik}^l+\frac{k_{xy}^l}{\sqrt{1+(k_{xy}^l)^2}}\Delta_{yik}^l=0,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xz}^l)^2}}\tau_{xzik}^l-\frac{k_{xz}^l}{\sqrt{1+(k_{xz}^l)^2}}\tilde{W}_{ik}^l+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xz}^l)^2}}q_{xzik}^l+\frac{k_{xz}^l}{\sqrt{1+(k_{xz}^l)^2}}\Delta_{zik}^l=0.$$

Після запису редукованих рівнянь та граничних умов задача чисельно реалізується за допомогою методу ортогональної прогонки С.К.Годунова [8]. Диференціальні рівняння у частинних похідних розв'язуються за допомогою методу Рунге-Кутта-Мерсона. Для програмування використовується FORTRAN та визначаються переміщення, напруження і температура у точках бруса.

**Висновок:**

Запропонований варіант використання модифікованого методу прямих суттєво збільшує точність та збіжність результатів розрахунку, знята проблема запису граничних умов, що дозволяє коректно формулювати та розв'язувати задачі динаміки, термопружності та тривимірні задачі.

**Список літератури:**

1. И.Н. Векуа. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. - М.: Наука, 1982. — 288 с.
2. Л.П. Винокуров. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. - Харьков. Изд—во Харьк. ун—та, 1956. — 279 с.

3. Л.Т. Шкелёв, А.Н. Станкевич, Д.В. Пошивач. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: Монография. — К.:КНУСА, 2004. — 136 с.

4. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970 – 512 с.

5. А.Д. Коваленко. Основы термоупругости. - К.: Наукова думка, 1970. — 308 с.

6. А.Д. Коваленко. Термоупругость. Учебное пособие. - К.: Вища школа, 1875. — 215 с.

7. А.М. Станкевич, В.К. Чибіряков, Л.Т. Шкельов. Метод прямих у просторовій задачі теорії пружності// Науково-технічний збірник „Опір матеріалів і теорія споруд”, 2011. — випуск №88, —с. 24—36.

8. С.К. Годунов. Решение систем линейных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. — 177 с.

**Аннотация**

Авторами работы предложен новый вариант комбинированного метода прямых для решения задачи термоупругости бруса. Основная идея состоит в использовании обобщенного метода Бубнова—Галёркина—Петрова для понижения размерности исходных уравнений, после чего задача решается с помощью эффективного численного метода – С. К. Годунова. Традиционно в работе используется индексная форма записи, широко применяющаяся в тензорном исчислении. Предложенная методика имеет большие перспективы при решении задач динамики, термоупругости и пространственных задач.

**Annotation**

The authors of this paper proposed a new combined version of method of lines for solving thermoelastic beam. The basic idea is to apply the generalized method Bubnonova-Galerkina-Petrova for lowering dimensionality of output equations. After that, task is implemented using efficient numerical method for solving boundary value problems for ordinary differential equations – method Godunova. In the work applied indexes form of notation, which is widely used in tensor calculus. The proposed method has great prospects for solving dynamic, thermoelasticity and three-dimensional tasks.