

УДК 539.3

к. ф.-м. н., доцент Бернакевич І.Є., Вагін П.П.,  
Львівський національний технічний університет імені Івана Франка,  
Ужегов С.О.,  
Луцький національний технічний університет

## РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БУДІВЕЛЬНИХ СПОРУД НА ОСНОВІ УТОЧНЕНИХ ТЕОРІЙ ОБОЛОНОК

*Розглядається задача визначення напруженого стану оболонкових будівельних конструкцій на основі уточненої теорії оболонок, з врахуванням деформацій зсуву та стиснення. Наведено розрахунок напружень в баштах, що мають катеноїдну форму.*

**Ключові слова:** напруження, напружено-деформований стан, розрахунок, оболонка, поверхня

**Вступ.** Проектування елементів будівельних конструкцій передбачає розв'язування задач визначення напружено-деформованого стану (НДС) оболонок, які можуть мати різноманітну геометричну форму і складну фізико-механічну структуру, а також знаходитися під дією нерівномірних силових навантажень. В роботі для визначення НДС використана уточнена теорія оболонок, яка дозволяє розглядати широко розповсюджені в будівництві башт оболонки складної геометрії. Основна особливість застосованого у даній роботі підходу полягає у напівдискретизації вихідної задачі теорії пружності за просторовою змінною, яка визначається нормаллю до серединної поверхні, з метою приведення тривимірної задачі аналізу процесів в пружних тілах до адекватних двовимірних задач, сформульованих на серединній поверхні цього тіла.

**Основні припущення та геометричні характеристики оболонки.** Розглянемо оболонку сталої товщини  $h = \text{const}$ , яка займає обмежену область  $V$  з межею  $S$ . Позначимо одиничний вектор зовнішньої нормалі до  $S$  через  $n$ . Віднесемо серединну поверхню оболонки  $\Omega$  до криволінійної ортогональної системи координат  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  та введемо додатково ортогональну до неї координату  $\alpha_3$  так, що  $-\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq +\frac{h}{2}$ . Позначимо через  $\Gamma$  межу серединної поверхні  $\Omega$ . При введеній параметризації елемент об'єму оболонки  $dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$ , де  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – параметри Ляме, які дорівнюють

$$H_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = A_i(1 + \alpha_3 k_i), \quad i = 1, 2, \quad H_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1. \quad (1)$$

Тут  $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$  і  $k_i = k_i(\alpha_1, \alpha_2)$  ( $i = 1, 2$ ) – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки  $\Omega$  та її головні кривини відповідно.

Нехай оболонка перебуває під дією

- поверхневого навантаження  $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i(\alpha)\}_{i=1}^3$ , прикладеного до поверхні  $S_\sigma = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ;
- поверхневого навантаження  $\hat{\tau} = \{\hat{\tau}_t(\alpha, \alpha_3), \hat{\tau}_s(\alpha, \alpha_3), \hat{\tau}_n(\alpha, \alpha_3)\}^T$ , заданого на частині  $\Sigma_\sigma$  поверхні  $\Sigma$ , причому  $\Sigma_\sigma = \Gamma_\sigma \times ]-h/2, h/2[$ ,  $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$ ;
- масових сил  $f(\alpha, \alpha_3) = \{f_i(\alpha, \alpha_3)\}_{i=1}^3$  в області  $V$ , де  $\hat{\tau}_t, \hat{\tau}_s, \hat{\tau}_n$  – нормальна, дотична та перерізуюча складові прикладеного до  $\Sigma_\sigma$  поверхневого навантаження (тут  $t, s, n$  – орти правої трійки криволінійних координат).  
На решті бічної поверхні  $\Sigma_u = \Sigma \setminus \Sigma_\sigma$  задано переміщення  $u|_{\Sigma_u} = \{u_i^s\}_{i=1}^6$ .

**Апроксимація переміщень.** Процес деформування оболонки в розглядуваній системі координат характеризується трьома проекціями  $U_1, U_2, U_3$  вектора повного переміщення точки в напрямках, дотичних до координатних ліній  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в цій точці. З огляду на малу порівняно з іншими характерними розмірами оболонки товщину  $h$ , обмежимося при описі переміщень точок оболонки лише лінійними складовими ряду Тейлора в околі значень  $\alpha_3 = 0$ . Тоді

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2)$$

Тут  $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$  ( $i=1,2,3$ ) описують переміщення точок серединної поверхні  $\Omega$  оболонки, оскільки  $u_i(\alpha_1, \alpha_2) = U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ , а  $\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0)}{\partial \alpha_3}$  ( $i=1,2,3$ )

характеризують залишкові члени ряду Тейлора і визначають кут повороту нормалі незалежно від компонент вектора переміщень точок серединної поверхні. Оскільки  $\gamma_3(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ , то апроксимація (2) припускає зміну довжини елемента нормалі при деформуванні.

Зі співвідношення (2), яке відповідає кінематичній гіпотезі теорії оболонок типу Тимошенка, випливає, що вектор переміщень довільної точки оболонки повністю визначається компонентами вектора переміщень  $u_i(\alpha_1, \alpha_2)$  ( $i=1,2,3$ ) та вектора кутів повороту  $\gamma = \{\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2)\}_{i=1}^3$  нормалі до серединної поверхні оболонки.

**Деформація оболонки.** Компоненти тензора лінійних деформацій  $E_{ij}$  ( $i, j=1,2,3$ ) довільної точки оболонки визначаються через компоненти деформації серединної поверхні за допомогою співвідношень [1,2]

$$\begin{aligned} E_{ii} &= \frac{e_{ii} + \alpha_3 \kappa_{ii}}{1 + \alpha_3 k_i}, & E_{i3} &= \frac{2e_{i3} + \alpha_3 2\kappa_{i3}}{1 + \alpha_3 k_i}, & i &= 1,2, \\ E_{33} &= e_{33}, & E_{12} &= \frac{2e_{12} + \alpha_3 2\kappa_{12}}{(1 + \alpha_3 k_1)(1 + \alpha_3 k_2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\{e_{ij}(u)\}$  та  $\{\kappa_{ij}(u)\}$  – тангенціальні та згинні компоненти тензора деформацій, які визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
e_{ii} &= \frac{\partial_i u_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i} A_i}{A_i A_{3-i}} u_{3-i} + u_3 k_i, & 2e_{i3} &= \gamma_i + \frac{\partial_i u_3}{A_i} - k_i u_i, & i &= 1, 2, \\
e_{33} &= \gamma_3, & 2e_{12} &= \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \frac{u_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \frac{u_2}{A_2}, \\
\kappa_{ii} &= \frac{\partial_i \gamma_i}{A_i} + \frac{\partial_{3-i} A_i}{A_i A_{3-i}} \gamma_{3-i} + \gamma_3 k_i, & 2\kappa_{i3} &= \frac{\partial_i \gamma_3}{A_i}, & i &= 1, 2, \\
2\kappa_{12} &= \frac{k_1}{A_2} \partial_2 u_1 - \frac{k_2 \partial_2 A_1}{A_1 A_2} u_1 + \frac{k_2}{A_1} \partial_1 u_2 - \\
& - \frac{k_1 \partial_1 A_2}{A_1 A_2} u_2 + \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \frac{\gamma_1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \frac{\gamma_2}{A_2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

У співвідношеннях (4) та далі введені позначення  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}$  ( $i=1,2,3$ ).

Описані вище компоненти можна об'єднати у вектор компонент тензора лінійної деформації  $e = \{e_i\}_{i=1}^{11} = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}\}^T$ .

**Рівняння рівноваги оболонки та крайові умови.** В термінах зусиль і моментів система рівнянь рівноваги оболонок, податливих до зсуву та стиснення, має вигляд [1,2]:

$$\begin{aligned}
& \partial_1(N_{11}A_2) - N_{22}\partial_1A_2 + S\partial_2A_1 + \frac{1}{2}\partial_2(Hk_1A_1) + \\
& + \frac{1}{2}Hk_2\partial_2A_1 + k_1A_1A_2N_{13} + A_1\partial_2S = -P_1A_1A_2, \\
& \partial_2(N_{22}A_1) - N_{11}\partial_2A_1 + S\partial_1A_2 + \frac{1}{2}\partial_1(Hk_2A_2) + \\
& + \frac{1}{2}Hk_1\partial_1A_2 + k_2A_1A_2N_{23} + A_2\partial_1S = -P_2A_1A_2, \\
& \partial_1(N_{13}A_2) + \partial_2(N_{23}A_1) - A_1A_2(N_{11}k_1 + N_{22}k_2) = -P_3A_1A_2, \\
& \partial_1(M_{11}A_2) - M_{22}\partial_1A_2 + H\partial_2A_1 - A_1A_2N_{13} + A_1\partial_2H = -A_1A_2m_1, \\
& \partial_2(M_{22}A_1) - M_{11}\partial_2A_1 + H\partial_1A_2 - A_1A_2N_{23} + A_2\partial_1H = -A_1A_2m_2, \\
& \partial_1(M_{13}A_2) + \partial_2(M_{23}A_1) - A_1A_2(N_{33} + M_{11}k_1 + M_{22}k_2) = -A_1A_2m_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Статичні крайові умови на частині контуру серединної поверхні  $\Gamma_\sigma$  ( $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$ ):

$$\begin{aligned}
N_t &= N_{11} \cos^2 \theta + N_{22} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} S \sin 2\theta + \frac{1}{4} \{(k_1 + k_2)H\} \sin 2\theta, \\
N_s &= \frac{1}{2} (N_{22} - N_{11}) \sin 2\theta + S \cos^2 \theta - S \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (k_2 \cos^2 \theta - k_1 \sin^2 \theta) H, \\
N_n &= N_{13} \cos \theta + N_{23} \sin \theta, \\
M_t &= M_{11} \cos^2 \theta + M_{22} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} H \sin 2\theta, \\
M_s &= \frac{1}{2} (M_{22} - M_{11}) \sin 2\theta + H \cos^2 \theta - H \sin^2 \theta, \\
M_n &= M_{13} \cos \theta + M_{23} \sin \theta.
\end{aligned} \tag{6}$$

У формулах (6) символом  $\theta$  позначено кут між нормаллю  $n$  до границі області  $\Omega$  та віссю  $\alpha_1$ .

**Фізичні співвідношення.** Щоб повністю описати процес лінійного деформування ізотропної оболонки, необхідно доповнити систему наведених вище рівнянь співвідношеннями, які пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами:

$$\sigma = Be. \quad (7)$$

Тут  $B$  – матриця пружних характеристик матеріалу розмірності  $11 \times 11$ , ненульові компоненти якої рівні:

$$\begin{aligned} B^{1,1} = B^{2,2} = B^{3,3} &= \frac{(1-\nu)Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ B^{1,2} = B^{2,1} = B^{1,3} = B^{3,1} = B^{2,3} = B^{3,2} &= \frac{\nu Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ B^{4,4} = B^{5,5} = B^{6,6} &= \frac{Eh}{(1+\nu)}, & B^{7,7} = B^{8,8} &= \frac{(1-\nu)Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ B^{7,8} = B^{8,7} &= \frac{\nu Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}, & B^{9,9} = B^{10,10} = B^{11,11} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нижче наведені формули для обчислення напружень в довільній точці оболонки:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{h} \left( N_{11} + 12M_{11} \frac{\alpha_3}{h^2} \right), & \sigma_{22} &= \frac{1}{h} \left( N_{22} + 12M_{22} \frac{\alpha_3}{h^2} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{h} \left( N_{33} + 6\nu(M_{11} + M_{22}) \frac{\alpha_3}{h^2} \right), & \sigma_{12} &= \frac{1}{h} \left( S + 12H \frac{\alpha_3}{h^2} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{h} \left( N_{13} + 12M_{13} \frac{\alpha_3}{h^2} \right), & \sigma_{23} &= \frac{1}{h} \left( N_{23} + 12M_{23} \frac{\alpha_3}{h^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

**Чисельний розв'язок.** (Дослідження напружено-деформованого стану катеноїда). Розглянемо оболонку, що утворена обертанням лінії  $y = R \cdot ch \frac{z}{a}$  навколо осі  $Oz$  при  $-H < z < 0$  [3].

Верхня межа оболонки  $z = 0$  вільна від навантажень, а нижня – жорстко закріплена. Знайдемо напружений стан оболонки зі сталою товщиною  $h$ , який зумовлений власною вагою матеріалу. В цьому випадку можна припустити, що до оболонки прикладено осесиметрично розподілені поверхневі зусилля, які діють у напрямку від'ємної осі  $Oz$ ,  $q = C = h\rho g$ , де  $\rho$  – густина матеріалу.

Параметричні рівняння розглядуваної оболонки мають вигляд:

$$\begin{aligned} x(\alpha_1, \alpha_2) &= R \cdot \cos \alpha_2 \cdot ch \frac{\alpha_1}{a}, \\ y(\alpha_1, \alpha_2) &= R \cdot \sin \alpha_2 \cdot ch \frac{\alpha_1}{a}, \\ z(\alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_1. \end{aligned}$$

Коефіцієнти Ляме і кривини обчислюються за формулами:

$$A_1 = \left(1 + m^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad A_2 = R \cdot \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{a},$$

$$k_1 = -\frac{m \cdot \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{a}}{a \cdot \left(1 + m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = \frac{1}{R \cdot \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{a} \cdot \left(1 + m^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Відзначимо, що катеноїд деформується під дією осевого навантаження  $q$ , яке в локальній системі координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  розкладається на компоненти в напрямку нормалі та дотичної до поверхні оболонки:

$$P_1 = q \frac{1}{\left(1 + m^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$P_3 = -q \frac{m \cdot \operatorname{sh} \frac{\alpha_1}{a}}{\left(1 + m^2 \cdot \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad m = \frac{R}{a}$$

Розрахунок проведений при  $H/R=30$ , модулі Юнга  $E=0,7 \cdot 10^6$  кГ/см<sup>2</sup>, коефіцієнті Пуассона  $\nu=0,3$ , товщині оболонки  $h/R=0,1$ .

Параметр  $a$  вибирався так, щоби на закріпленій межі радіус оболонки  $R_n$  дорівнював  $R_n/R=1,5; 2; 2,5; 3$ . При цьому значення параметру  $a$  будуть: 31,1713; 22,7798; 19,1473; 17,0189.

Задача розв'язувалася методом скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій серендипового типу [4].

На рис.1 наведено розраховані напруження в оболонці при  $R_n/R=1,5$ . Кривим 1 тут відповідають відносні напруження  $\sigma_1/C$  і 2 – напруження  $\sigma_2/C$ , при цьому суцільними лініями зображено напруження на зовнішній поверхні катеноїда, а штриховими – на внутрішній.

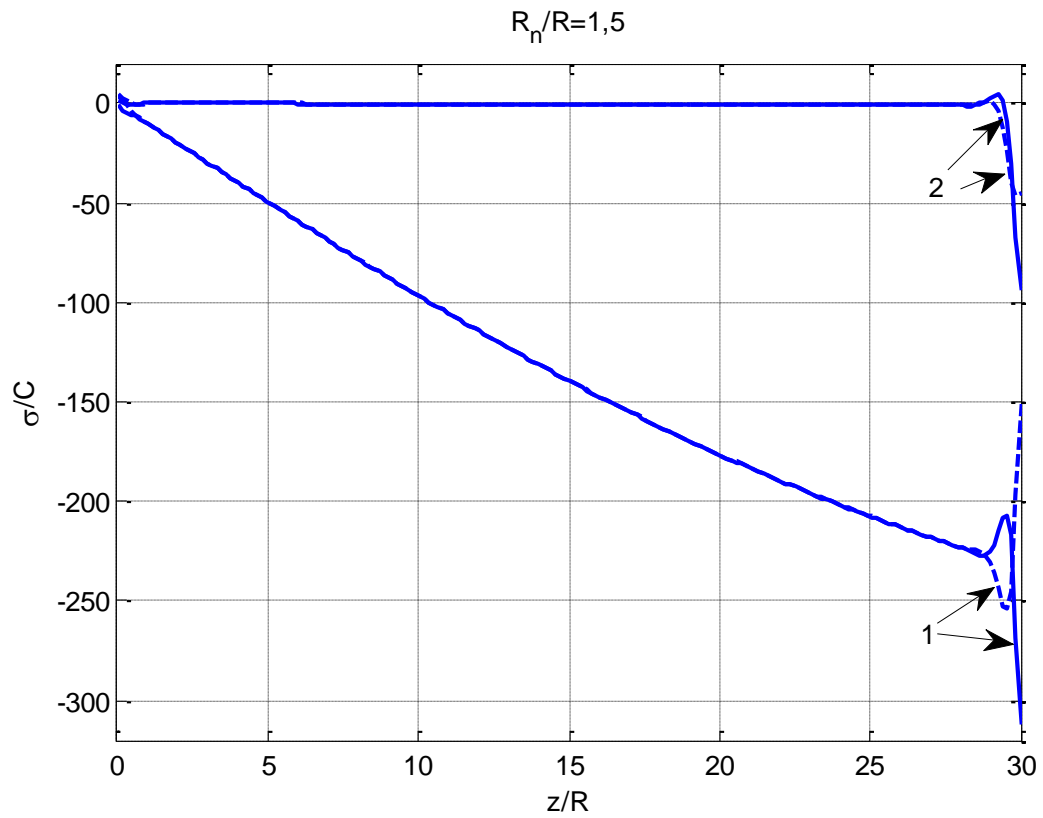


Рис. 1. Напруження в оболонці при  $R_n / R = 1,5$   
 Аналогічні результати для  $R_n / R = 2; 2,5; 3$  наведено на рис. 2, 3, 4.

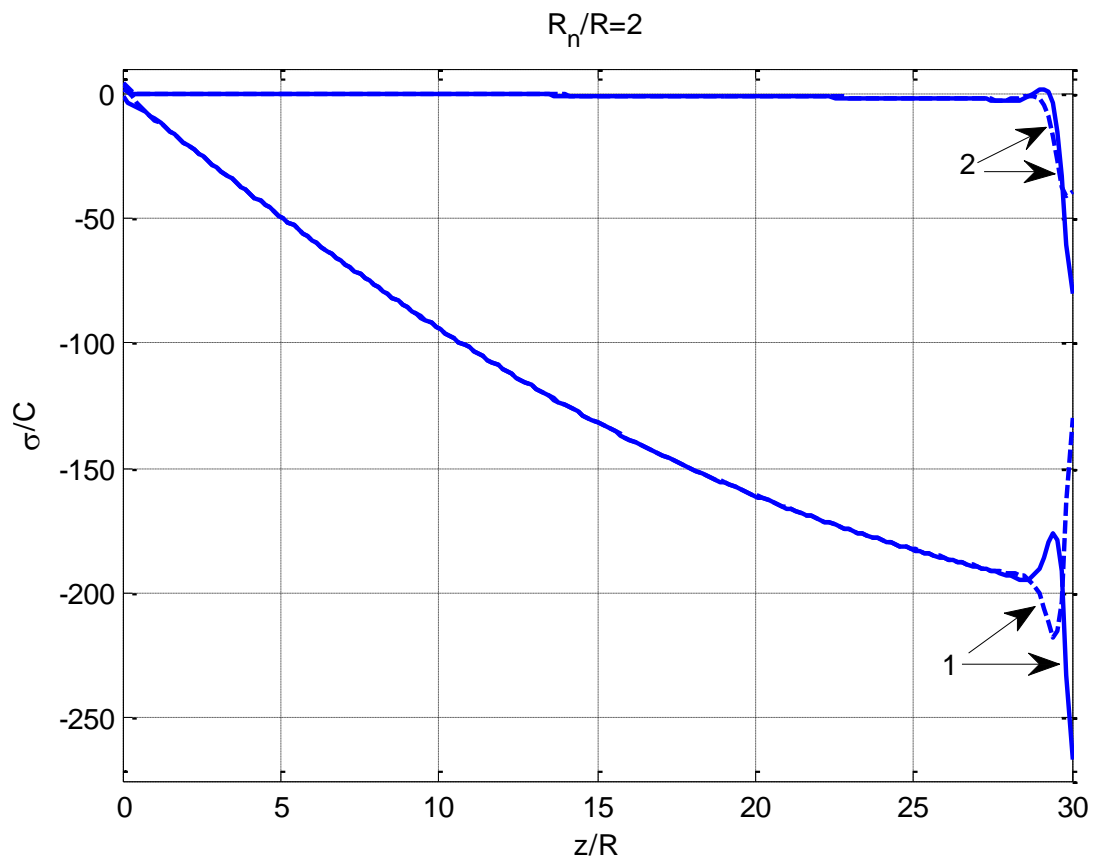
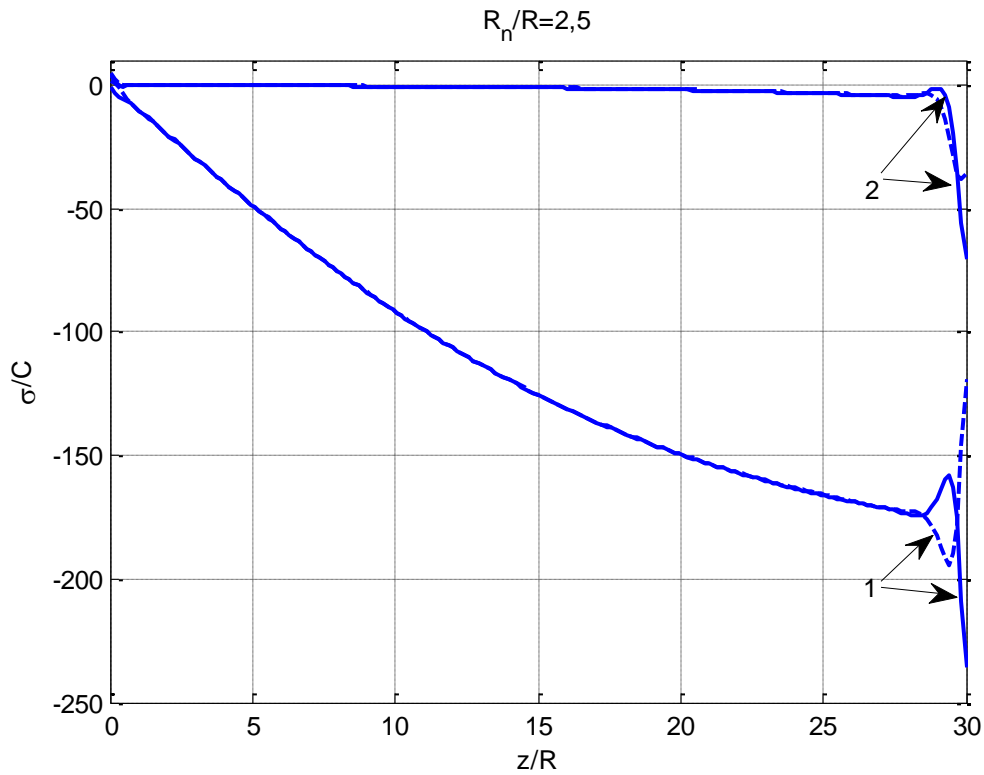
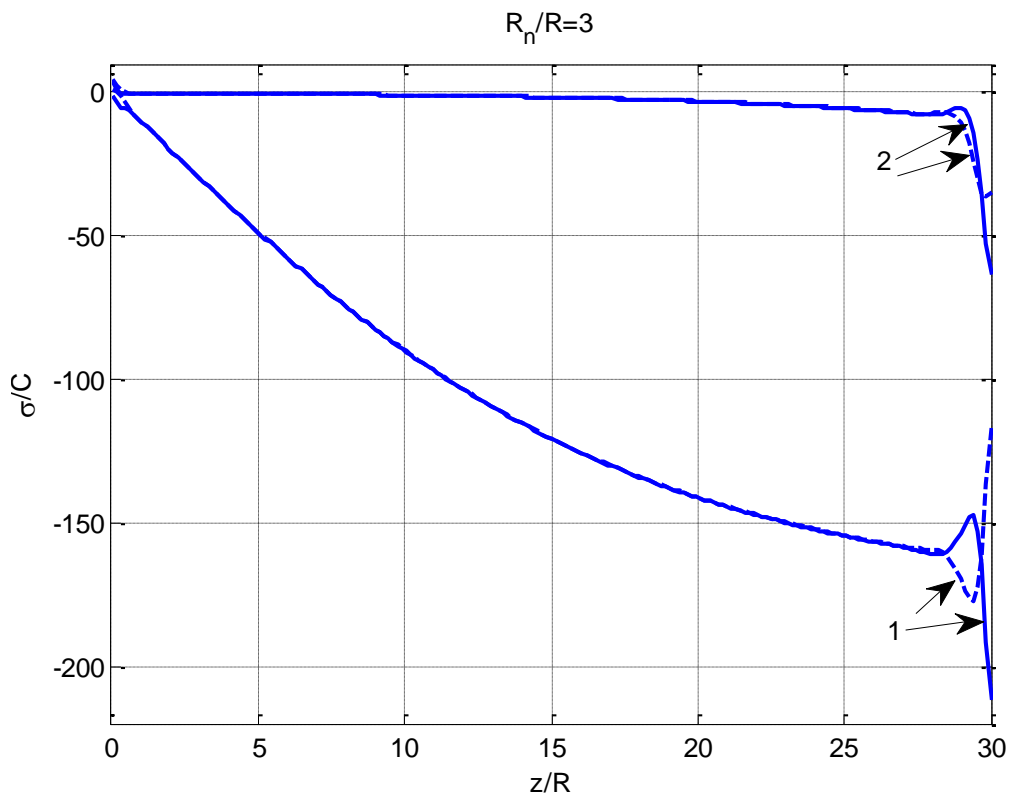


Рис.2. Напруження в оболонці при  $R_n / R = 2$

Рис.3. Напруження в оболонці при  $R_n / R = 2,5$ Рис.4. Напруження в оболонці при  $R_n / R = 3$ 

На основі наведених на рисунках даних можна зробити наступні висновки:

напруження  $\sigma_2$ , які діють у кільцевому напрямку є невисокі в порівнянні з осьовими напруженнями  $\sigma_1$ ;

напруження  $\sigma_1$  є максимальними на закріпленій межі на зовнішній поверхні, причому вони зростають при зменшенні радіуса нижньої межі оболонки.

### Список використаних джерел

1. Bernakevych I.E., Vahin P.P., Shot I.Ya. A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 181, № 4. – P. 497–505
2. Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, № 2. – С. 53-61.
3. Григоренко Я. М., Мукоєд А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: - Вища школа. Головное изд-во, 1983. - 286 с.
4. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. М. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1981. – 88 с.
5. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.

### АННОТАЦІЯ

В роботі розглянута задача визначення напруженого стану оболочочних будівельних конструкцій на основі уточненої теорії оболонок, з урахуванням деформацій сдвига і сжаття. Приведено розрахунок напружень в башнях катеноїдної форми.

Ключевые слова: напряжения, напруженно-деформированное состояние, расчет, оболочка, поверхность.

### ANNOTATION

The following paper considers process of geometric and linear deformation of walls which are amenable to shift and compression. Key equations of the regarded ask are recorded.

Numerical solutions, received by means of consummated elements, are given. Comparison of solutions within the theory regarded in the paper is conducted, involving numerical solutions within the limits of penta-modal theory of shells, type Tymoshenko-Midline and Kirhoff-Lyav.

Keywords: tension, stress-strain state, calculation, shell, surface.