УДК 556.388

к.т.н. Телима С.В.,
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ

ДО ПРОГНОЗУ ВПЛИВУ ПЕРІОДИЧНОГО ЗРОШЕННЯ НА ПІДЙОМ РІВНІВ ҐРУНТОВИХ ВОД

Приводяться аналітичні і чисельні розв'язки задачі фільтрації в безнапорному водоносному горизонті для випадку періодичного інфільтраційного живлення. Дана оцінка впливу геофільтраційних параметрів водоносної товщі на інтенсивність підйому рівнів грунтових вод при такому живленні і приведені обмеження на обґрунтованість використання запропонованих лінеаризованих моделей при розв'язках конкретних задач прогнозування процесів водообміну на зрошувальних землях

Ключові слова:зрошення, рівень грунтових вод, водоносний горизонт, водоносна товща, лінеаризована модель.

Як правило, зрошення земель проводиться періодично протягом весняно-літнього сезону. При цьому відбувається відповідний підйом рівнів грунтових вод (РГВ), величина якого залежить від багатьох факторів, що характеризують той, чи інший масив зрошення. Важливим моментом є оцінка змін РГВ під впливом живлення, яке можна розглядати як суму живлення водоносного горизонту за рахунок інфільтрації атмосферних опадів та за рахунок зрошення, яке може мати періодичний чи випадковий характер.

Розглянемо диференційне рівняння, що описує одновимірну неусталену фільтрацію в безнапорному водоносному горизонті. Припускаючи, що потік грунтових вод у ньому практично горизонтальний, рівняння фільтрації можна записати у наступному вигляді:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(h-b\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right) + W, \qquad (1)$$

де μ – коефіцієнт водовіддачі; k – коефіцієнт фільтрації, м/добу; b – висота положення підошви водоносного горизонту відносно вибраної нульової площини, м; h – напор або рівень грунтових вод, м; W - інфільтраційне живлення, м/добу (рис. 1).

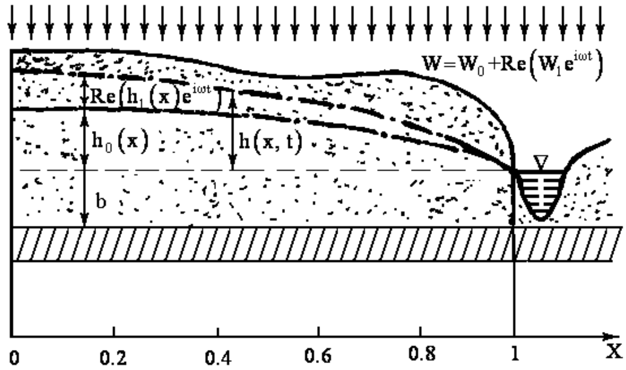

Рис. 1. Схема водообміну в безнапорному водоносному горизонті в напівобмеженій області фільтрації

Для отримання аналітичного розв'язку рівняння (1) при відповідних крайових умовах параметри μ, k, b і W задаються у просторі як постійні величини. Крім того, оскільки коливання РГВ є незначними по відношенню до потужності водоносного горизонту ($h-b$), рівняння (1) можна переписати як:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial t}=kB\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+W\,, \tag{2}$$

де $B=\overline{h}-b$ – середня потужність горизонту у просторі і в часі, а $\overline{h}$ – середнє значення напору по профілю.

Як було сказано вище, інфільтраційне живлення на масивах зрошення можна представити у вигляді суми постійної величини і періодичної складової [1, 3]:

$$W=W_0+\mathrm{Re}\left(W_1\exp\left(i\omega t\right)\right), \tag{3}$$

де $W_0>0$ – постійна величина живлення; W_1 – комплексна складова періодичного живлення горизонту з частотою $\omega=2\pi/T$ і періодом T. Якщо, наприклад, $W_1=u-iv$, то дійсна складова інфільтраційного живлення буде виражатися як $u\cdot\cos\left(\omega t\right)+v\cdot\sin\left(\omega t\right)$ [1, 3].

Так як (2) є лінійним рівнянням, то його розв'язок відносно $h\left(x,\,t\right)$ можна записати у наступному вигляді:

$$h\left(x,\,t\right)=h_0\left(x\right)+\mathrm{Re}\left(h_1\left(x\right)\exp\left(i\omega t\right)\right), \tag{4}$$

де $h_1\left(x,\,t\right)$ – комплексна величина [1, 3].

Підставляючи (4) в (2), отримуємо два рівняння відносно h_0 і h_1:

$$kB\frac{d^2h_0}{dx^2}+W_0=0\,, \tag{5}$$

$$kB\frac{\partial^2 h_1}{dx^2}-i\omega\mu h_1=-W_1\,. \tag{6}$$

Перепишемо (5) і (6) в безрозмірній формі, використовуючи наступні безрозмірні змінні: $X = x/L$ (L – довжина області фільтрації); $H_0 = W_0 T/\mu$; $\Phi_0 = h_0 / H_0$; $H_1 = W_1 T / 2\pi\mu$; $\Phi_1 = h_1 / H_1$; $r = kBT/\mu L^2$. Тоді (5) і (6) будуть мати наступний вигляд:

$$r\frac{d^2\Phi_0}{dX^2} + 1 = 0\,, \tag{7}$$

$$r\frac{d^2\Phi_1}{dX^2} - \eta^2\Phi_1 = i\eta^2\,, \tag{8}$$

де $\eta^2 = 2\pi i / r$ – комплексна величина.Враховуючи граничні умови при *X=0* і *X=1* отримуємо, що:

$$\Phi_0 = \left(1 - X^2\right)/2r\,, \tag{9}$$

а для комплексної складової коливань РГВ —

$$\Phi_1 = -i\left(1 - \frac{\cos h\,\eta\, X}{\cos h\,\eta}\right). \tag{10}$$

Підставляючи (9) і (10) в (4), значення величини РГВ визначається як

$$h = \frac{W_0 T}{\mu}\Phi_0 + \mathrm{Re}\left(\frac{W_1 T}{2\pi\mu}\Phi_1 \exp\left(i\omega t\right)\right). \tag{11}$$

Розглянемо параметр r, який визначає відносний вплив коефіцієнтів μ і kB на величину напору в (2). При малих значеннях r має місце баланс між першим і третім членами в (2), тобто, дане рівняння добре апроксимує рівняння (1). При великих значеннях r першим членом в (2) можна знехтувати і припустити, що дане рівняння описує квазістаціонарний режим фільтрації на будь-який момент часу. Отримані лінеаризовані рівняння (9) і (10) обмежені додатковим припущенням, що потужність водоносного горизонту є постійною. Покажемо, як впливає величина r, якщо вона є змінною. Визначаючи $B = \overline{h} - b$ як середнє значення потужності горизонту, підставимо $h_0 - b$ в рівняння (1), виконавши, таким чином, його лінеаризацію.

Нехай $\beta = b / H_0$ – безрозмірна величина, що визначає потужність насиченої товщі при X=0, а $K = kH_0^2 / WL^2$ – безрозмірний коефіцієнт водопровідності. Аналогічно попередньому визначенню величин Φ_0 і Φ_1 при вибраних безрозмірних параметрах маємо наступну систему рівнянь:

$$r_1 \frac{d}{dX}\left(\frac{\Phi_0}{\beta}+1\right)\frac{d\Phi_0}{dX}+1=0\,, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dX}\left(\left(\frac{\Phi_1}{\beta}+1\right)\frac{d\Phi_1}{dX}\right)-\eta_1^2\Phi_1 = i\eta_i^2\,, \tag{13}$$

де $\eta_1^2 = 2\pi i / r_1$; $r_1(X) = K(\Phi_0(X)+\beta)$ – змінна величина коефіцієнту водопровідності (при $r_1 = K\beta$).

Розв'язок (12) має наступний вигляд:

$$\left(\frac{\Phi_0}{\beta}+1\right)^2 + \frac{1}{K\beta^2}X^2 = 1+\frac{1}{K\beta^2}\,. \tag{14}$$

При $X=0$ цей профіль буде мати максимальне значення:

$$\frac{\Phi_0(0)}{\beta}+1 = \left(1+\frac{1}{K\beta^2}\right)^{0.5}. \tag{15}$$

Оскільки (13) не має аналітичного розв'язку, то необхідне застосування чисельних методів.

Розглянемо дискретний аналог рівняння (1), який має наступний вигляд [2]:

$$\mu\frac{\boldsymbol{dh}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{Kh} = \boldsymbol{f}\,, \tag{16}$$

де $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$ –вектор значень напорів у вузлових точках дискретної області фільтрації; $\boldsymbol{\mu}$ – матриця коефіцієнтів водовіддачі, $\boldsymbol{K}$ – матриця коефіцієнтів фільтрації; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$ – вектор, що включає в себе величину інфільтраційного живлення та граничні умови. Для безнапорного водоносного горизонту матриця $\boldsymbol{K}$ залежить від $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})$.

Припускаємо, що $\boldsymbol{f}$ можна представити у вигляді:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Re}\left(\boldsymbol{f}_j \,\mathbf{exp}\left(\boldsymbol{i\omega_j t}\right)\right), \tag{17}$$

де $\boldsymbol{f}_0$ –середнє значення, а $\boldsymbol{f}_j$ – складова коливання з частотою $\boldsymbol{\omega}_j = 2\pi\boldsymbol{T}_j$ з періодом $\boldsymbol{T}_j$.

У випадку, коли $\boldsymbol{K}$ не залежить від $\boldsymbol{h}$ при лінеаризації виразу відносно $\boldsymbol{h}$ розв''язок буде наступним:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Re}\left(\boldsymbol{h}_j \exp\left(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\omega}_j \boldsymbol{t}\right)\right), \tag{18}$$

де $\boldsymbol{h}_0$ – середнє значення напору, а $\boldsymbol{h}_j$ – комплексна амплітуда $\boldsymbol{j}$-ої складової змінного напору.

Підставляючи (18) в рівняння (16), отримуємо

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{h}_0 = \boldsymbol{f}_0. \tag{19}$$

і

$$(\boldsymbol{i}\,\omega\,\boldsymbol{j}\,\mu + \boldsymbol{K})\,\boldsymbol{h}_{\,j} = f_j, \tag{20}$$

де $\boldsymbol{f}_j$ і h_j є комплексними величинами.

При постійному значенні коефіцієнту водопровідності розв’язок (19) і (20) аналогічний безрозмірному розв’язку, який можна отримати, розв’язуючи відповідно рівняння (9) і (10). Перевага чисельного методу полягає у тому, що є можливість ітераційним шляхом визначити $\boldsymbol{K}$, розв’язуючи рівняння (19) при середніх значення $\boldsymbol{h}_0$. Якщо $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{h}_0)$, то рівняння (19) стає нелінійним і його розв’язок аналогічний розв’язку рівняння (14).

Проведені чисельні розрахунки показали, що вплив потужності горизонту, який змінюється у просторі, на амплітуду $\boldsymbol{\Phi}_1$ досить незначний.

Лише при малих значеннях безрозмірного коефіцієнту водопровідності, коли максимальний підйом РГВ великий по відношенню до потужності горизонту, цей вплив є досить значним, тобто, коли значення в лівій частині (15) є великим. На практиці такий випадок є малоймовірним. Якщо $\beta = 10$, то це свідчить про те, що у відсутності горизонтального потоку середнє значення живлення W_0 забезпечить наповнення горизонту всього за 10 періодів живлення горизонту. Вплив змінного коефіцієнту водопровідності проявляється у зміщенні положення амплітуди коливань РГВ при збільшенні параметру r. Вплив є найбільшим при $K\beta = 0.001$ через те, що з рівняння (15) випливає, що $\Phi_0/\beta + 1 = 1.41;\ 3.32$ і 10 при $\beta = 10$ і відповідно $K\beta = 0.1$, 0.01 і 0.001, тобто, лінеаризація (1) є обґрунтованою лише тоді, коли $\Phi(0)$ менше 10.

Наступним обмеженням на лінеаризацію рівняння (1) є вплив зміни потужності горизонту в часі. При цьому ми припускаємо, що для практичних цілей рівняння (14) має переваги перед рівнянням (9), яке описує параболічний профіль РГВ, якщо їх різниця є досить значною, наприклад, при $\beta = 10$. Таким чином, максимальна середня потужність насиченої товщі визначається як:

$$h_0(0) - b = \frac{W_0 T}{\mu}\beta\left(1 + \frac{1}{K\beta^2}\right)^{0.5}. \tag{21}$$

а максимальна амплітуда періодичних коливань буде згідно (10) при X = 0:

$$\left|h_1(0)\right| = \frac{|W_1|T}{2\pi\mu}\left|1-\mathrm{Sec}\,h\eta_1\right|, \tag{22}$$

де η_1 визначається при $r_1 = K\beta$. Звідси випливає, що вплив змінної у часі потужності горизонту буде незначним, коли

$$\alpha = \frac{\left|h_1(0)\right|}{h(0)-b} = \frac{|W_1|}{W_0}\cdot\frac{1}{2\pi\beta}\cdot\frac{\left|\mathrm{Sec}\,h\eta_1\right|}{\left(1+\frac{1}{K\beta^2}\right)^{0.5}} \tag{23}$$

є малою величиною.

Якщо α < 0.1, то результати лінеаризації дозволяють отримувати вірогідні розв'язки відносно РГВ. При $\beta > 1000$ ми отримуємо, що $\alpha < 0.1$ для всіх значень K і відношення $|W_1|/W_0 < 600$. При β = 100 і β = 10 відношення $|W_1|/W_0$ будуть відповідно менше 60 і 6. Ці обмеження можуть значно посилитись, коли $K\beta$ відрізняється від одиниці в значній мірі, наприклад, при $\beta = 10$ і $K = 10^{-3}$ $\alpha < 0.1$ при $|W_1|/W_0 < 20$.

Аналіз результатів розв'язків лінеаризованого рівняння фільтрації (2) дозволяє зробити наступні висновки:

1) значні коливання РГВ слід чекати у тому випадку, коли відношення $|W_1|/W_0$ є великим або K є малим. Застосування лінеаризованого рівняння є обґрунтованим при α < 0.1.

2) Якщо значення r дуже мале, то можна вважати, що водоносний горизонт веде себе як водоймище, амплітуда коливань рівнів води в якому є постійною по всій його площі. Якщо всі припущення щодо лінеаризованої моделі вважати обґрунтованими, то є можливість визначати величину амплітуди коливань РГВ або величину періодичного живлення при відомому значенні коефіцієнту водовіддачі μ та даних режимних спостережень по свердловинам. Навіть у випадку, коли $r > 0.1$, значення $|\Phi_1|$ буде в межах 0,07 від 1 майже по всій площі області фільтрації.

3) при організації мережі спостережних свердловин для спостереження за коливаннями РГВ протягом річного чи багаторічного циклу можливе обмеження числа спостережень з метою виявлення лише піку підйому і спаду РГВ. Запізнення реакції водоносного горизонту на періодичне живлення залежить від значення r та точки спостереження. Чим ближче точка спостережень до границі області фільтрації, тим швидше реагує РГВ на зміну живлення водоносного горизонту.

В цілому отриманий лінеаризований аналітичний розв'язок дозволяє прогнозувати амплітуду і фазове запізнення періодичних коливань РГВ у випадку дослідження одновимірної неусталеної фільтрації в безнапорному водоносному горизонті, а запропонований чисельний метод розв'язку даної задачі дозволяє у явній формі обчислювати періодичний вплив інфільтраційного живлення на підйом РГВ у досліджуваній області фільтрації.

Виконана оцінка впливу безрозмірного коефіцієнту водопровідності r на підйом РГВ показує, що лінеаризований розв'язок є обґрунтованим лише при малих значеннях r. При застосуванні даної методики для розв'язку практичних задач основним обмеженням є зміна у часі даного параметру, хоча в більшості випадків цим можна знехтувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М., Наука, 1977. -664с.
2. Решение задач охраны подземных вод на численных моделях. М., Недра, 1992. -240с.
3. Свешников А.Т., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М., Наука, 1974. -319с.

АННОТАЦИЯ

Приводятся аналитические и численные решения задачи фильтрации в безнапорном водоносном горизонте для случая периодического инфильтрационного питания. Дана оценка влияния геофильтрационных параметров водоносной толщи на интенсивность подъема уровней грунтовых вод при заданном питании и приведены ограничения на обоснованность применения предложенных линеаризованных моделей фильтрации при решении конкретных задач прогнозирования процессов водообмена на орошаемых земля

RESUME

The analytic and numerical solutions of the flow problem for unconfied aquifer in the case of the periodic recharge are presented. The value of the flow parameters influence on the elevation of the ground water levels at the given recharge is shown. The limits of the validation of the using of the proposed linearised flow models to the practical realisations of the prognose waterexchange processes on the irrigation lands are presented.