УДК 514.18;711.11 Мамедов Т.А., Меннанова С.Ш.,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АЛГОРИТМИ ПОБУДОВИ ОПУКЛОЇ ОБОЛОНКИ ДЛЯ КІЛЬЦЕВИХ ПЕРЕХРЕСТЬ МІСТА

Наводяться алгоритми побудови опуклої оболонки, що дозволяють за набором точок отримати найменший опуклий політоп, який можна використати для проектування кільцевих перехресть міста.

Ключові слова: *багатокутник, політоп, півпростір, поліедральна множина, гіперплощина.*

Вступ. Містобудівне проектування в стислих просторових умовах висуває особливі вимоги під час проектування міських вулиць та доріг. Земля, особливо в центральних частинах великих міст, в більшості випадків є найціннішим ресурсом. Тому, для економії цього ресурсу використання математичних моделей в містобудівному проектуванні є актуальним.

Існує безліч математичних методів, що дозволяють вирішувати ті чи інші проблеми в містобудуванні та в даній роботі ми розглянемо один із них.

Кожен перетин двох або більше вулиць міста позначимо точкою. Маючи деяку множину перетинів, можна побудувати мінімальний опуклий багатогранник, що буде містити в собі дані точки. В результаті, за отриманою опуклою оболонкою можна дослідити та спроектувати кільцеве перехрестя для відповідної місцевості.

Опукла оболонка множини точок X на евклідовій площині або у просторі – це мінімальна опукла множина, що містить X. Тобто опукла оболонка є границею мінімальної опуклою множини, що містить дану не порожню скінчену множину точок на площині, для яких опукла оболонка являє собою зв'язну послідовність відрізків.

Про опуклу оболонку. Нехай в просторі E^d задано k різних точок $p_1, p_2, \dots, p_k$. Множина точок

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_k p_k$$
$$\alpha_j \in R, \alpha_j \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$$

називається опуклою множиною, яка породжена точками $p_1, p_2, \dots, p_k$, а p називається опуклою комбінацією $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Опуклою оболонкою $conv(L)$ підмножини L називається найменша опукла множина, яка містить L.

Поліедральною множиною в E^d називається перетин скінченої множини замкнутих півпросторів.

Теорема. Опукла оболонка скінченої множини точок в E^d є опуклим полі топом. Навпаки, кожен опуклий політоп є опуклою оболонкою деякої скінченої множини точок.

Властивості.

- X є опуклою множиною тоді і тільки тоді, коли $conv(X) = X$.
- Виконується:
$\forall T : T \subset X \; \exists! \, conv(X) : conv(X) =$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\alpha_1,\dots,\alpha_n \in X} \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_n=1} \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n, \lambda_i \geq 0$$
- Якщо вимірність простору дорівнює N, тоді вірна наступна теорема Каратеодорі про опуклу оболонку:
$$conx(X) = \bigcup_{\alpha_1,\dots,\alpha_{N+1} \in X} \bigcup_{\lambda_1+\dots+\lambda_{N+1}=1} \lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_{N+1}\alpha_{N+1}\, , \lambda_i \geq 0$$
- Опуклою оболонкою скінченого набору точок на площині є опуклий плоский багатокутник, причому його вершини є підмножиною похідного набору точок. Аналогічна ситуація вірна і для скінченого набору точок в багатовимірному просторі.
- Опукла оболонка X дорівнює перетину всіх півпросторів, що містять X.
- Для двох опуклих множин, які не перетинаються, завжди існує гіперплощина, що їх розділяє.

Алгоритм Грехема.

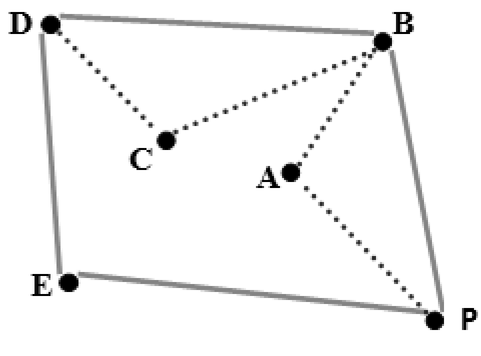

Рисунок 1.

1. Знаходимо точку з найменшою y-координатою. Якщо таких декілька, то обираємо ту точку (P), яка має найменшу x-координату. Даний крок має складність $O(n)$, де n - кількість точок.

2. Точки мають бути відсортовані в порядку зростання кута, який вони разом з P утворюють з віссю Ox.
3. Для кожної точки визначаємо чи було пересування від двох попередніх точок до цієї точки поворотом ліворуч чи поворотом праворуч.
4. Якщо це був поворот праворуч, тоді передостання точка (від якої повертали) не є частиною опуклої оболонки і має бути видалена зі стека. Переходимо до кроку 3.
5. Якщо це був поворот ліворуч, рухаємось далі до наступної точки у відсортованому масиві.
6. Досягаємо точки, з якої ми починали. Отримуємо опуклу оболонку.

Нехай є три точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, для того, щоб визначити чи утворюють дані точки поворот ліворуч або праворуч достатньо обчислити напрямок векторного добутку двох наступних векторів:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ і } (x_1, y_1), (x_3, y_3)$$

яке характеризується знаком виразу

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$$

Якщо результат 0, точки колінеарні, якщо позитивний, точки утворюють поворот ліворуч, інакше поворот праворуч. Час виконання алгоритму Грехема дорівнює $O(n \log n)$. Модифікацією даного алгоритму є алгоритм Ендрю.

Алгоритм Кіркпатрика-Зейделя. Відомий також як алгоритм побудови опуклої оболонки методом «розділяй та володарюй». Швидкість алгоритму складає $O(n \log h)$, де n - кількість вхідних точок та h - кількість точок в опуклій оболонці.

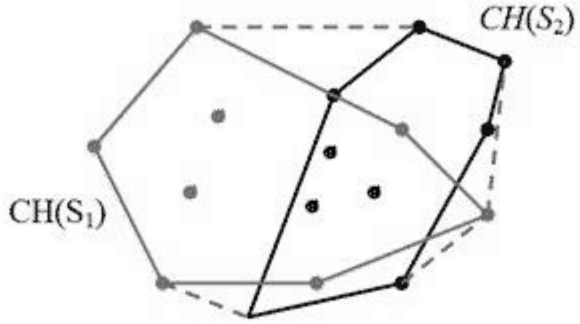

Рисунок 2.

Нехай дана множина S, що складається з N точок.

1. Якщо $N \leq \varepsilon$, то побудувати опуклу оболонку одним із відомих методів та зупинитися, інакше перейти до кроку 2.
2. Розіб'ємо початкову множину S довільним чином на два приблизно рівних за потужністю підмножин S_1, S_2 (нехай S_1 містить $[N/2]$ точок, а S_2 містить $N - [N/2]$ точок).

3. Рекурсивно (починаючи с кроку 1) знаходимо всі опуклі оболонки кожної з підмножин S_1 та S_2.
4. Будуємо опуклу оболонку початкової множини об'єднанням двох опуклих оболонок $CH(S_1) \cup CH(S_2)$.

Оскільки $CH(S) = CH(S_1 \cup S_2) = CH(CH(S_1) \cup CH(S_2))$, складність цього алгоритму є рішенням рекурсивного співвідношення $T(N) \le 2T(N/2) + f(N)$, де $f(N)$ – час побудови опуклої оболонки об'днання двох опуклих багатокутників, кожний з яких має близько $N/2$ вершин.

$$T(N) = O(NlogN)$$

Алгоритм швидкої оболонки. Алгоритм можна розбити на наступні етапи виконання:

1. Знайти точки з мінімальної і максимальною x-координатою, вони будуть частиною опуклої оболонки.
2. Використовуючи лінію, утворену двома точками, розділити всю множину точок на дві підмножини, які будуть оброблятися рекурсивно.

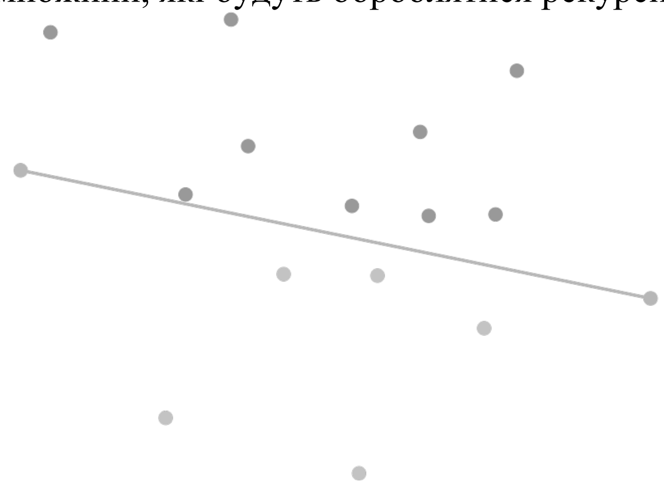

Рисунок 3.

3. Визначити точку, на одній стороні лінії, з максимальною відстанню від лінії. Знайдені до цього дві точки утворюють з цією точкою трикутник з найбільшою площею.
4. Точки, що лежать всередині цього трикутника не можуть бути частиною опуклої оболонки і, отже, можуть бути проігноровані в наступних кроках.
5. Повторити попередні два кроки для двох ліній, утвореного трикутника (окрім початкової лінії).

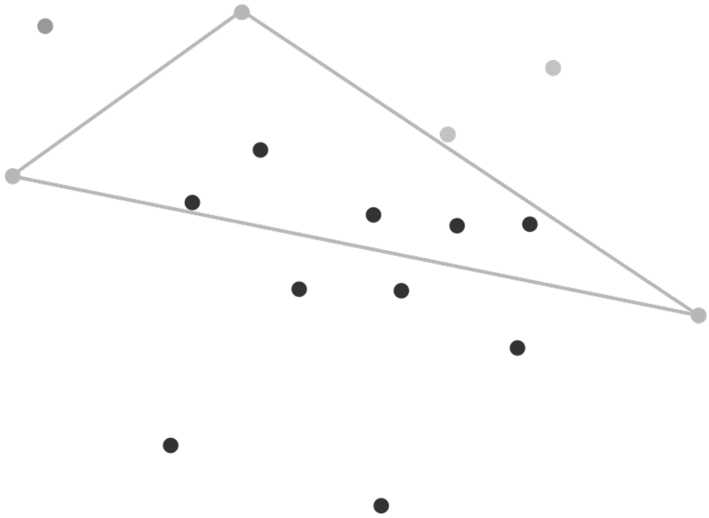

Рисунок 4.

6. Продовжити робити так доти, поки більше не залишиться точок, у кінці рекурсії, вибрані точки, складуть опуклу оболонку.

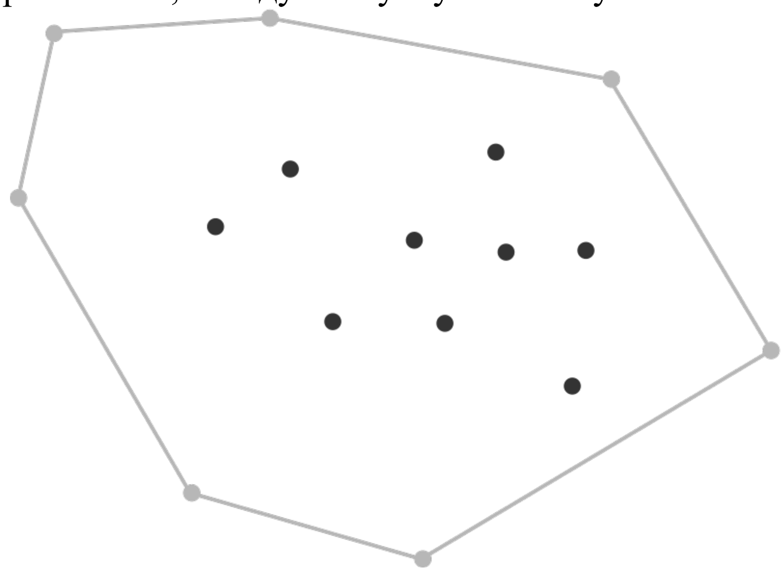

Рисунок 5.

Згладжування. Після того як ми побудували опуклу оболонку, треба згладити ламані лінії. Для цього можна використати криві Безьє. Отже, крива Безьє – це параметрична крива наступного вигляду:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) P_i, \qquad t \in [0, 1]$$

де

P_i - опорні вершини,

$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ - поліноми Бернштейна, вони є базисними функціями кривої Безьє.

Висновки. Після того, як над ламаними лініями провели згладжування, використовуючи алгоритм згладжування за допомогою кривих Безьє, отримані результати можуть стати фундаментом для подальшого проектування. Наведені в даній роботі математичні алгоритми можна використовувати для проектування не тільки кільцевих перехресть міста, а й доріг, що огинають деяку місцевість.

Література

1. Анісімов А.В., Терещенко В.М., Кравченко І.В. Основні алгоритми обчислювальної геометрії [Електронний ресурс] – http://cg.unicyb.kiev.ua/
2. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики – М. Мир, 2001 – 604 с.
3. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия – М. Мир, 1989 – 478 с.

Аннотация

Приводятся алгоритмы построения выпуклой оболочки, позволяющие по набору точек получить минимальный выпуклый политоп, который можно применить для проектирования кольцевых перекрестков города.

Ключевые слова: *многоугольник, политоп, полупространство, полиедральное множество, гиперплоскость.*

Abstract

The paper reviews convex hull construction algorithms, which allow to get minimal convex polytope that can be used in designing circular city crossroads.

Keywords: *polygon, polytope, half-space, polyhedral set, hyperplane.*