УДК 514.182
к.т.н., доцент Ботвіновська С.І.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ТОЧКИ ПЕРЕГИНУ І СПРЯМЛІННЯ НА ДИСКРЕТНО ЗАДАНИХ КРИВИХ

Представлено результати дослідження, пов'язаного із заданням вузлів, на неперервних параболічних дискретно заданих кривих за статико-геометричним методом (СГМ), які відповідають точкам нульової кривини.

Ключові слова: дискретно задана крива, точки нульової кривини, неперервні параболічні криві, статико-геометричний метод.

Постановка проблеми. Дослідити можливості задання вузлів дискретно визначеної кривої (ДВК) за статико-геометричним методом (СГМ), які відповідають точкам нульової кривини на неперервних параболічних кривих.

Формування цілей та завдання статті. Метою даної роботи – є визначити можливості СГМ при моделюванні дискретних каркасів кривих ліній, які мають особливі точки. Завдання даної роботи – проаналізувати зміни форми ДВК під впливом різноманітного формоутворюючого вертикального зовнішнього навантаження. Визначити, як закон розподілу вертикального зовнішнього навантаження впливає на появу на ДВК точок перегину та точок спрямління.

Аналіз основних досліджень і публікацій. В численних публікаціях [1, 2, 3, 4], які присвячено формуванню дискретних каркасів плоских кривих не приділялось уваги заданню особливих точок ДВК.

Відомо [1], що при лінійному розподілі вертикального зовнішнього навантаження між вузлами дискретної моделі натягнутої нитки вона приймає форму параболи третього порядку

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \qquad (1)$$

де a_i – коефіцієнти параболи.

Така крива має одну точку перегину. Ця точка на дискретній моделі (рис.1) відповідає вузлу A, зовнішнє навантаження на який дорівнює нулю, оскільки, при нульовому навантаженні на цей вузол, він разом із двома суміжними вузлами належить одній прямій.

Основна частина. Нехай зовнішнє навантаження на вузли натягнутої нитки на інтервалі $[m, n]$ задано зусиллями P_{m+1} і P_{n-1} (рис.1).

Тоді, вертикальні зусилля зовнішнього навантаження на довільний вузол A_i можна підрахувати за формулою:

$$P_i = \frac{P_{n-1}(i-m-1) + P_{m+1}(n-i-1)}{n-m-2} \qquad (2)$$

де m і n – номери першого і останнього вузлів ламаної; P_i, P_{m+1}, P_{n-1} – навантаження у відповідних вузлах ДВК.

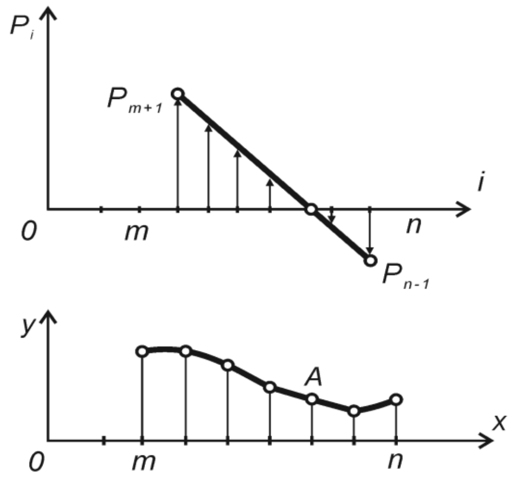

Рис. 1.

З формули (2) при $P_i=0$ можна визначити номер вузла, який відповідає точці перегину параболи (1):

$$i = \frac{P_{m+1}(n-1) - P_{n-1}(m+1)}{P_{m+1} - P_{n-1}}, \qquad (3)$$

де i – номер вузла ДВК.

Якщо параметр (i) приймає дробове значення, то точці перегину параболи відповідає точка дискретної моделі, яка знаходиться в інтервалі між двома відповідними вузлами.

Приклад. Задано координати трьох вузлів ламаної (***A***, ***B*** і ***C***). За вихідні умови приймаємо точки ДВК з координатами: ***A*** ($x_A=2;\ y_A=3$), ***B*** ($x_B=10;\ y_B=-2$), ***C*** ($x_c=8$; $y_c=1$). Задано також, що вузол ***C*** ($i_c=8$) є точкою перегину ДВК при лінійному розподілі зовнішнього навантаження. При умові $P_c=0$, згідно з формулою (2):

$$P_i = (i-8)P_{n-1}$$

Складаємо і розв’язуємо систему рівнянь рівноваги вузлів ДВК:

$$\begin{aligned}
&-2y_2 + y_4 - 5P_{n-1} + 2 = 0;\\
&y_3 - 2y_4 + y_5 - 4P_{n-1} = 0;\\
&y_4 - 2y_5 + y_6 - 3P_{n-1} = 0;\\
&y_5 - 2y_6 + y_7 - 2P_{n-1} = 0;\\
&y_6 - 2y_7 - P_{n-1} + 1 = 0;\\
&y_7 + y_9 - 2 = 0;\\
&-2y_9 + P_{n-1} - 2 = 0;
\end{aligned} \qquad (4)$$

В системі (4) невідомими є ординати проміжних вузлів: y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_9 і зовнішнє навантаження P_{n-1}. За результатами розв'язання системи (4), які наведено в таблиці 1, на рис. 2 побудовано дискретний точковий каркас ДВК.

Таблиця 1

i	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	3	4.9844	6.25	6.1406	5	3.1719	1	-1.1719

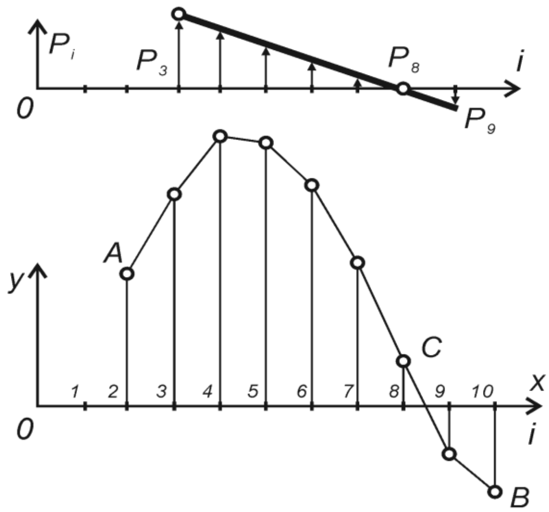

Рис. 2.

Парабола четвертого порядку

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \qquad (5)$$

має точку спрямління, де кривина дорівнює нулю. Дискретний аналог параболи (5) можна отримати за СГМ [1] при параболічному розподілі зовнішнього вертикального навантаження на вузли ДВК (рис.3) :

$$P_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2, \text{ або} \qquad (6)$$

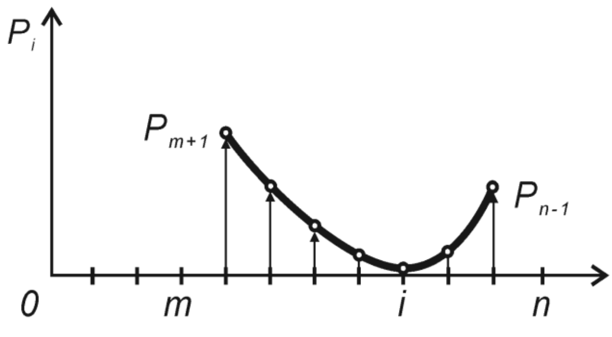

Рис. 3.

у рекурентному вигляді

$$P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1} + Q = 0, \tag{7}$$

де P_i – зовнішнє вертикальне навантаження на вузол при $i=2,\ldots, n-1$; Q – вільний член, надмножина $Q_i = Q = const$, яка керує законом розподілу зусиль P_i.

Якщо зовнішнє навантаження на вузли натягнутої нитки на інтервалі $[m, n]$ задано зусиллями P_{m+1}, P_{n-1}, коефіцієнти параболи (6) прийматимуть вигляд:

$$a_0 = \frac{P_{m+1}\left[(m+1)P_{n-1} - (n-1)P_{m+1} - (m-n+2)\sqrt{P_{m+1} \times P_{n-1}}\right]^2}{\left[(m-n+2)(P_{m+1} - \sqrt{P_{m+1} \times P_{n-1}}\right]^2};$$

$$a_1 = -\frac{2P_{m+1}(P_{n-1} - P_{m+1})\left[(m+1)P_{n-1} - (n-1)P_{m+1} - (m-n+2)\sqrt{P_{m+1} \times P_{n-1}}\right]}{\left[(m-n+2)(P_{m+1} - \sqrt{P_{m+1} \times P_{n-1}}\right]^2}; \tag{8}$$

$$a_2 = \frac{P_{m+1}(P_{n-1} - P_{m+1})^{\ 2}}{\left[(m-n+2)(P_{m+1} - \sqrt{P_{m+1} \times P_{n-1}}\right]^2},$$

де m і n – номери першого і останнього вузлів ламаної на інтервалі $[m, n]$; P_{m+1}, P_{n-1} – зовнішнє вертикальне навантаження у відповідних вузлах.

З рівняння (6) з коефіцієнтами (8) можна визначити номер вузла, який відповідає точці спрямління ДВК, яка відповідає навантаженню $P_i = 0$:

$$i = \frac{(m+1)P_{n-1} - (n-1)P_{m+1} - (m-n+2)\sqrt{P_{m+1} \times P_{n-1}}}{P_{n-1} - P_{m+1}} \tag{9}$$

Приклад. Задано координати трьох вузлів ДВК з одиничним кроком вздовж осі Ox: ***A*** ($x_A=1$ $y_A=5$), ***B*** ($x_B=11$; $y_B=2$), ***C*** ($x_c=5$; $y_c=2$). Задано також умову, що точка ***C*** є точкою спрямління ДВК.

З (9) при $i=5$ (для точки ***C***) отримаємо:

$$P_{10} = 2.7778P_2 \tag{10}$$

Рівняння (6) при умові (7) у даному випадку приймає вигляд:

$$P_i = \frac{P_2(i-5)^2}{9} \tag{11}$$

За формулою (11) визначаємо зусилля зовнішнього навантаження в усіх вузлах ДВК і складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів:

$$\begin{aligned}
&-2y_2 + y_3 + kP_2 + 5 = 0;\\
&y_2 - 2y_3 + y_4 + 0.4444kP_2 = 0;\\
&y_3 - 2y_4 + 0.1111kP_2 + 2 = 0;\\
&y_4 + y_6 - 4 = 0;\\
&-2y_6 + y_7 + 0.1111kP_2 + 2 = 0;\\
&y_6 - 2y_7 + y_8 + 0.4444kP_2 = 0;\\
&y_7 - 2y_8 + y_9 + P_2 = 0;\\
&y_8 - 2y_9 + y_{10} + 1.7778kP_2 = 0;\\
&y_9 - 2y_{10} + 2.7778kP_2 + 3 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

За результатами розв’язання системи (12), які наведено в табл. 2, на рис.4 побудовано точковий каркас ДВК.

Таблиця 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
kP_2	-	1	0.444	0.111	0	0.111	0.444	1	1.778	2.778	-
y_i	5	3.88	3.133	2.546	2	1.454	0.948	0.606	0.630	1.306	2

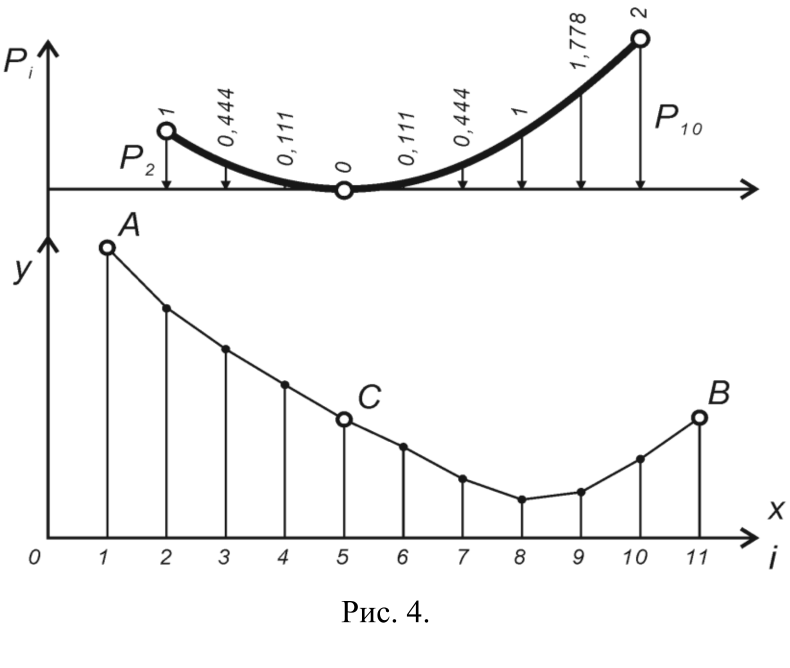

Рис. 4.

При довільній функції параметрів розподілу зовнішнього навантаження принцип визначення точки перетину або точки спрямління зала шиється незмінним, тобто такій точці кривої відповідає вузол, або проміжок між вузлами, де зусилля зовнішнього навантаження дорівнює нулю.

При цьому три суміжні вузли, середнім з яких є такий, що відповідає точці перегину або спрямління кривої, належить одній прямій.

Висновки та перспективи. Виконані дослідження дозволяють при конструюванні ДВК задавати вузол, який відповідає точці перегину або спрямління неперервного аналогу ДВК. Наведені задачі, звичайно, можна розв'язувати і в неперервній формі визначення кривої, але при узагальненні отриманих результатів на двовимірний випадок можна задавати особливі точки на дискретно визначених поверхнях, аналітичного рівняння яких отримати не можливо.

Література

1. *Ковалев С.М.* Формирование дискретних моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис…доктора. наук: 05.01.01. [Текст]/ С.М. Ковальов. – М.: МАИ, 1986. – 348 с.
2. *Золотова А.В.* Дискретна кускова інтерполяція точок при формуванні поверхонь в архітектурі: дис. … канд. техн. наук : спец. 05.01.01 [Текст]:/ А.В. Золотова. – К.: КНУБА, 2014. – 165 с.
3. *Ковтун О.Н.* Конструювання дискретних точкових каркасів квазіканалових поверхонь за наперед заданими умовами: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / О.М. Ковтун; Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. — К., 2003. — 20 с.: рис. — укр.
4. *Іванова Л.С.* Дискретне завдання поліному *N*-го ступеню [Текст] / Л.С. Іванова // Прикладна геометрія и інженерна графіка: зб. наук. праць. – Вип. 67.– К.: КНУБА, 2000. – С. 96-100.

Аннотация

В статье представлены результаты исследования, в котором были рассмотрены возможности задания узлов дискретно заданной кривой (ДЗК), которые будут соответствовать особым точкам, при использовании статико-геометрического метода (СГМ). Дискретная модель кривой была описана с помощью системы конечноразностных уравнений равновесия узлов и с использование изменения закона распределения вертикальных внешних усилий.

Приведены примеры конструирования плоских геометрических образов, когда задаются узлы кривой, что соответствуют точкам перегиба или уплощения (точкам нулевой кривизны) на непрерывном аналоге дискретно заданной кривой. После обобщения полученных результатов на двумерном случае, исследование будет развиваться путем задавания особых точек на дискретных поверхностях, у которых невозможно записать аналитическое уравнение.

Ключевые слова: дискретный каркас кривой линии, точки нулевой кривизны, непрерывные кривые параболического типа, статико-геометрический метод.

Annotation

The article presents the results of the study, which examined the possibility of the task nodes in discrete preset curve. These points will be analogs of singular points of continuous curves, when using a static-geometric method. Discrete model curve was described using the system of finite difference equations of equilibrium equations the nodes and using the change of the distribution law of the vertical external forces.

Examples are seeing of design of flat discrete curves, when we can set the special points, the inflection point and a flattening (points of zero curvature) on the continuous analogue of discretely given curve.

After generalization of the got results on a two-dimensional case, the researches will be continued on the discrete surfaces by specifying particular points on the surface. All this will touch surface, for which is not possibility to write down analytical equation.

Kay words: a discrete curve line, points of a zero curvature, the continuous curve of parabolic type, a static-geometric method.