

УДК 528.48

Куліченко Н.В.,

Київський національний університет будівництва і архітектури

## ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ПРОСТОРОВИХ ОБОЛОНОК ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД ДЛЯ ЦІЛЕЙ ГЕОДЕЗИЧНОГО МОНІТОРИНГУ ЗА ДАНИМИ НАЗЕМНОГО ЛАЗЕРНОГО СКАНУВАННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ГРУБИХ ПОМИЛОК

*Наведено методику виявлення деформацій просторових оболонок шляхом математичного моделювання досліджуваних поверхонь. Розглянуто особливості моделювання поверхонь за даними наземного лазерного сканування за умови наявності грубих помилок у результатах сканування. Розглянуто існуючі методи оброблення даних, що спотворені грубими помилками. За експериментальними даними сканування перевірено ефективність моделювання поверхонь методами: найменших квадратів, варіаційно-зважених наближень, середньої квадратичної колокації, найменших модулів. За результатами моделювання найбільш ефективними виявилися метод середньої квадратичної колокації та метод варіаційно-зважених наближень.*

*Ключові слова: метод найменших квадратів, рекурентний метод найменших квадратів, метод середньої квадратичної колокації, метод варіаційно-зважених наближень, груба помилка, деформація оболонки.*

**Постановка проблеми** Просторові оболонки є одними з найскладніших інженерних конструкцій. Виконання геодезичного моніторингу за такими конструкціями вимагає врахування конструктивних особливостей просторових оболонок. Однією з таких особливостей є необхідність визначення переміщень оболонок одночасно у великій кількості точок. На відміну від простих інженерних конструкцій для яких достатньою є фіксація переміщень у декількох точках для розрахунку деформаційних характеристик (осідання, крен, кручення та ін.), для оболонок необхідно визначати переміщення у багатьох точках для побудови не поля деформації оболонки. Такі вимоги зумовлені тим, що при загальній стабільності оболонки, виникнення локальних переміщень поверхні оболонки, може призвести до загальної втрати стійкості всієї конструкції. В такому випадку використовують такий термін, як суцільний моніторинг.

Ведення суцільного моніторингу можливе при використанні роботизованих тахеометрів, наземної фотограмметрії або наземного лазерного сканування. При цьому, якщо порівнювати ці технології за критеріями

точність/щільність точок/автоматизація оброблення, то найбільш ефективним є метод наземного лазерного сканування.

Дані наземного лазерного сканування мають дуже високу щільність, проте технологія вимірювання координат точок, що базується на режимі без відбивача, може призвести до появи грубих помилок в результатах сканування. Враховуючи, що навіть для найпростіших об'єктів типовий об'єм скану складає 2 млн. точок, постає питання, як виконати фільтрування грубих помилок та виключити їх з подальшого оброблення.

Технологія та алгоритм ідентифікації грубих помилок у даних наземного лазерного сканування залежить від алгоритму моделювання поверхні оболонки. Однак, слід брати до уваги той факт, що просторові оболонки описуються строгими математичними моделями поверхонь або їх комбінаціями. Тому завдання за даними сканування оцінити реальну модель просторової оболонки та порівняти її із проектною. Звичайно, що грубі помилки будуть суттєво впливати на точність оцінювання моделі. З іншого боку чітке визначення зон з недопустимим відхиленнями від проектної моделі дозволить встановити реальні ділянки переміщення частин оболонки.

Отже визначення та локалізація грубих помилок при виконанні геодезичного моніторингу за результатами наземного лазерного сканування є вкрай важливим та актуальним завданням інженерної геодезії.

**Огляд попередніх публікацій** Метою представленої роботи є аналіз та дослідження математичних методів ідентифікації грубих помилок. При цьому такі алгоритми можуть бути застосовані при оцінюванні математичних моделей поверхонь не тільки за даними наземного лазерного сканування. Серед відомих математичних методів оцінювання було розглянуто: метод найменших квадратів [3,4], рекурентний метод найменших квадратів [4]; метод найменших модулів у формі запропонований проф. С.Г. Могильним; метод варіаційно-зважених наближень розроблений проф. Т.Т. Чмчяном; метод середньої квадратичної колокації [5,7]. Всі ці методи належать до методів, що дозволяють, на відміну від методів фільтрування і згладжування [6], оцінювати параметри математичних моделей поверхонь.

Методика та алгоритми оцінювання параметрів різних математичних поверхонь достатньо повно висвітлені у роботах [1,2]. Ще раз відмітимо, що ми не розглядаємо технологічні аспекти виконання геодезичного моніторингу методом наземного лазерного сканування. Наведені вище методи, окрім методу найменших квадратів, не досліджувались при обробленні даних лазерного сканування.

**Постановка завдання** Головне завдання роботи – це дослідження різних математичних методів оцінювання параметрів просторових оболонок на

предмет їх стійкості до впливу грубих помилок у результатах наземного лазерного сканування.

**Основний зміст роботи.** Похибки визначення будь-якої точки на поверхні оболонки зазнають впливу цілого ряду випадкових факторів – випадкових величини, для оцінки яких необхідно мати відомості про закон їх розподілу. Звичайно для спрощення досліджень закон розподілу похибок приймається нормальним. В цьому випадку вичерпними характеристиками розподілу похибок є математичне сподівання та середня квадратична похибка, а для оцінювання параметрів застосовують класичний метод найменших квадратів (МНК). Використання традиційного МНК можливе за умови, що результати сканування не обтяжені різного роду систематичними похибками та грубими помилками. Поява грубих помилок у результатах спостережень може бути викликана багатьма факторами. Загалом відомо, що виникнення грубих помилок може бути спричинене раптовою зміною на значну величину одного з компонентів комплексу умов спостережень: об'єкту спостережень, приладу, зовнішніх умов, методу та зміною факторів, які пов'язані зі спостерігачем, який виконує спостереження. Загалом відомо, що грубі помилки сильно спотворюють результати спостережень та зрівнювання і повинні бути виключені з результатів оброблення. З метою послаблення впливу грубих помилок використовують різні варіації МНК. Розглянемо наступні методи.

### Рекурентний метод найменших квадратів (РМНК)

Проф. Ю.І. Маркузе вперше довів можливість контролю грубих похибок за вільними членами рівнянь поправок для надлишкових вимірів при рекурентному вирівнюванні. Для врахування вимірювання  $y_i$  з вагою  $p_i$  та рівнянням поправок

$$v_i = a_i \delta x_i + l_i,$$

де  $l_i = f_i(x_{i-1}) + y_i$ ,  $f_i$  - вектор функції зв'язку, використовують наступні рекурентні формули:

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_{i-1} - (1/g_i) z_i^T z_i; \\ x_i &= x_{i-1} + (1/g_i) z_i^T l_i; \\ \Phi_i &= \Phi_{i-1} + l_i^2 / g_i \end{aligned} \quad (1)$$

при  $i = 1$ ;  $\Phi_0 = 0$ , де

$$\begin{aligned} z_i^T &= Q_{i-1} a_i^T; \\ g_i &= p_i^{-1} + a_i z_i^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо  $i$ -е вимірювання надлишкове, то контроль грубих помилок виконується шляхом порівняння вільного члена  $l_i$  з його допустимим значенням

$$(l_i)_{\text{ДОП}} = \pm t \sigma_0 \sqrt{g_i}; \quad (3)$$

де  $g_i$  відоме, коефіцієнт  $t$  вибирають в залежності від прийнятої ймовірності,  $\sigma_0$  - апіорна дисперсія одиниці ваги. Якщо  $\sigma_0$  невідома то її заміняють оцінкою

$$\mu_i = \sqrt{\Phi_i / r_i}, \quad (4)$$

а коефіцієнт  $t$  вибирають з таблиць Стюдента.

### Метод варіаційно-зважених наближень (МВЗН)

Якщо помилки спостережень із якоїсь причини мають залишкову систематичну похибку то рекомендується виконувати ітераційний процес з послідовним уточненням вагової матриці  $\mathbf{P}_{(j)}$ . Цей різновид МНК називається методом варіаційно-зважених наближень.

На початковому етапі матриця ваг встановлюється одиничною. Після виконання зрівнювання за схемою звичайного МНК обчислюють матрицю ваг за виразом:

$$\mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{(v_1^2)_{j-1}}{\mu_{j-1}^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{(v_2^2)_{j-1}}{\mu_{j-1}^2}\right) & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \exp\left(\frac{(v_n^2)_{j-1}}{\mu_{j-1}^2}\right) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ітераційний процес виконують до тих пір доки відхилення між похибками одиниць ваги в сусідніх ітераціях не стануть меншими від наперед заданої величини.

### Метод середньої квадратичної колокації (МСКК)

Цей метод дає можливість врахувати кореляційні зв'язки між спостереженнями. Проф. Г. Моріц ввів "вектор сигналу" для опису стохастичних параметрів, що не ввійшли в параметричну модель. Цей вектор сигналу описується в термінах коваріаційної матриці та математичного сподівання. Такий підхід дозволяє суттєво розширити можливості МНК. Розглянемо параметричну модель даних:

$$\mathbf{A}\Delta + \mathbf{\Omega}y + \mathbf{v} = \mathbf{l}. \quad (6)$$

Член  $\mathbf{\Omega}y$  представляє параметри які є стохастичними. Якщо кількість стохастичних параметрів  $m$  то,

$$\mathbf{A}\Delta + \mathbf{\Omega}\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \mathbf{\Omega}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{v} = \mathbf{A}\Delta + (\mathbf{\Omega}_1 \quad \mathbf{\Omega}_2 \quad \dots \quad \mathbf{\Omega}_m) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_m \end{pmatrix} + \mathbf{v} = \mathbf{l}.$$

Після складних перетворень отримують вирази для оцінки постійних та стохастичних параметрів.

$$\Delta = \left[ \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_w + \mathbf{\Omega} \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T)^{-1} \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_w + \mathbf{\Omega} \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T)^{-1} \mathbf{l} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T (\mathbf{\Omega} \mathbf{Q}_y \mathbf{\Omega}^T + \mathbf{Q}_w)^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\Delta)$$

Вирази для оцінки за МНК та МСКК співпадають за своєю структурою. МСКК може бути інтерпретований, як узагальнений МНК з повною матрицею апіорних коваріаційних похибок спостережень.

### Метод найменших модулів (МНМ)

Досить часто наявність грубих похибок у результатах вимірювань сильно спотворює результати вирівнювання. В такому випадку ефективним є застосування так званих «робастих» методів, які є стійкими до значних похибок.

Застосовуючи варіаційний принцип методу найменших модулів, будують ітераційний процес за наступними формулами:

$$\mathbf{K}_{(j)} = (\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_{(j-1)}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} (\tilde{\Delta}_{(j-1)} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{y});$$

$$\mathbf{V}_x^{(j)} = \tilde{\mathbf{P}}_{(j-1)}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{K}_{(j)}; \quad (8)$$

$$\tilde{\Delta}_{(j)} = \frac{\mathbf{I}^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{(j-1)}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{(j-1)}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{I}}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\sigma_1 |v_1^{(j-1)}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\sigma_2 |v_2^{(j-1)}|} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\sigma_m |v_m^{(j-1)}|} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Формули (8-9) реалізують строге рішення задачі МНМ, але такий алгоритм виявляє грубі помилки у вихідних вимірюваннях, а не у векторі  $\mathbf{y}$ , який необхідно проаналізувати. Тому в остаточному вигляді запишемо формули для ітераційного процесу МНМ.

$$\Delta_{(j+1)} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{P}}_{(j)} \mathbf{Q} \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{P}}_{(j)} \mathbf{Q} \mathbf{I}}; \quad (10)$$

$$\Lambda_{(j)} = \mathbf{Q} \mathbf{y} - \Delta_{(j)} \mathbf{Q} \mathbf{I}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(j)} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{|\lambda_1^{(j)}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{|\lambda_1^{(j)}|} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{|\lambda_1^{(j)}|} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Початок ітерацій починається за наступних умов:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{(j)} = \mathbf{E};$$

$$\Delta_{(j+1)} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{I}} = \frac{\mathbf{I}^T \mathbf{P}_y \mathbf{y}}{\mathbf{I}^T \mathbf{P}_y \mathbf{I}}.$$

З останнього виразу видно, що узагальнене середнє вагове є початковим наближенням в МНМ. МНМ не достатньо досліджений, однак загально відомо, що його застосування дозволяє автоматично локалізувати грубі похибки навіть в корельованих результатах спостережень.

Для дослідження впливу грубих помилок на результати обробки та визначення методу, який найбільш вдало дозволяє виключити грубі помилки було проведено обробку результатів спостережень за просторовою оболонкою сферичного типу.

Матеріали спостережень отримані в результаті лазерного сканування поверхні оболонки і містять значний об'єм даних 2638 точок. На рис. 1 наведено загальний вигляд сферичної оболонки у вигляді хмари точок в різних ракурсах, після попереднього оброблення в програмах, що поставляються з лазерним сканером. Згідно з попередніми розрахунками середня квадратична похибка визначення просторового положення точки - 2.5 мм.

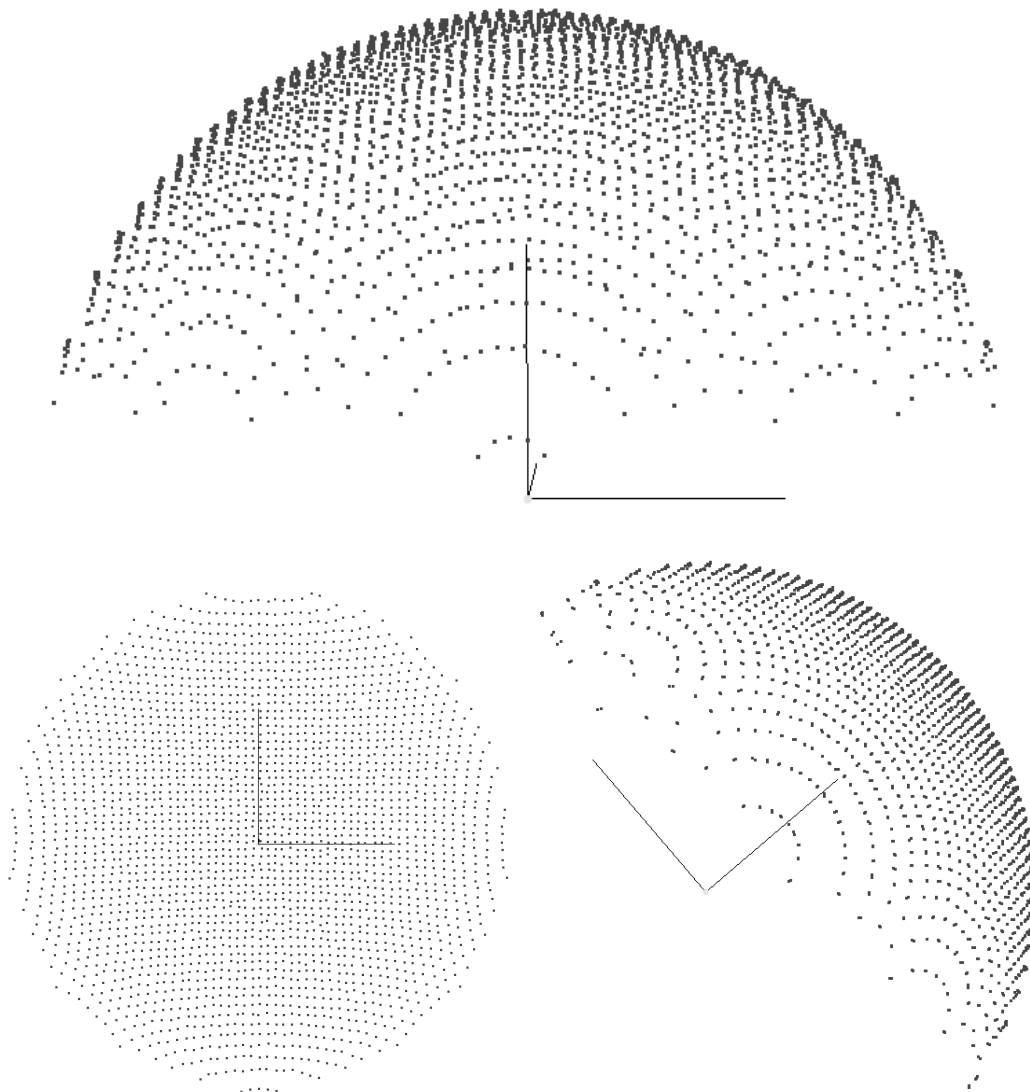


Рис. 1. Загальний вигляд сферичної оболонки

В результаті спостережень було штучно введено грубі помилки +10, +20 та +30 мм. Порядок введення грубих помилок був довільним. За відсутності грубих помилок отримано наступні результати табл. 1.

Таблиця 1

**Результати оцінювання за відсутності грубих помилок**

Метод	X, м	Y, м	Z, м	R, м
МНК	-0,0003	0,0013	-52,3773	10,0037
РМНК	0,0013	-0,0020	-52,3794	10,0046
МВЗН	0,0003	0,0008	-52,3770	10,0033
МСКК	-0,0003	0,0013	-52,3772	10,0035
МНМ	0,006	-0,0019	-52,3783	10,0035

За таких умов всі методи дають практично однаковий результат. Цікавим в такому випадку є аналіз графіків поправок для деяких методів рис. 2.

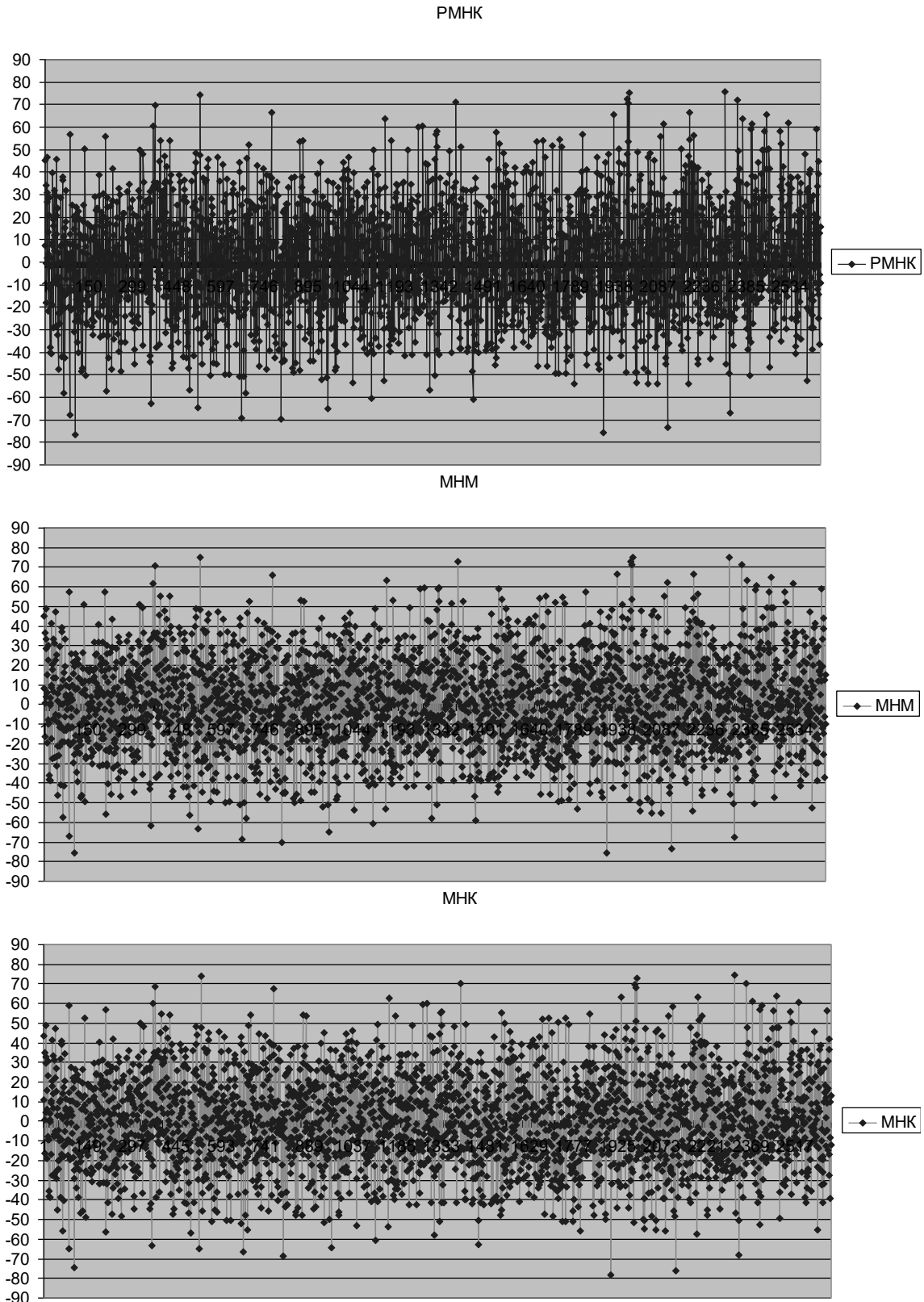


Рис. 2. Графіки поправок при обробці різними методами

Якщо ввести грубі помилки +10 мм то результати практично не змінюються. Це пов'язане з тим, що на оболонці присутні значні деформації. В рамках прийнятих моделей обробки деформації досягають 75 мм. За



присутності грубих помилок на рівні + 10 мм, які були штучно введені у висотну складову для 45 точок отримано наступні результати табл. 2.

Таблиця 2

**Результати оцінювання за присутності грубих помилок +10 мм**

Метод	X, м	Y, м	Z, м	R, м
МНК	-0,0001	0,0011	-52,3775	10,0042
РМНК	-0,0004	-0,0024	-52,3798	10,0051
МВЗН	0,0003	0,0008	-52,3775	10,0038
МСКК	-0,0002	0,0015	-52,3778	10,0045
МНМ	0,003	-0,0007	-52,3821	10,0069

Цікаво відмітити, що РМНК визнав за грубі 28 точок з яких дійсно спотвореними були лише 7. Як і очікувалось МНМ є достатньо стійким до впливу грубих помилок. Вирізняється також стабільність МВЗН.

Якщо ввести грубі помилки +20 мм то результати сильно змінюються один відносно одного. За присутності грубих помилок на рівні + 20 мм, які були штучно введені у висотну складову для 45 точок отримано наступні результати табл. 3.

Таблиця 3

**Результати оцінювання за присутності грубих помилок +20 мм**

Метод	X, м	Y, м	Z, м	R, м
МНК	-0,0008	0,0018	-52,3765	10,0032
РМНК	-0,0007	-0,0019	-52,3788	10,0041
МВЗН	0,0003	0,0008	-52,3775	10,0038
МСКК	-0,0002	0,0015	-52,3778	10,0045
МНМ	0,0013	-0,0019	-52,3783	10,0035

При наявності грубих помилок такого рівня було ідентифіковано 44 точки з яких дійсно спотвореними були 31, несподіваним є практична стабільність МВЗН та МСКК.

Якщо ввести грубі помилки +30 мм то результати вже сильно змінюються один відносно одного. За присутності грубих помилок на рівні + 30 мм, які були штучно введені у висотну складову для 45 точок отримано наступні результати табл. 4.

Таблиця 4

**Результати обробки за присутності грубих помилок +40 мм**

Метод	X, м	Y, м	Z, м	R, м
МНК	0,0001	-0,0011	-52,3752	10,0064
РМНК	-0,0006	0,0012	-52,3777	10,0040
МВЗН	-0,0003	0,0012	-52,3775	10,0032
МСКК	-0,0001	0,0017	-52,3780	10,0046
МНМ	0,0013	-0,0019	-52,3783	10,0035

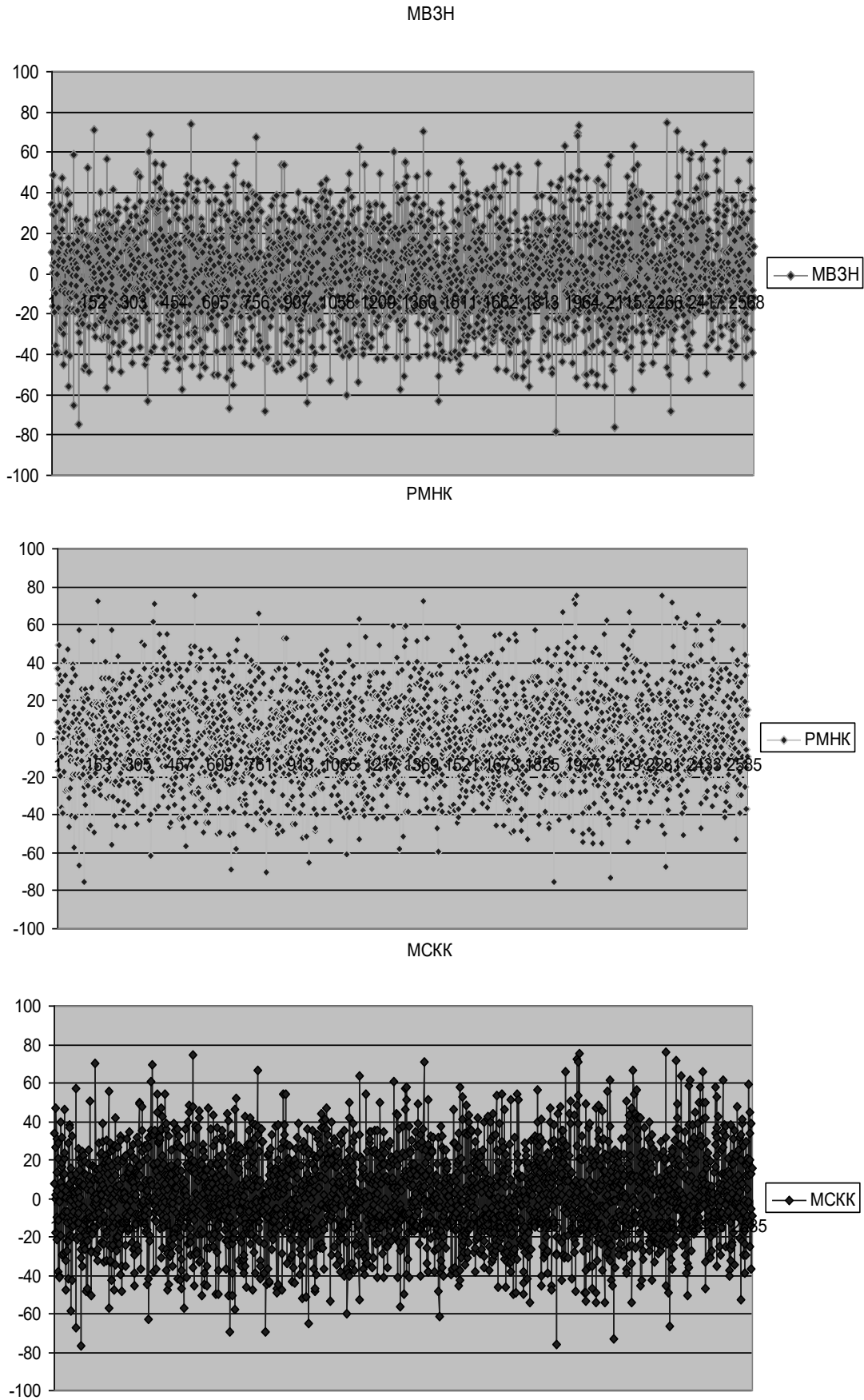


Рис. 3. Графіки поправок при обробленні різними методами

При наявності грубих помилок такого рівня було ідентифіковано 44 точки з яких дійсно спотвореними були 42, тому можна констатувати, що при величині грубої похибки на рівні  $1/3$  від рівня деформації, похибка впевнено виключається РМНК. Несподіваною є втрата стабільності МНМ. Достатньо впевнено оцінюються параметри оболонки за МВЗН та МСКК.

**Висновки та рекомендації.** Загалом можна стверджувати, що найбільш надійними методами при обробленні результатів, що мають грубі похибки є методи середньої квадратичної колокації та метод варіаційно-зважених наближень. Рекурентний метод найменших квадратів достатньо надійно ідентифікує грубі помилки при їх значній величині.

Окрім виключення грубих помилок, важливим є послаблення впливу систематичних похибок. Подальші дослідження будуть спрямовані на вирішення цього завдання.

### Список літератури

1. Elkhrachy, I. Towards an Automatic Registration for Terrestrial Laser Scanner Data [Text]: Thesis for the Degree of Master of Science / I. Elkhrachy. - Braunschweig, 2008 – p. 128.
2. Rabbani, T. Automatic Reconstruction of Industrial Installations Using Point Clouds and Images [Text]: Thesis for the Degree of Doctor of Science /T. Rabbani. - Delft, 2006 – p. 175.
3. Журкин, И.Г., Нейман, Ю.М. Методы вычислений в геодезии. – М.: Недра, 1988 – 304 с.
4. Маркузе, Ю.И. Основы уравнительных вычислений. – М.: Недра, 1990. – 240 с.
5. Мориц, Г., Современная физическая геодезия. – М.: Недра, 1980 – 324 с.
6. Поляк, И.И. Численные методы анализа наблюдений. – Л.: Гидрометеоздат, 1975 – 211с.
7. Титов, О.А., Применение среднеквадратической коллокации для обработки РСДБ наблюдений /О.А. Титов// Сообщения ИПА РАН, СПб.: - 1996 №96.

### Аннотация

Приведена методика определения деформаций пространственных оболочек путем математического моделирования исследуемых поверхностей. Рассмотрены особенности моделирования поверхностей по данным наземного лазерного сканирования при наличии грубых ошибок в результатах сканирования. Рассмотрены существующие методы обработки данных,

искаженных грубыми ошибками. На основе экспериментальных данных сканирования проверена эффективность моделирования поверхностей методами: наименьших квадратов, вариационно-взвешенных приближений, средней квадратической коллокации, наименьших модулей. По результатам моделирования наиболее эффективными оказались метод средней квадратичной коллокации и метод вариационно-взвешенных приближений.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, рекуррентный метод наименьших квадратов, метод средней квадратической коллокации, метод вариационно-взвешенных приближений, грубая ошибка, деформация оболочки.

### **Annotation**

The methodic of determining the spatial shells deformations by mathematical modeling of the investigated surfaces was showed. The features of surface modeling by the terrestrial laser scanning data in the presence of blunders in the scan results were considered. The existing methods of data processing, which were distorted by blunders, were considered. Based on experimental data, the efficiency of the scanning surface modeling methods: least squares, variation-weighted approximations, the average quadratic collocation, least modules was checked. According to the simulation, results proved the most effective methods of mean-square collocation and variation-weighted approximations method.

Keywords: method of least squares, recursive least squares, mean square collocation method, the method of variation-weighted approximations, blunder, shell deformation.