

УДК 539.3

к.т.н. Левківський Д.В., Янсонс М.О.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРОЕКЦІЙНОГО МЕТОДУ В ЗАДАЧІ ЗГИНУ БАЛКИ

Розглянуто проєкційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова для зниження вимірності диференціальних рівнянь осі зігнутої балки. Для цього використовуються локальні базисні функції. Всі математичні перетворення виконуються у індексній формі. Проведено дослідження збіжності чисельних результатів з точним розв'язком при різному кроці розбиття для шарнірної балки, навантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням. Визначено оптимальний крок розбиття для запропонованого проєкційного методу.

Ключові слова: проєкційний метод, базисні функції, згин балки, метод початкових параметрів.

Для розв'язання задач опору матеріалів, теорії пружності використовуються комбіновані аналітично-чисельні методи (МСЕ, варіаційні, різницеві, проєкційні методи та ін.). Дані методи в певних модифікаціях використовують для зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь алгоритми, побудовані на проєкційних співвідношеннях.

Проєкційні методи поділяються на окремі напрямки в залежності від вибору базисних функцій та граничних умов: метод Рітца, Бубнова-Гальоркіна, метод найменших квадратів, метод Гальоркіна-Петрова та ін.

Великі перспективи для впровадження має проєкційний метод Гальоркіна-Петрова, який ще називають методом поділу областей. Це пов'язано з вибором базисних функцій, які приймаються локально на кожній суміжній ділянці розбиття.

У даній роботі запропоновано використовувати найпростіші базисні кусково-лінійні функції (які часто називають функціями кришками), зображені на рис. 1.

Множина таких функцій створює косокутну базисну систему. При використанні якої виникають певні особливості, пов'язані з записом редукованих рівнянь та граничних умов. Ці особливості були описані в роботах [1-4], в них в комбінації з проєкційним методом для розв'язання редукованих диференціальних рівнянь використовувався метод дискретної ортогоналізації С.К.Годунова. Тому складно робити висновки про точність саме проєкційного методу та доцільність вибору запропонованих функцій.

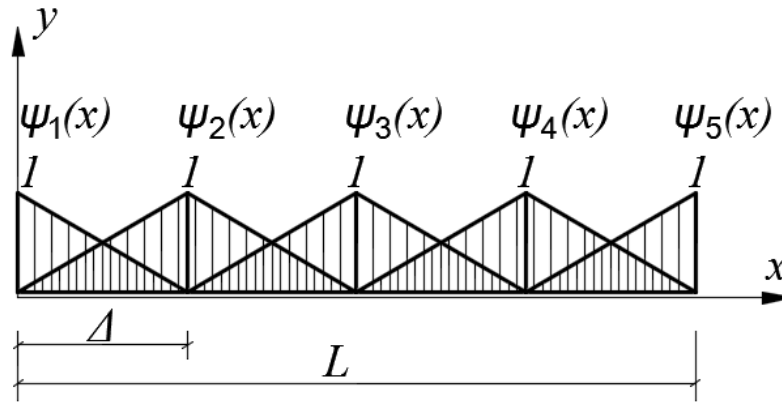


Рис.1. Базисні функції

Для дослідження точності проєкційного методу розглянемо кластичну задачу згину балки, зображену на рис. 2.

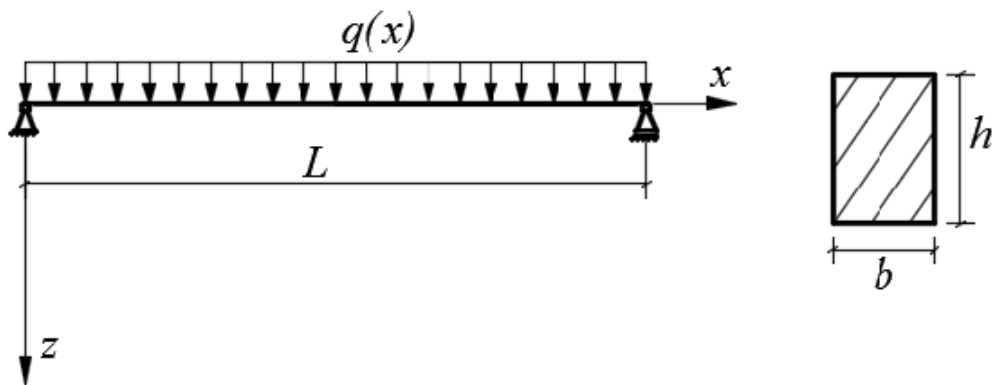


Рис.2. Балка на двох опорах

Рівняння, що описують згин центральної осі балки мають вигляд (1):

$$\begin{cases} \frac{dW}{dx} = \varphi \\ \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI_y} \\ \frac{dQ}{dx} = -q \\ \frac{dM}{dx} = Q \end{cases} \quad (1)$$

У рівняннях для зручності математичних обчислень проводимо заміну $\varphi^* = EI_y \cdot \varphi$, $W^* = EI_y \cdot W$, при цьому функції переміщень та зусиль мають один порядок.

Зниження вимірності будемо виконувати по одній просторовій координаті - x . Система диференціальних рівнянь зводиться до системи алгебраїчних рівнянь, тому систему рівнянь (1) зручно записати у вигляді (2):

$$\begin{cases} \frac{dW^*}{dx} - \varphi^* = 0 \\ \frac{d\varphi^*}{dx} + M = 0 \\ \frac{dQ}{dx} = -q \\ \frac{dM}{dx} - Q = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Граничні умови представляються в загальному вигляді, використовуючи пружини певної жорсткості. Такий підхід дозволяє задати жорстке защемлення, шарнір, вільний край, осадку опори або певні проміжні граничні умови (рис.3).

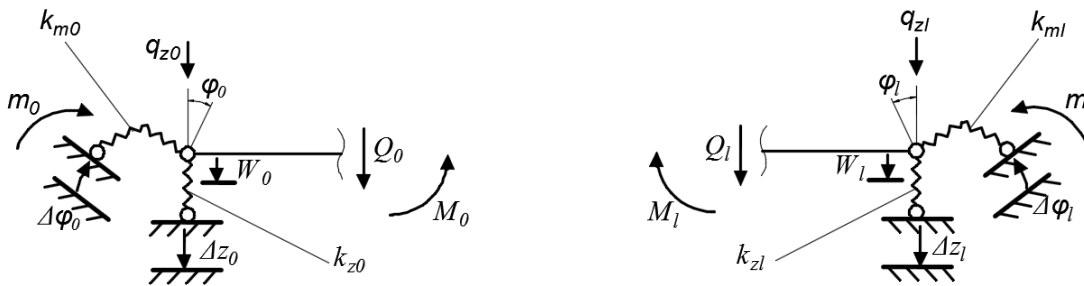


Рис.3. Граничні умови

Проектуючи записані граничні умови на вертикальну та горизонтальну осі, отримаємо рівняння (3):

$$\begin{aligned} Q^0 &= -q_z^0 + k_{z0} \cdot W_0 - k_{z0} \cdot \Delta z_0 \\ Q^l &= q_z^l - k_{zl} \cdot W_l + k_{zl} \cdot \Delta z_l \\ M^0 &= -k_{M0} \cdot \varphi_0 + k_{M0} \cdot \Delta \varphi_0 + m_0 \\ M^l &= -k_{Ml} \cdot \varphi_l + k_{Ml} \cdot \Delta \varphi_l + m_l \end{aligned} \quad (3)$$

Для зниження вимірності, будь-яка функція системи (2) записується у вигляді лінійної комбінації $f(x) = \psi_j(x) \cdot f^j$, а нев'язка розв'язку скалярно множиться на основну базисну систему $\psi_i(x)$.

$$\frac{d(W^{*j}\psi_j(x))}{dx} - \varphi^{*j}\psi_j(x) = 0 \quad |\cdot\psi_i(x)$$

$$W^{*j} \cdot \int_0^l \frac{d\psi_i(x)}{dx} \psi_j(x) dx - \varphi^j \int \psi_i(x)\psi_j(x) dx =$$

$$= b_{ij} \cdot W^{*j} - g_{ij} \varphi^{*j}$$

$$\frac{d(\varphi^{*j}\psi_j(x))}{dx} + M^j\psi_j(x) = 0 \quad |\cdot\psi_i(x)$$

$$\varphi^{*j} \cdot \int_0^l \psi_i(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx + M^j \cdot \int_0^l \psi_i(x) \cdot \psi_j(x) dx = 0, \quad b_{ij} \varphi^{*j} + g_{ij} M^j = 0$$

Базисні функції не задовольняють граничним умовам, тому інтегрування зусиль виконується інтегруванням частинами:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad |\cdot\psi_i(x)$$

$$\int_0^l \frac{dQ}{dx} \psi_i(x) dx = -q_i$$

$$\int_0^l \frac{dQ}{dx} \psi_i(x) dx = \left| \begin{array}{l} \psi_i(x) = U \\ dU = \psi'_i(x) dx \\ dQ = dU \\ U = Q \end{array} \right| = Q \cdot \psi_i(x) \Big|_0^l - \int_0^l Q \cdot \psi'_i(x) dx =$$

$$= [Q^l - Q^0] - \int_0^l Q^j \psi_j \psi'_i(x) dx = [Q^l - Q^0] - b_{ji} Q^j = -q_i.$$

$$\frac{dM}{dx} - Q = 0 \quad |\cdot\psi_i(x)$$

$$\int_0^l \frac{dM}{dx} \psi_i(x) dx - \int_0^l Q \cdot \psi_i(x) dx = 0$$

$$\left[M^l - M^0 \right] - b_{ji} M^j - Q_i = 0$$

Рівняння, виведені вище містять елементи з верхніми та нижніми індексами, їх потрібно узгодити між собою. Для цього домножимо кожне рівняння на двічі контраваріантний метричний тензор - $\{g^{\alpha i}\}$.

$$\begin{cases} g^{\alpha i} b_{ij} W^{*j} - \varphi^{*j} = 0 \\ g^{\alpha i} b_{ij} \varphi^{*j} + M^j = 0 \\ g^{\alpha i} \cdot [Q^l - Q^0] - g^{\alpha i} b_{ji} Q^j = -q^\alpha \\ g^{\alpha i} \cdot [M^l - M^0] - g^{\alpha i} b_{ji} M^j - Q^\alpha = 0 \end{cases} \quad (4)$$

У результаті отримана система алгебраїчних рівнянь (4) разом з граничними умовами (3) розв'язується стандартними математичними методами.

Для перевірки отриманих чисельних результатів розглянемо балку на двох шарнірних опорах довжиною 1 м, навантажену рівномірно-розподіленим навантаженням $q = 1 \text{ кН} / \text{м}$, $E = 10^7 \text{ кН} / \text{м}^2$, $h = 0,2 \text{ м}$, $b = 0,2 \text{ м}$.

Для даної балки відомо аналітичний розв'язок, отриманий методом початкових параметрів. У таблиці 1 наведені значення переміщень та зусиль проекційним методом при різному кроці розбиття та методом початкових параметрів.

Як видно з таблиці при розбитті на 19 ділянок, крок 1/18 м результат співпадає з методом початкових параметрів, а вже при подальшому зменшенні кроку елементи матриць округлюються та накопичують похибку.

Таблиця 1

Метод	крок	$Q, \text{кН}$ ($x = 0$)	$M, \text{кНм}$ ($x = 0.5$)	$EI\varphi$ $\text{кНм}^2 \text{рад}$ ($x = 0$)	EIw кНм^3 ($x = 0.5$)
1	2	3	4	5	6
Проекційний метод	1/2	0.5000	0.0833	0.0417	0.0139
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	33	0	7

1	2	3	4	5	6
Проекційний метод	1/4	0.5000	0.1458	0.0417	0.0139
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	17	0	7
Проекційний метод	1/6	0.5000	0.1204	0.0417	0.0132
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	4	0	1
Проекційний метод	1/8	0.5000	0.1146	0.0417	0.0132
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	8	0	2
Проекційний метод	1/10	0.5000	0.1233	0.0417	0.0131
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	1	0	1
Проекційний метод	1/12	0.5000	0.1204	0.0417	0.0131
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	4	0	1
Проекційний метод	1/14	0.5000	0.1241	0.0417	0.0131
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	1	0	0
Проекційний метод	1/16	0.5000	0.1224	0.0417	0.0131
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	2	0	0
Проекційний метод	1/18	0.5000	0.1245	0.0417	0.0130
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	0	0	0
Проекційний метод	1/20	0.5000	0.1233	0.0417	0.0131
Метод початкових параметрів		0.5000	0.1250	0.0417	0.0130
Відносна похибка %		0	1	0	0

Висновки: Проекційний метод Гальоркіна-Петрова має великі перспективи для розвитку і по алгоритмічності і зручності не поступається МСЕ, класичним методам опору матеріалів. Може бути застосований для більшості не тільки одновимірних а й багатовимірних задач опору матеріалів.

Література

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – С. 413-423.
2. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013 – С. 613-624.
3. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т. Метод прямих у просторовій задачі теорії пружності // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» - 2011 – випуск №86, - С. 109-117.
4. Станкевич А.М., Левківський Д.В. Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 49 – К.: КНУБА, 2013 – С. 509-521.

Аннотація

В данной работе рассмотрен проекционный метод Бубнова-Галеркина-Петрова для снижения размерности дифференциальных уравнений оси изогнутой балки. Для этого используются локальные базисные функции. Все математические преобразования выполняются в индексной форме. Проведено исследование сходимости численных результатов с точным решением при различном шаге разбиения для шарнирной балки, нагруженной равномерно-распределенной нагрузкой. Определен оптимальный шаг разбиения для предложенного проекционного метода.

Ключевые слова: проекционный метод, базисные функции, изгиб балки, метод начальных параметров.

Annotation

In this paper we consider the projection method Bubnov-Galerkin-Petrov for reducing the dimension of the differential equations of the curved axis of the beam. It uses local basis functions. All mathematical transformation performed in index form. A study of the convergence of numerical results with exact solutions at different partitioning step to hinged beams, loaded uniformly distributed load. Defined the optimal step of division axis to the beams, by using the proposed projection method.

Key words: projection method, basis functions, bending beam, method of initial parameters.