УДК 519.17

к.ф.-м.н., доц. Забарило А.В.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Приведены основные типы задач, для решения которых могут быть применены средства и методы теории графов. Описаны базовые подходы, позволяющие получить соответствующие результаты для используемых моделей и интерпретировать их в исходной постановке.

Ключевые слова: теория графов, многополюсная сеть, транспортная задача, кратчайший путь, максимальный поток.

Развитие теории графов в основном обязано большому числу всевозможных приложений. По-видимому, из всех математических объектов графы занимают одно из первых мест в качестве формальных моделей реальных систем.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась двести с лишним лет назад в ходе решения головоломок. Первая работа о графах появилась в 1736 году в публикациях Петербургской академии наук. Она принадлежит Леонарду Эйлеру и связана с решением задачи о кёнигсбергских мостах. Вопрос заключался в том, можно ли совершить прогулку так, чтобы выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя в точности по одному разу каждый из семи мостов, соединяющих четыре части суши.

Толчок к развитию теория графов получила на рубеже XIX–XX столетий, когда резко выросло число работ в области топологии и комбинаторики, с которыми её связываю самые тесные узы родства. Как отдельная математическая дисциплина теория графов была впервые представлена в 30-е годы XX столетия.

Теория графов в качестве теоретической дисциплины может рассматриваться как раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами. Графы нашли применение практически во всех отраслях научных знаний. Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, физические, биологические и социальные системы, решать ряд оптимизационных задач.

Приведем ряд примеров приложений теории графов.

1. «*Транспортные» задачи*, в которых вершинами графа являются пункты, а ребрами – дороги или другие транспортные маршруты. Другой

пример – сети снабжения, в которых вершинами являются пункты производства и потребления, а ребрами – возможные маршруты перемещения. Соответствующий класс задач оптимизации потоков грузов, размещения пунктов производства и потребления и т.д., иногда называется *задачами обеспечения* или *задачами о размещении*. Их подклассом являются *задачи о грузоперевозках* [1, 2].

2. *«Технологические задачи»*, в которых вершины отражают производственные элементы, а дуги – потоки сырья, материалов и продукции между ними, заключаются в определении оптимальной загрузки производственных элементов и обеспечивающих эту загрузку потоков [1, 2].

3. *Обменные схемы*, являющиеся моделями таких явлений как бартер, взаимозачеты и т.д. Вершины графа при этом описывают участников обменной схемы (цепочки), а дуги – потоки материальных и финансовых ресурсов между ними. Задача заключается в определении цепочки обменов, оптимальной с точки зрения, например, организатора обмена и согласованной с интересами участников цепочки и существующими ограничениями [3].

4. *Управление проектами*. С точки зрения теории графов проект – совокупность операций и зависимостей между ними (*сетевой график*). Хрестоматийным примером является проект строительства некоторого объекта. Совокупность моделей и методов, использующих язык и результаты теории графов и ориентированных на решение задач управления проектами, получила название *календарно-сетевого планирования и управления* [1], в рамках которого решаются задачи определения последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними, оптимальных с точки зрения тех или иных критериев.

5. *Модели коллективов и групп*, используемые в социологии, основываются на представлении людей или их групп в виде вершин, а отношений между ними – в виде ребер или дуг. В рамках подобного описания решаются задачи исследования структуры социальных групп, их сравнения, определения агрегированных показателей, отражающих степень напряженности, согласованности взаимодействия и др.

6. *Модели организационных структур*, в которых вершинами являются элементы организационной системы, а ребрами или дугами – связи между ними [4].

Решение перечисленных задач, а также ряда других, часто сводятся к ставшим уже классическими задачам теории графов. Отметим некоторые из них.

Задача о кратчайшем пути. Пусть задана *сеть* из $n + 1$ вершины, то есть ориентированный граф, в котором выделены две вершины – вход (нулевая вершина) и выход (вершина с номером n). Для каждой дуги заданы числа, называемые длинами дуг. *Длиной пути* называется сумма длин входящих в него дуг (если длины дуг не заданы, то длина пути определяется как число входящих в него дуг). Задача заключается в поиске кратчайшего пути (пути минимальной длины) от входа до выхода сети. Будем предполагать, что в любую вершину сети можно попасть из входа, и из любой вершины можно попасть в выход (вершины, не удовлетворяющие этому требованию, можно удалить).

Известно [2, 5], что для существования кратчайшего пути необходимо и достаточно отсутствия в сети контуров отрицательной длины. Решение задачи проводят, применяя алгоритмы Дейкстры [5], Беллмана–Форда или Левита.

Аналогично задаче о кратчайшем пути формулируется и решается *задача о максимальном пути*. Для этого достаточно изменить знаки дуг на противоположные и решить задачу о кратчайшем пути. Для существования решения задачи о максимальном пути необходимо и достаточно отсутствия контуров положительной длины. В задаче поиска *пути максимальной надежности* длины дуг интерпретируются, например, как вероятности того, что существует связь между соответствующими двумя пунктами. Заменяя длины дуг их логарифмами, взятыми с обратными знаками, получаем, что путь максимальной надежности в исходном графе будет соответствовать кратчайшему пути в новом графе.

Задача о многополюсной сети состоит в том, что для каждой пары узлов сети требуется найти кратчайший путь между ними. Решение данной задачи может быть эффективно найдено с помощью алгоритма Флойда–Ху, основанного на трёхместной операции [5].

Гораздо более сложными (NP-полными) являются задачи поиска элементарных путей кратчайшей (максимальной) длины в случае, когда в сети имеются контуры отрицательной (соответственно, положительной) длины. Эффективных (не сводящихся к полному перебору) точных алгоритмов для них не существует. К таким же сложным задачам относятся и задачи поиска кратчайших или длиннейших путей или контуров, проходящих через все вершины графа. Классическим примером задачи поиска такого контура является *задача коммивояжера*, заключающаяся в следующем. Коммивояжер должен посетить n городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться в исходный пункт своего путешествия. Заданы неотрицательные длины дуг, интерпретируемые как расстояние между городами или стоимости проезда. Требуется найти гамильтонов контур минимальной длины (в графе из n вершин существует $n!$ гамильтоновых контуров). Среди способов решения данной задачи стоит выделить метод ветвей и границ (метод Литтла) [5].

Алгоритмы решения задачи о кратчайшем пути позволяют решать широкий класс задач дискретной оптимизации. В качестве примера приведем задачу целочисленного линейного программирования – *задачу о ранце* (*о рюкзаке*), к которой сводятся многие практически важные задачи определения оптимальной комбинации факторов при ограничениях на общий вес, площадь, объем, финансирование и т.д.

Задача о ранце. Пусть имеется n предметов, которые могут быть полезны в походе. Полезность i-го предмета оценивается числом a_i, вес предмета (или его объем) – b_i. Суммарный вес, который может нести турист (объем рюкзака), ограничен величиной R. Требуется найти набор предметов, обладающий максимальной суммарной полезностью и удовлетворяющий ограничению.

Обозначим x_i – переменную, принимающую значение ноль (если i-й предмет не кладется в ранец) или единица (если i-й предмет кладется в ранец). Тогда задача о ранце имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max_x, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \le R.$$

Верхняя оценка числа возможных комбинаций – 2^n. Однако для решения задачи о ранце существует эффективный алгоритм – *метод динамического программирования*. При его использовании строится соответствующая сеть, обладающая следующими свойствами: любому решению задачи соответствует некоторый путь в этой сети; любому пути соответствует некоторое решение задачи. Таким образом, задача свелась к нахождению пути максимальной длины.

Задача поиска контура минимальной длины решается следующим образом. Если известно, что искомый контур содержит некоторую вершину, то нужно определить кратчайшей путь от этой вершины до нее же, применяя описанные выше алгоритмы. Так как в общем случае контур минимальной длины может проходить через любую вершину графа, то находятся контуры минимальной длины, проходящие через каждую вершину, и среди них выбирается кратчайший. Существуют алгоритмы и более простого решения данной задачи, а также сходных с ней задачи поиска контура минимальной средней длины, заключающейся в поиске контура, для которого минимально отношение его длины к числу содержащихся в нем дуг, задачи поиска пути максимальной эффективности и задачи поиска пути максимальной эффективности с учетом штрафов.

Задача о максимальном потоке. Рассмотрим сеть из ($n+1$) вершины. Пусть каждой дуге поставлено в соответствие число c_{ij}, называемое *пропускной способностью* дуги ($i;\ j$). Потоком x в сети называется совокупность чисел $\{x_{ij}\}$, где x_{ij} – поток по дуге ($i;\ j$), удовлетворяющих условиям:

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij},\ i,j = 0,\dots,n,\quad \sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki}\quad, i \ne 0,\ n.$$

Величиной потока x называется $\Phi(x) = \sum_i x_{0i} = \sum_i x_{in}$. Задача о максимальном потоке заключается в определении потока максимальной величины. Наиболее распространенной содержательной интерпретацией является перевозка грузов из начальной вершины в конечную по дугам графа, где пропускная способность дуги характеризует максимальное количество груза, которое по ней можно перевозить в единицу времени.

Разрезом W в сети называется любое множество вершин, обязательно содержащее выход и не содержащее вход. Пропускной способностью $C(W)$ разреза W называется сумма пропускных способностей дуг, заходящих в разрез. Известно, что величина любого потока не превышает пропускной способности любого разреза (*теорема Форда–Фалкерсона*). Следовательно, если удастся найти поток, величина которого равна пропускной способности некоторого разреза, то этот поток максимален, а разрез минимален. Поставленная задача успешно решается с помощью алгоритма Форда–Фалкерсона [2, 5, 6].

Задача о многополюсном максимальном потоке состоит в том, что для каждой пары узлов сети требуется определить величину максимального потока между ними. Вместо того, чтобы решать задачу о максимальном потоке для каждой пары узлов, целесообразно применять итеративный алгоритм Гомори – Ху [5, 6], значительно ускоряющий поиск решения.

Поток минимальной стоимости. Предположим, что задана сеть с пропускными способностями дуг c_{ij}. Пусть также для каждой дуги ($i;\ j$) заданы число s_{ij}, интерпретируемое как затраты (например, затраты на перевозку единицы груза из вершины i в вершину j). Задача поиска потока минимальной стоимости заключается в нахождении для заданной величины φ суммарного потока ее распределения по дугам, минимизирующего сумму затрат. Общие методы решения задачи о потоке минимальной стоимости рассматриваются в [2, 6]. Частным случаем задачи о потоке минимальной стоимости является *транспортная задача*, в которой имеется *двудольный граф,* вершины которого разбиты на две группы – m поставщиков и n потребителей.

Известно, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины, или когда в нем все простые циклы имеют четную длину (*теорема Кенига*). Для поставщиков заданы имеющиеся у них количества единиц товара a_i, $i = 1,\ldots,m$, для потребителей – требуемые им количества единиц товара b_i, $i = 1,\ldots, n$. Также известны затраты s_{ij} перевозки единицы товара от i-го поставщика j-му потребителю. Пусть задача является *замкнутой*, то есть суммарное предложение равно суммарному спросу (вводя фиктивного поставщика или фиктивного потребителя любую незамкнутую задачу можно свести к замкнутой). Требуется определить потоки товаров от потребителей к поставщикам, минимизирующие суммарные затраты.

Добавляя к двудольному графу вход «0» и выход «z» и соединяя их с остальными вершинами дугами с потоком $x_{0i} = a_i$, , $i = 1,\ldots,m$, $x_{jz} = b_j$, $j = 1,\ldots,n$, получаем задачу о потоке минимальной стоимости. Алгоритмы решения транспортной и двойственной к ней задач описаны в [1, 2, 5].

Частным случаем транспортной задачи является *задача о назначении*, заключающаяся в следующем: имеются n человек, которые могут выполнять различные работы (занимать различные должности), число работ равно числу работников (введя фиктивные должности или фиктивные работы, всегда можно незамкнутую задачу привести к рассматриваемой замкнутой форме). Известны затраты s_{ij} на назначение i-го работника на j-ю должность (например, минимальная зарплата, за которую он согласится работать на этой должности). Требуется найти назначение работников на должности (каждого работника на одну и только одну должность), минимизирующее суммарные затраты (если s_{ij} интерпретируется как эффективность от работы i-го работника на j-ой должности, то оптимальное назначение должно максимизировать суммарную эффективность). Известны множество методов решения задачи о назначении [1, 2].

Теория графов является одним из простейших и наиболее элегантных разделов современной математики с широкой областью применения. Имея в своей основе простейшие идеи и элементы, она строит из них богатое многообразие форм, наделяет эти формы интересными свойствами и в результате становится полезным инструментом при исследовании разнообразных систем. Любой человек, готовящий себя к работе в области науки и техники, должен познакомиться с основами теории графов, поскольку эта теория фундаментальна по своей природе и имеет широкую область применения. Особое значение теория графов имеет при подготовке инженеров–строителей, поскольку транспортные сети, сети связи и обеспечения ресурсами объектов строительства, оптимальное управление удобно представлять графами. Для исследования операций, связанных с такими задачами как потоки, кратчайшие пути или конструирование надёжных сетей очень полезен теоретико–графовый подход, обеспечивающий практичный и удобный инструментарий инженера.

В силу вышеизложенного, неоспоримым является необходимость введения курса теории графов, как неотъемлемой части курса высшей математики, в университетские учебные планы подготовки студентов строительных специальностей.

Литература:

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. - М.: Мир, 1972. Т. 1–4.

2. Бурков В.Н., Горгидзе И.А., Ловецкий С.Е. Прикладные задачи теории графов. - Тбилиси: Мецниереба, 1974. – 234 с.

3. Коргин Н.А. Неманипулируемые механизмы обмена в активных системах. - М.: ИПУ РАН, 2003. – 126 с.

4. Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. - М.: ИПУ РАН, 2003. – 210 с.

5. Шестопал А.Ф. Елементи сітьового аналізу і лінійного програмування. Конспект лекцій. Спецкурс. - К.: КДТУБА, 1995. – 156 с.

6. Оре О. Теория графов. - М.: Наука, 1968. – 352 с.

Анотація:

Наведені основні типи задач, для розв’язання яких можуть бути застосовані засоби і методи теорії графів. Описані базові підходи, які дозволяють отримати відповідні результати для використовуваних моделей та інтерпретувати їх в початковій постановці.

Ключові слова: теорія графів, багатополюсна мережа, транспортна задача, найкоротший шлях, максимальний потік.

Annotation:

The main types of problems for solving which can be applied means and methods of graph theory are given. Basic approaches, that allow to obtain corresponding results for the models used and to interpret them in the initial formulation, are described.

Keywords: graph theory, multipolar network, transport problem, shortest path, maximum flow.