УДК 539.3

д.т.н., професор Чибіряков В.К.,
Заслужений працівник народної освіти України,
к.т.н., доцент Станкевич А.М., Краснеєва А.О.,
Київський національний університет будівництва і архітектури

МЕТОД ПРЯМИХ У ЗАДАЧАХ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ НЕКАНОНІЧНОЇ ФОРМИ.

Важливою особливістю методу прямих для розв'язування крайових задач математичної фізики є можливість розв'язувати задачі, визначені в області неканонічної форми. Традиційно при цьому використовувались аналітичні методи. В даній роботі пропонується методика розв'язування задач теплопровідності в областях неканонічної форми на основі чисельних методів, що значно розширює можливості методу прямих.

Ключові слова: метод прямих, проекційний метод, зниження вимірності, ортогоналізація.

Одними із стандартних зовнішніх впливів, які необхідно враховувати при розрахунках напружено-деформованого стану несучих конструкцій, є теплові впливи. Оскільки вихідною інформацією для такого розрахунку є задані значення температур або теплопотоків для зовнішнього середовища, то для визначення зміни цих факторів за об'ємом тіла, що досліджується, прийнято розв'язувати задачу теплопровідності для такого об'єкта.

Для розв'язування багатовимірних задач математичної фізики одним із комбінованих чисельно-аналітичних методів є метод прямих, першим етапом якого є зведення вихідної багатовимірної по просторових координатах задачі до одновимірної – тобто вихідні дво- або тривимірні диференціальні рівняння у частинних похідних зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь [3]. Важливою позитивною особливістю цього методу є можливість побудови загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь. Це дає можливість скласти за допомогою вихідних граничних умов систему алгебраїчних рівнянь для знаходження наближеного розв'язку вихідної задачі.

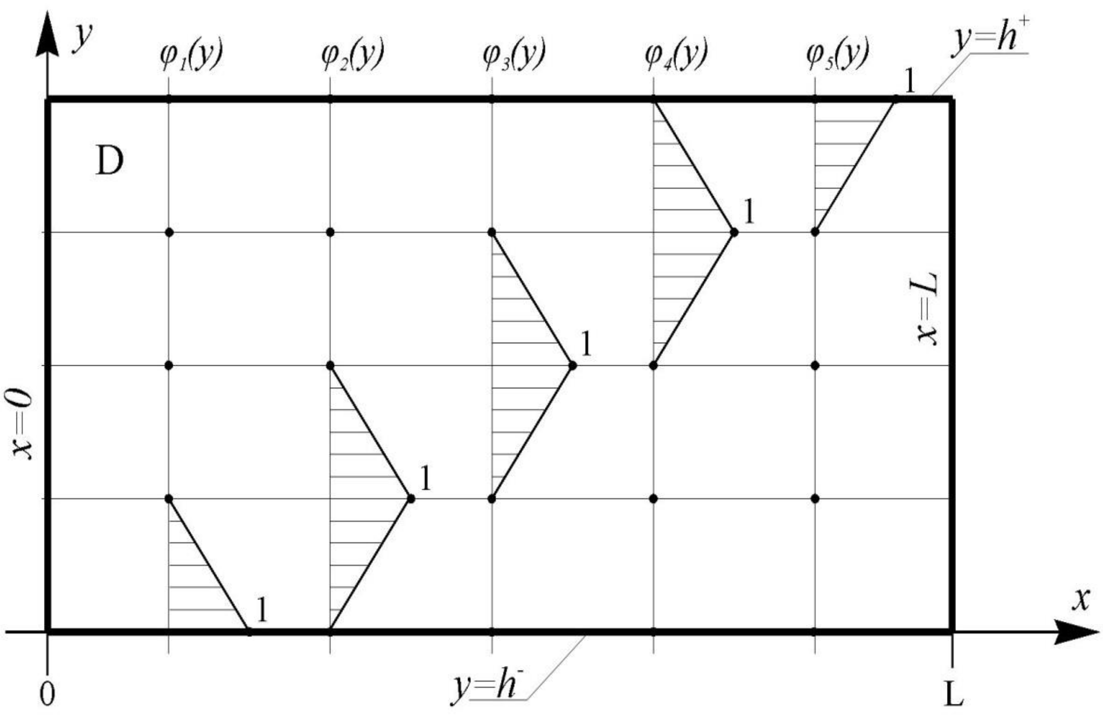
Традиційно побудова загального розв'язку системи редукованих звичайних диференціальних рівнянь здійснювалась аналітичними методами – точно або наближено. Але в наш час розроблені високоточні ефективні чисельні алгоритми побудови загального розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Найбільш ефективним з них, на наш погляд, є метод, запропонований Годуновим С.К. [1], який дозволяє будувати загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, що майже неможливо збудувати аналітичними методами.

Знання загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь дозволяє далі побудувати розв'язок конкретної граничної задачі. Для цього за допомогою граничних умов, які задані на границі Г області визначення вихідної задачі D', складається система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування, яка має однозначно визначити розв'язок редукованої задачі і, відповідно, наближений розв'язок вихідної задачі.

Область D' може бути будь-якої форми, відповідно гранична крива (у двовимірній вихідній задачі) також має досить складний вигляд. Можливість розглядати такі складні об'єкти є ще однією з важливих особливостей методу прямих.

При застосуванні чисельних методів для побудови наближених розв'язків граничних задач в областях неканонічної форми методом прямих виникають певні ускладнення, у зв'язку з якими відповідні чисельні алгоритми не побудовано. У даній роботі пропонується такий алгоритм для плоскої задачі теплопровідності, побудований на основі розробленого авторами цієї роботи узагальненого варіанту методу прямих.

Розглядаються рівняння плоскої задачі теплопровідності у прямокутній області D, віднесеної до декартової системи координат (мал. 1).



Мал. 1.

Рівняння стаціонарної теплопровідності запишемо у вигляді, коли усі частинні похідні першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial q_y}{\partial y} + Q_T = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} = -\dfrac{1}{\lambda_T} q_x, \\ q_y = -\lambda_T \dfrac{\partial T}{\partial y}. \end{cases} \qquad (1)$$

Тут $T(x, y)-$ функція температур, $q_x, q_y -$ компоненти вектора теплового потоку.

Відповідно до ідеї методу прямих по одній координаті (у даному випадку по x) вважається, що розрахункові функції, які входять до рівнянь (1), змінюються безперервно, по інших (у даному випадку по y) – дискретно. Це підкреслюється нанесенням на область D системи прямих $y = y_i \quad (i = \overline{1, N})$, на яких і передбачається дискретно-континуальне визначення розрахункових функцій. Серед цих прямих обов'язково повинні бути граничні прямі $y_1 = h^-, \quad y_N = h^+$.

Для екстраполяції значень невідомих, визначених на прямих, на інші точки області D, виберемо систему базисних функцій $\{\varphi_i(y)\}$ (рис. 1). Тоді кожна з невідомих функцій, яка входить до системи рівнянь (1), наближено визначається за допомогою базисних функцій:

$$\begin{aligned} & T(x, y) \approx T^i(x) \cdot \varphi_i(y), \\ & q_x(x, y) \approx q_x^i(x) \cdot \varphi_i(y), \\ & q_y(x, y) \approx q_y^i(x) \cdot \varphi_i(y). \end{aligned} \qquad (2)$$

Тут по індексах, що повторюються, виконується підсумовування добутків у межах визначення індексу (узгодження Ейнштейна). Базисні функції $\varphi_i(y)$ розглядаємо як елементи $N-$ вимірного евклідового простору зі скалярним добутком:

$$\left(f(y), q(y) \right) = \int_{h^-}^{h^+} f(y)\, q(y) dy\,. \qquad (3)$$

Оскільки базисні функції у такому скалярному добутку не є ортогональними, то тут і надалі використовуються терміни та позначення, прийняті у тензорному численні. Отже, базис $\{\varphi_i(y)\}$ вважається основним, або коваріантним і позначається нижніми індексами. Разом із основним базисом застосовується взаємний або контраваріантний базис $\left\{\varphi^i(y)\right\}$, який позначається індексами зверху. І взагалі, усі величини, які позначаються нижніми індексами – коваріантні, верхніми – контраваріантні. Також використовується метричний тензор, який визначається чотирма матрицями компонент:

$$\begin{aligned} &g_{ij}=\left(\varphi_i(y),\varphi_j(y)\right),\quad g^{ij}=\left(\varphi^i(y),\varphi^j(y)\right),\\ &\delta_{i\cdot}^{\cdot j}=\left(\varphi_i(y),\varphi^j(y)\right),\quad \delta_{\cdot j}^{i\cdot}=\left(\varphi^i(y),\varphi_j(y)\right),\quad (i,j=\overline{1,N}). \end{aligned} \tag{4}$$

Тут $\delta_{i\cdot}^{\cdot j}$ та $\delta_{\cdot j}^{i\cdot}$ – символи Кронекера: $\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad i=j\\ 0, & \text{якщо}\quad i\neq j.\end{cases}$

Як відомо, символ Кронекера зображує одиничну матрицю в індексній формі.

Співвідношення (2) трактуються як розклад функцій по базису, причому компонентами розкладу по основному базису є контраваріантні величини:

$$\begin{aligned} &T^i(x)=\left(T(x,y),\varphi^i(y)\right),\\ &q_x^i(x)=\left(q_x(x,y),\varphi^i(y)\right),\\ &q_y^i(x)=\left(q_y(x,y),\varphi^i(y)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

У зв'язку із косокутністю базису мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned} &T(x,y)\approx T_i(x)\cdot\varphi^i(y),\\ &q_x(x,y)\approx q_{x,i}(x)\cdot\varphi^i(y),\\ &q_y(x,y)\approx q_{y,i}(x)\cdot\varphi^i(y). \end{aligned} \tag{6}$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned} &T_i(x)=\left(T(x,y),\varphi_i(y)\right),\\ &q_{x,i}(x)=\left(q_x(x,y),\varphi_i(y)\right),\\ &q_{y,i}(x)=\left(q_y(x,y),\varphi_i(y)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

За допомогою метричного тензора виконується перехід від контраваріантних компонент до коваріантних і навпаки. Така операція у тензорному численні називається опусканням та підняттям індексів:

$$f_i(x)=g_{ij}f^j(x),\quad f^i(x)=g^{ij}f_j(x). \tag{8}$$

Також використовується операція заміни індексу:

$$f_i(x) = \delta_{i\cdot}^{\cdot j} f_j(x), \quad f^i(x) = \delta_{\cdot j}^{i\cdot} f^j(x). \tag{9}$$

Оскільки у співвідношеннях (4), (6) розглядаються коефіцієнти вихідних функцій відносно базису (основного чи взаємного), то їх прийнято називати коефіцієнтами по відповідному базису, натомість співвідношення (5), (7) визначають скалярні добутки (тобто інтеграли) цих функцій відносно базисних функцій, які називаються моментами вихідних функцій відносно базисних.

Для зниження вимірності вихідних рівнянь по змінній y використаємо проекційний метод. Вихідні рівняння системи (1) скалярно помножимо на базисні функції основного чи взаємного базиса. Друге рівняння помножимо скалярно на $\varphi^i(x)$ та після виконання нескладних математичних операцій, отримаємо:

$$\frac{dT^i(x)}{dx} = -\frac{1}{\lambda_T} q_x^i(x). \tag{10}$$

Третє рівняння системи (1) помножимо скалярно на $\varphi_i(x)$. Для визначення інтеграла, до якого входить похідна $\dfrac{\partial T}{\partial y}$, функцію $T(x,y)$ наближено записуємо враховуючи співвідношення (2). Після виконання деяких незначних перетворень, отримуємо:

$$q_{y,i}(x) = -\lambda_T b_{ij} \cdot T^j(x), \quad b_{ij} = \int_{h^-}^{h^+} \varphi_i(x) \cdot \varphi'(y) dy,$$

або піднімаючи індекс i будемо мати:

$$q_y^i(x) = -\lambda_T g^{ij} b_{j\alpha} T^\alpha(x). \tag{11}$$

При зниженні вимірності першого рівняння системи (1) необхідно враховувати деякі особливості. По-перше, при обчисленні значення інтеграла $\int_{h^-}^{h^+} \dfrac{\partial q_y(x,y)}{\partial y} \cdot \varphi_i(y) dy$ безпосередньо підставляти наближене співвідношення (6) для $q_y(x,y)$ не можна, потрібно «пом'якшити» $[4]$ диференціювання, скориставшись формулою інтегрування частинами. По-друге, при інтегруванні частинами означеного інтеграла з'являються позаінтегральні члени, до яких входять значення базисних функцій $\varphi_i(h^-), \varphi_i(h^+)$ та невідомих функцій $q_y(x,h^-)$ та $q_y(x,h^+)$. Якщо $\varphi_i(h^-) = \delta_{i\cdot}^{\cdot 1}$, а $\varphi_i(h^+) = \delta_{i\cdot}^{\cdot N}$, то $q_y(x,h^-)$ та $q_y(x,h^+)$ необхідно виключати з граничних умов при $y = h^-$ та $y = h^+$.

Граничні умови на лицьових площинах $y = h^-$ та $y = h^+$ будемо використовувати у найбільш загальному вигляді:

при $y = h^-$

$$q_y(x,h^-) = q_y^-(x) - \alpha_T^-\left(T(x,h^-) - \theta_c^-(x)\right),$$

при $y = h^+$

$$q_y(x,h^+) = q_y^+(x) - \alpha_T^+\left(T(x,h^+) - \theta_c^+(x)\right). \qquad (12)$$

Тут $q_y^-(x)$, $q_y^+(x)-$ компоненти вектора заданого теплового потоку із зовнішнього середовища, $\theta_c^-(x)$, $\theta_c^+(x)-$ температура оточуючого середовища з боку граничних площин. Після проектування першого рівняння системи (1), отримуємо:

$$\frac{dq_{x,i}}{dx} = -\left[q_y(x,h^+)\delta_{i\cdot}^{\cdot N} - q_y(x,h^-)\delta_{i\cdot}^{\cdot 1}\right] + b_{ji}q_y^j - Q_i\,, \qquad (13)$$

де $b_{ji} = \int\limits_{h^-}^{h^+}\varphi_i(y)\varphi_j(y)dy$, тобто матриця $\{b_{ji}\}$ є транспонованою до матриці $\{b_{ij}\}$.

Оскільки $q_y^i(x)$ виражається алгебраїчно через $T^\alpha(x)$ (співвідношення (11)), то її можна видалити з системи редукованих рівнянь. Крім того, необхідно виключити з цих рівнянь $q_y(x,h^+)$, $q_y(x,h^-)$ за допомогою граничних умов (12) та усі невідомі записати у коефіцієнтах. Остаточно система розрахункових редукованих рівнянь має вигляд:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} T^i(x) \\ q_x^i(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\lambda_T}\delta_{\cdot\gamma}^{i\cdot} \\ -\alpha_T^+T^Ng^{iN} - \alpha_T^-T^1g^{i1} - \lambda_T g^{i\beta}b_{j\beta}g^{j\alpha}b_{\alpha\gamma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T^\gamma \\ q_x^\gamma \end{bmatrix} +$$
$$+\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_T^+\theta_c^{\ +}(x)g^{iN} + \alpha_T^-\theta_c^{\ -}(x)g^{i1} + q_{yc}^-(x)\mathrm{g}^{i1} + q_{yc}^+(x)\mathrm{g}^{iN} - Q^i(x) \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Розрахункові редуковані рівняння (14) – це $2N$ звичайних диференціальних рівнянь, записаних у формі Коші. Розрахункові функції записані у коефіцієнтах, що значно спрощує подальші кроки алгоритму. Справа у тому, що такі величини мають простий фізичний зміст: $T^i(x)-$ значення температурної функції на $i-$тій прямій. Аналогічно визначається $q_x^i(x)$. Потрібно також зазначити, що граничні умови на лицьових прямих входять безпосередньо до редукованих рівнянь, тобто при побудові загального розв'язку редукованих рівнянь ці граничні умови тут враховуються.

Покажемо, що побудову загального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь можна привести до знаходження розв'язків певної кількості задач Коші.

Запишемо систему (14) у такому вигляді:

$$\frac{d\vec{Y}(x)}{dx} = A(x)\vec{Y}(x) + \vec{F}(x), \qquad (15)$$

тут $\vec{Y}(x) = \begin{bmatrix} T^i(x) \\ q_x^i(x) \end{bmatrix}$ – вектор невідомих довжиною $2N$,

які при фіксованому $x = x_o$ є $T^i(x_o)$ – значенням температурної функції на i – й прямій, відповідно $q_x^i(x_o)$ – значення компоненти теплового потоку на i – й прямій при $x = x_o$. У стовпчику $\vec{Y}(x)$ $T^i(x)$ стоїть на i – у місці, $q_x^i(x)$ – на $(N+i)$ – му місці.

Як відомо, загальний розв'язок такої системи диференціальних рівнянь є сумою загального розв'язку відповідної однорідної системи:

$$\frac{d\vec{Y}}{dx} = A(x)\vec{Y} \qquad (17)$$

та будь-якого частинного розв'язку неоднорідної системи (15). Загальний розв'язок однорідної системи (17) є лінійною комбінацією елементів фундаментальної системи розв'язків (ФСР), елементи якої визначаються двома умовами:

– вони повинні бути частинними розв'язками системи (17),

– вони повинні утворювати лінійно-незалежну систему у лінійному просторі частинних розв'язків однорідної системи (17).

Оскільки вимірність цього простору складає $2N$, то ФСР складається з $2N$ частинних розв'язків.

Фундаментальну систему розв'язків можна побудувати, використовуючи алгоритм побудови розв'язку задачі Коші для системи (17). Для цього будемо розглядати систему (17) як визначену на відрізку $[0, L]$. У початковій точці будемо розглядати $2N$ векторів $\left\{\vec{Y}_1(o), \vec{Y}_2(o), \ldots, \vec{Y}_{2N}(o)\right\}$, які утворюють лінійно-незалежну систему у R_{2N}. Ці вектори можна вибирати як завгодно, аби вони утворювали лінійно-незалежну систему. Найкращим варіантом вибору таких векторів є система стовпчиків одиничної матриці розміром $2N \times 2N$. Якщо розглядати ці вектори як початкові значення при $x = 0$ вектор-функції $\vec{Y}_n(x)$ при $n = \overline{1, 2N}$, то система рівнянь (17) утворює $2N$ задач Коші. Крім того, побудова частинного розв'язку неоднорідних рівнянь також зводиться до розв'язування задачі Коші, якщо в якості початкових умов взяти будь-який стовпчик розміром $2N$, а простіше обирати нульовий стовпчик.

Оскільки для чисельного розв'язання задачі Коші побудовано багато обчислювальних алгоритмів (наприклад Рунге-Кутта, Адамса та ін.) явних та неявних, будь якої точності, навіть із контролем точності на кроці, то побудова ФСР для лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами в наш час не є значною проблемою. Однак, чисельна побудова ФСР редукованих рівнянь наштовхується на певні обчислювальні труднощі.

Як правило, редуковані рівняння є жорсткими $\left[5\right]$. Внаслідок цього явні чисельні алгоритми можуть втрачати стійкість. Годунов С.К. з метою забезпечення стійкості обчислювального процесу запропонував у деяких точках інтервалу інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь виконувати ортогоналізацію векторів фундаментальної системи розв'язків $\left[2\right]$.

З вектор-функцій, які складають ФСР, як із стовпчиків утворено фундаментальну матрицю розміром $2N \times 2N$:

$$Y(x) = \left[\vec{Y}_1(x), \vec{Y}_2(x), \vec{Y}_3(x), \ldots, \vec{Y}_{2N}(x)\right].$$

Тоді загальний розв'язок системи рівнянь (15) у будь-якій точці можна записати у вигляді: $\vec{Y}(x) = Y(x)\vec{C} + \vec{Y}_o(x)$, (18)

де $\vec{C} = \left[C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{2N}\right]^T -$ вектор довільних сталих, $\vec{Y}_o(x) -$ частинний розв'язок неоднорідних рівнянь.

Якщо відомі значення N компонент вектора-розв'язку $\vec{Y}(x)$ у точці $x = 0$ та N компонент у точці $x = L$, то це визначає двоточкову граничну задачу. Значно складніше задача, коли граничні умови задаються не тільки в двох крайніх точках, але й в якійсь кількості внутрішніх точок інтервалу визначення системи рівнянь – це буде багатоточкова гранична задача.

За С.К.Годуновим, при інтегруванні відповідних задач Коші на інтервалі інтегрування вибирається певна кількість точок ортогоналізації, включаючи першу і останню точки інтервалу. Вибираючи у першій точці $x_1 = 0$ початкову лінійно-незалежну систему $2N-$ вимірних векторів для побудови ФСР та після інтегрування будь-яким чисельним методом у наступній точці, отримуємо систему векторів, яка складає фундаментальну матрицю $Y(x_2)$ і може бути ще лінійно-незалежною, але вже косокутною, та вектор частинного розв'язку неоднорідної системи $\vec{Y}_o(x_2)$. Якщо у початковій точці загальний розв'язок визначався формулою $\vec{Y}(x_1) = Y(x_1)\vec{C}_1 + \vec{Y}_o(x_1)$, то у другій точці він виглядає так:

$\vec{Y}(x_2) = Y(x_2)\vec{C}_1 + \vec{Y}_o(x_2) -$ тобто вектор довільних сталих не помінявся.

Але якщо у початковій точці x_1 значення вектор-функцій ФСР утворювали ортонормований базис, то у наступній точці x_2 вектори, що складають фундаментальну матрицю $Y(x_2)$ вже будуть косокутним базисом, а при подальшому інтегрування стають майже лінійно-залежною системою. Щоб запобігти цьому, поки система векторів, що утворюють фундаментальну матрицю $Y(x_2)$ ще є лінійно-незалежною, на її основі за алгоритмом Грама-

Шмідта будується ортонормована система $\left\{\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \vec{Z}_3, \ldots, \vec{Z}_{2N}\right\}$, а з цих векторів, як із стовпчиків – фундаментальна матриця $\vec{Z}(x_2)$. Крім того, на основі побудованої ортонормованої системи векторів та вектора частинного розв'язку $\vec{Y}_o(x_2)$ будується вектор $\vec{Z}_o(x_2)$, який є ортогональним до цієї ортонормованої системи. При цьому мають місце співвідношення:

$$\begin{aligned} &Y(x_2) = Z(x_2) \cdot \Omega(x_2), \\ &\vec{Y}_o(x_2) = \vec{Z}_o(x_2) + Z(x_2) \cdot \vec{\Omega}_o(x_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Тут $\Omega(x_2)-$ квадратна нижньотрикутна матриця проекцій векторів $\vec{Y}_n(x_2)$ на вектори ортонормованої системи $\vec{Z}_n(x_2)$, а $\vec{\Omega}_o(x_2)-$ матриця-стовпчик проекцій вектора $\vec{Y}_o(x_2)$ на вектори ортонормованої системи. Зі співвідношень (19) випливає залежність між двома послідовними векторами довільних сталих:

$$\vec{C}_2 = \Omega(x_2) \cdot \vec{C}_1 + \vec{\Omega}_o(x_2). \tag{20}$$

За допомогою $Z(x_2), Z_o(x_2)$ загальний розв'язок у точці x_2 запишеться так:

$$\vec{Y}(x_2) = Z(x_2) \cdot \vec{C}_2 + \vec{Z}_o(x_2). \tag{21}$$

Отже, у кожній точці ортогоналізації змінюється значення вектора довільних сталих.

Якщо гранична задача для системи звичайних диференціальних рівнянь двоточкова, то розроблено алгоритм $[1]$, який ефективно розв'язує граничну задачу. У випадку багатоточкової граничної задачі алгоритм розв'язування таких задач методом прямих базується на побудові загального розв'язку аналітичними методами.

Варіант алгоритму для розв'язування багатоточкової граничної задачі чисельними методами розглянемо на прикладі задачі про знаходження теплового поля в області неканонічної форми (мал. 2).

Розглядається плоска задача теплопровідності в області неканонічного вигляду D', що обмежена лініями h^-, h^+ та відрізками Γ_1 та Γ_2. На граничних лініях h^- та h^+ задано умови конвективного теплообміну (12) та граничні умови конвективного теплообміну на ділянках Γ_1:

$$q_n^1(x,y) = -\alpha_T^1\left(T(x,y) - \theta_c^1(x,y)\right)$$

та Γ_2:

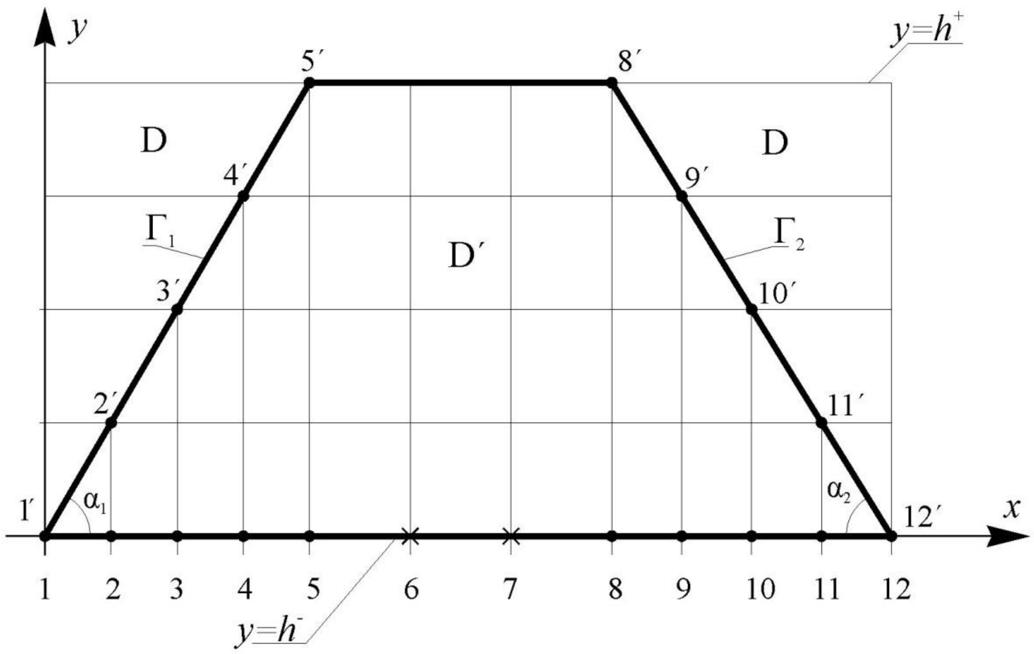
$$q_n^2(x,y) = \alpha_T^2\left(T(x,y) - \theta_c^2(x,y)\right),$$

які можна записати у такому вигляді:

$$\frac{q_x(x,y)}{\sin\alpha_1} = -\alpha_T^1\left(T(x,y) - \theta_c^1(x,y)\right),$$

$$\frac{q_x(x,y)}{\sin\alpha_2} = +\alpha_T^2\left(T(x,y) - \theta_c^2(x,y)\right). \qquad (22)$$

Тут (x,y) – координати точок, позначених штрихами.



Мал. 2

Область D' доповнюється до прямокутника D. Відповідно вихідні розрахункові рівняння (1) та граничні умови на ділянках h^- та h^+ продовжуються до бічних границь прямокутника. На область D наносяться прямі, а вихідні рівняння (1) редукуються, в результаті чого отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь (14), визначену на відрізку $[0, L]$. На ділянці між точками 5-8 ця система співпадає з системою редукованих рівнянь, яку можна побудувати для вихідних рівнянь у відповідній частині області D. Таким чином можна вважати що вихідна задача для області D' є «зануреною» у відповідну задачу для області D. Це дає змогу побудувати загальний розв'язок редукованих рівнянь виходячи з прямокутної області D.

Для побудови загального розв'язку системи (14), як описано вище, намічаємо точки ортогоналізації. Це обов'язково початкова точка 1 при $x_1 = 0$ та точка 12 при $x_{12} = L$, також проекції точок перетину вибраних прямих із відрізками границі Γ_1 та Γ_2, тобто точки 1-5 та 8-12. Крім цих точок при побудові загального розв'язку може виникнути необхідність розгляду ще деяких проміжних точок ортогоналізації, приміром точки 6,7.

Перший етап побудови загального розв'язку полягає в інтегруванні $2N+1$ задач Коші чисельним методом (пропонується явний метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності). З урахуванням точок ортогоналізації отримуються матриці $Z(x_k), \vec{Z}_o(x_k), \Omega(x_k), \vec{\Omega}_o(x_k)$, що у кожній точці ортогоналізації визначає загальний розв'язок:

$$\vec{Y}(x_k) = Z(x_k) \cdot \vec{C}_k + \vec{Z}_o(x_k), \qquad \left(k = \overline{1,k}\right), \tag{23}$$

який залежить від конкретних, а саме різних, значень вектора довільних сталих $\vec{C}_k$. Для будь-якої задачі мінімальна кількість точок ортогоналізації k співпадає з кількістю точок перетину прямих із границею області D', тобто $2N$, де $N-$ кількість прямих.

Для остаточного розрахунку поставленої задачі необхідно визначити всю сукупність значень векторів $\vec{C}_k$. Для цього при інтегруванні задач Коші для кожної проекції точки перетину прямої з границею за допомогою співвідношення (23) та граничних умов (22) складається рівняння відносно відповідних значень вектора $\vec{C}_k$. Оскільки редуковані рівняння будуються в коефіцієнтах, то компоненти вектор-функції $\vec{Y}(x_n)$ у точці n мають відповідний зміст. Згідно рівнянь системи (14) – при $n = \overline{1,N}-$ це значення температурної функції в цій точці, а при $n = \overline{N,2N}-$ значення компоненти вектора теплового потоку q_x в цій точці. У зв'язку з цим, із урахуванням граничних умов та співвідношення (23), маємо:

$$\begin{aligned} T^n &= T(x_n, y_n) = \sum_{m=1}^{2N} Z(n,m) C_{n,m} + Z_o(n), \\ q_x^n &= q_x(x_n, y_n) = \sum_{m=N}^{2N} Z(n,m) \cdot C_{n,m} + Z_o(n). \end{aligned} \tag{24}$$

Підставляючи (24) до граничних умов (22), отримуємо рівняння такого вигляду:

$$\sum_{m=1}^{2N} a_{nm} c_{nm} = b_n, \quad \left(n = \overline{1,2N}\right), \tag{25}$$

або, якщо позначити вектор-стовпчик вимірності $2N$ як $\{a_{nm}\}^T = \vec{V}_n, \quad \left(m = \overline{1,2N}\right)$, то (25) можна записати у вигляді:

$$\left(\vec{V}_n \cdot \vec{C}_n\right) = b_n, \quad \left(n = \overline{1,2N}\right). \tag{26}$$

Тут ліворуч записано скалярний добуток двох $2N-$ вимірних векторів арифметичного $2N-$ вимірного простору. Слід зазначити, що рівняння (26) має місце тільки для точок зі штрихами.

При досягненні інтегруванням точки $x = L$, отримуємо $2N$ алгебраїчних рівнянь вигляду (26), але у кожному рівнянні невідомими є вектор $\vec{C}_n$, який є різним у різних рівняннях. Для зведення системи (26) до невідомих одного вигляду необхідно, починаючи з другої точки ортогоналізації, приводити рівняння (26) до однакового вектора невідомих.

Оскільки в якості початкових умов для побудови ФСР вибрано ортонормований базис, який утворює ортогональну матрицю та ортогональний до такої ФСР вектор $\vec{Y}_o(x_1)$, то можна позначити:

$$Y(x_1) = Z(x_1), \quad \vec{Y}_o(x_1) = \vec{Z}_o(x_1). \tag{27}$$

Задовольняючи граничні умови (22) у точці $1'$, отримуємо алгебраїчне рівняння:

$$\left(\vec{V}_1 \cdot \vec{C}_1\right) = b_1. \tag{28}$$

Після інтегрування до другої точки ортогоналізації та виконання описаних вище перетворень, складаємо рівняння:

$$\left(\vec{V}_2 \cdot \vec{C}_2\right) = b_2. \tag{29}$$

Таким чином отримано вже два рівняння, але відносно різних невідомих. Для того, щоб звести ці два рівняння до одного невідомого вектора скористаємося співвідношенням (20), яке запишемо в оберненому вигляді:

$$\vec{C}_1 = \Omega^{-1}(x_2) \cdot \left(\vec{C}_2 - \vec{\Omega}_o(x_2)\right). \tag{30}$$

Співвідношення (30) дозволяє записати рівняння (28) відносно невідомого вектора $\vec{C}_2$, але при цьому змінюється вектор коефіцієнтів $\vec{V}_1$ та права частина b_1. У результаті маємо два рівняння відносно одного вектора невідомих – $\vec{C}_2$. Після ортогоналізації фундаментальної системи розв'язків у точці 3, отримуємо рівняння відносно невідомого вектора $\vec{C}_3$ та перетворюємо два попередніх рівняння, які записані відносно $\vec{C}_2$ до невідомого $\vec{C}_3$.

Якщо зустрічається точка, яка є проміжною точкою ортогоналізації, що не є проекцією точки зі штрихом, то рівняння не додається, але перетворення до наступного номера невідомих виконується. Таким чином у кінцевій точці, яка також є точкою ортогоналізації, отримуємо систему $2N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $2N$ невідомих вектора довільних сталих $\vec{V}_k$, де $k \geq 2N$ – загальна кількість точок ортогоналізації.

Розв'язуючи цю систему відносно $\vec{V}_k$ отримуємо значення $2N$ довільних сталих і, відповідно, розв'язок редукованої задачі, а потім наближений розв'язок вихідної задачі у точці k. Для знаходження векторів в інших точках ортогоналізації і, відповідно, наближеного розв'язку вихідної граничної задачі, виконується так званий «зворотній хід» алгоритму. З врахуванням співвідношення (30) для будь-яких двох суміжних точок знаходяться вектори $\vec{V}_k \quad \left(k = \overline{1,k}\right)$ і, відповідно, розв'язки в точках k.

Оскільки наближений розв'язок редукованих рівнянь дає наближений розв'язок задачі теплопровідності у прямокутній області D, який задовольняє граничні умови на границі області D' та усі закони теплопровідності всередині області D', то в межах області D' він є розв'язком поставленої граничної задачі теплопровідності для визначеної області D'.

Література

1. Годунов С.К. О численном решении краевих задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи метематических наук.—1961. – т. 16 – вып. 3. – С. 171-174.

2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. - 391 с.

3. Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН СССР, 1934 – С. 21-34.

4. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы./ Г.И. Марчук, В.И. Агошков – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.

5. Ракитский Ю.В. Численные методы решения жестких систем./ Ю.В. Ракитский, С.М. Устинов, И.Г. Черноруцкий//– М.: Наука .: 1979 – 208 с.

Аннотация

Важной особенностью метода прямых для решения краевых задач математической физики является возможность решать задачи, которые определены в областях неканонической формы. Традиционно при этом использовались аналитические методы. В данной работе предлагается методика решения задач теплопроводности в областях неканонической формы на основе численных методов, что значительно расширяет возможности метода прямых.

Ключевые слова: метод прямых, проекционный метод, понижение розмерности, ортогонализация.

Abstract

An important feature of the method of lines for solving boundary value problems of mathematical physics is the ability to solve problems identified in the non- areas of non-canonical form. Traditionally analytical methods used in this case. Current paper contains methodology for solving heat conduction problems in the non-canonical form areas based on numerical methods, which greatly enhances the method of lines.

Keywords: method of lines, projection method, reduction of dimensionality, orthogonalization.