

УДК 539.3

д.т.н., проф. Гайдайчук В.В.,  
viktor\_gaydaychuk@bigmir.net, ORCID/ 0000-0003-2059-7433,  
Кошевий О.О., 380939339872@yandex.ua, ORCID/ 0000-0002-1903-2905,  
Кошева О.В., 2lucky1327@gmail.com, ORCID/ 0000-0002-3527-0786,  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ КОЛОН ПРИ РІЗНІЙ ГЕОМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ.

*Розглянуто чисельне дослідження оптимального проектування та підбір оптимального поперечного перерізу сталевих колон, які працюють на стиск зі згином. Виконаний збір навантаження згідно будівельних норм. При розрахунку проведена мінімізація маси та зменшення поперечного перерізу, зроблені висновки про універсальність даної методики.*

*Ключові слова: параметрична оптимізація, оптимальне проектування, оптимізація сталевих конструкцій, оптимізація колон різного поперечного перерізу, оптимізація Femap Nastran.*

**Актуальність теми.** Мета проектування в будівельній галузі - створення моделі будівельної конструкції, яка має певні властивості, а також інформацію, що є основою для всіх учасників процесу будівництва. Проектування у будівельній галузі складається з двох основних етапів. Перший етап – це вибір основних будівельних матеріалів для будівництва несучих конструкцій, розгляд основних цілей будівництва, концепція будівлі, а також вибір конструктивної схеми будівлі (ескізний проект). Другий етап – це розробка робочої документації в двох стадіях проектування: стадія П – проектна документація, стадія Р – робоча документація. На стадії проектної документації в проект закладаються, орієнтовно, основні параметри конструкції, а на стадії робочої документації уточнюються її параметри, основні характеристики, особливості конструкції з умов кліматичних і специфічних навантажень, і саме головне відповідність потребам замовника.

Ескізна стадія проектування ЕП конструкції включає основні параметри: висоту, матеріал, з'єднання між конструктивними елементами, з урахуванням ефективності затрат, наявності виробничої бази і обладнання для її виготовлення, і монтажу, та попередній кошторис вартості будівництва. Як правило, при проектуванні будівельних конструкцій є ряд вимог, які суперечать одна одній. Ці характеристики відносяться до різних сфер будівництва: архітектура, будівельна механіка, будівельні конструкції, технологія і організація будівельного виробництва, економіка. А саме тому

виникають ряд вимог, до них відносять: відносно невелика вартість будівництва, висока якість будівництва, надійність, енергоефективність, довговічність, міцність, стійкість, жорсткість, архітектурна виразність. Конструкції повинні бути енергоефективні і вогнетривкі, при цьому, вимоги повинні поєднуватися з виконанням економічних вимог, які мінімізують масу матеріалу і вартість виготовлення, а також методи швидкого і якісного монтажу для того щоб швидко вводити в експлуатацію.

Методи виконання даних вимог дуже різноманітні, над ними працюють цілі колективи, а саме: проектувальники, виконроби, технологи, представники замовника, економісти і логісти. Весь комплекс проблем кожної конструкції вирішується на етапі проектування. У більшості випадків, при проектуванні, пошук і аналіз оптимальних рішень є дуже об'ємним і важким завданням, щоб полегшити цей процес необхідно його максимально автоматизувати [5]. На етапі ескізного проекту головним підходом для проектувальника є його досвід в проектуванні аналогічних конструкцій, або які є їх аналогом.

На етапі робочої документації складається розрахункова модель конструкції, та проводиться її розрахунок різними методами.

При використанні методу скінченних елементів, на другому етапі виконується побудова просторової скінченно-елементної моделі і виконується розрахунок конструкції за двома граничними станами, а також, в деяких випадках, на спеціальне навантаження, яке регламентується унікальними умовами експлуатації чи особливістю будівництва конструкцій. Саме в цьому моменті необхідна ідея комплексної автоматизації оптимальності проектування, яка повинна прискорювати роботу, звільняти від трудомісткої варіативних рутинних операцій, при цьому зменшуються строки виконання проектних робіт і збільшується їх якість, зменшується вартість проектування і будівельного проекту в цілому [6;7]. Значну роль, при цьому, грає оптимальне проектування, зміст якого полягає в пошуку найбільш раціонального вирішення проблеми по вихідним даним, без необхідності прийняття проміжних рішень, і одразу досягнення кінцевого оптимального результату.

Найбільш очевидним прикладом прямого підходу оптимального проектування є підбір попеченого перерізу колони яка працює на центральний стиск зі згином.

**Теоретичні відомості.** Задачі параметричної оптимізації в будівельній механіці по своєму задуму схожі задачам математичного програмування з обмеженням у вигляді нерівностей [4;5]. Їх рішення зводиться до пошуку невідомого вектора змінних  $\bar{X}$ , які визначають геометричні і фізичні характеристики системи, при умові мінімуму цільової функції  $F(\bar{X}) \rightarrow \min$ . Аналіз багатьох робіт по оптимальному проектуванню в будівельній механіці

показує, що основним фактором вибору математичної моделі задачі є прийнятий метод рішення, і тільки в другу чергу вимоги найбільшої відповідності сформульованої моделі своєму фактичному прототипу. Саме цим можна пояснити велике різноманіття моделей і методів рішення задачі оптимального проектування в будівельній механіці.

Перші роботи по оптимальному проектуванню деформованих систем виконані Лагранжем більш 200 років тому назад. Задача була поставлена і виконана методами варіаційного числення про оптимальну форму колони, яка працює на стиск. Але не менш інтенсивний розвиток теорії оптимального проектування конструкцій почалося лише в другій половині ХХ ст. у зв'язку з розвитком методів математичного програмування і теорії оптимального керування, а також поява швидко діючих ЕОМ і ПК.

При оптимізації колон різного поперечного перерізу використовувався математичний метод проекції градієнта при побудові розрахункової моделі методом скінчених елементів для вирішення задач параметричної оптимізації [7]. В теорії оптимального проектування розглядаються задачі визначення форми, розрахункової моделі, внутрішніх властивостей і умов роботи конструкції, які приводять до екстремуму (мінімум чи максимум) вибраної характеристики конструкції при додаткових обмеженнях.

Коли вибрані змінні проектування, задачу оптимального проектування можна сформулювати у вигляді, що представлені в роботах [2;3]. Основний етап при рішенні задачі оптимального проектування системи, яка деформується вибір математичної моделі самої системи, матеріалу з якого вона виконана. В залежності від співвідношень основних геометричних параметрів, розмірів, мова може йти про стержневу систему. Важливим етапом є також вибір моделі матеріалу системи (пружний, пружно-пластичний, жорстко-пластичний и т.д.) Крім того, матеріал може бути ізотропним, ортотропним або анізотропним. Нарешті, математична модель конструкції може бути лінійною, або геометрично чи фізично нелінійною. Важливе значення різних технічних вимог, пропонованих до конструкції, що проектується, виражається в багатьох критеріях оптимальності і обмежень, необхідних при оптимальному проектуванні конструкції, що приводить до великого різноманіття задач оптимального проектування.

Знайти такий проект  $S$  (вектор  $\vec{X}_k$ ), що

$$h_k(S) = 0 \text{ при } k = 1; 2; \dots \dots k_n$$

$$g_j(S) \leq 0 \text{ при } j = 1; 2; \dots \dots j_n \quad (1.1)$$

Функція  $\varphi(S)$  мінімальна. Через  $S$  позначена деяка точка в просторі проектування, яка визначається певними вибраними змінними. В більшості задачах умови на функціонали  $h_k$  і  $g_j$  визначаються обмеженнями на поведінку

конструкції під навантаженням, але деякі із них можуть відображати задані розділи підпростору проектування.

Питання в тому, має задача, визначення в загальному вигляді умови (1.1) рішення, залишається відкритим і лиш в окремих випадках може бути вирішена на основі фізичної інтуїції. Теж саме можна сказати і відносно єдиного рішення.

Із (1.1) випливає, що якщо  $S$  є оптимальним рішенням, то малі варіації  $\delta S$  всередині підпростору проектування задовольняють вимоги.

$$\begin{aligned} \delta h_k(S) &= 0 && \text{при } k = 1; 2; \dots \dots k_n \\ \delta g_j(S) &\leq 0 && \text{для всіх } j, \text{ при яких} \\ \delta g_j(S) &\leq 0 && g_j(S) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Це класична варіаційне формулювання являється необхідною умовою оптимального рішення.

Умову (1.2) можна представити в іншій, часто більш зручній формі. Для простоти припустимо, що змінні проектування визначають  $N$  дійних чисел, так, що простір проектування можна представити як  $N$ -мірне еквівалентне простору.

Позначимо через  $S$  деяке допустиме рішення, а через  $\delta S$  його довільну варіацію в межах підпростору проектування. Якщо  $h_k(S) = 0$ , то варіації  $\delta S$  перпендикулярні по всім векторам  $\nabla h_k(S)$  ( $k = 1; 2; \dots k$ ), де набла-оператор  $\nabla$  означає градієнт. Подібним чином обмеження у вигляді активних нерівностей  $g_j(S) = 0$  потребують, щоб варіація  $\delta S$  не мала компонент в позитивному напрямку  $\nabla g_j(S)$

Звідси можна зробити висновок, що для будь-яких дійних чисел  $\lambda_k \geq 0$  і  $\gamma_j \geq 0$  проекції  $\delta S$  на вектор

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \nabla h_k(S) + \sum_j' \gamma_j \nabla g_j(S) \quad (1.3)$$

не позитивний. Символ  $\sum_j'$  позначає, що сума обмежена лиш тими значеннями  $j$ , для котрих  $g_j(S) = 0$ . Іншими словами, будь-який напрямок, який має компоненту в будь-якому із напрямків (1.3), веде за межі визначеного простору.

Щоб зменшити цільову функцію  $\varphi$ , необхідно рухатися в напрямку, який має будь-яку позитивну компоненту в негативному напрямку  $\nabla \varphi$ , але якщо цей напрямок  $-\nabla \varphi$  є будь-яким із напрямків (1.3), то ніякий рух всередину допустимого простору не зменшить цільової функції. Отже, в будь-якій із оптимальних точок  $-\nabla \varphi$  є одним із напрямком (1.3). Використовуючи цю обставину, можна зробити висновок, якщо  $S$  є оптимальним рішенням, то існує таких дійних чисел  $\gamma_j \geq 0$  і додатних чисел  $\lambda_k$ , що

$$-\nabla \varphi(S) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \nabla h_k(S) + \sum_j' \gamma_j \nabla g_j(S) \quad (1.4)$$

Формула (1.4) виражає умову оптимізації Куна-Таккера. Коли немає активних обмежень – нерівностей, величина  $\lambda_k$  можна інтерпретувати як множники Лагранжа. Для задачі без обмежень умови Куна-Таккера зводиться до умови  $\nabla\varphi = 0$ .

Оскільки відношення 1.2, 1.3 задовольняє будь-які стаціонарні рішення, вони самі по собі не можуть забезпечити глобальну оптимізацію, але вони створюють основу, на яку будуть посилалися більшість досліджень по оптимальному проектуванню.

Щоб впевнитися в глобальності будь-якого із досягнутих мінімумів, необхідно провести додаткові дослідження. Зокрема, якщо допустимий простір проектування випуклий, цільовий функціонал або випуклий, або вігнутий, то деякі теореми нелінійного програмування можуть давати важливу інформацію, відносно глобальності, а також про становище можливого рішення [7].

Якщо цільова функція  $\varphi$  є унімодальною (маючи один екстремум), то пошук оптимального рішення спрощується. Мультимодальні функції можуть мати деякі оптимальні рішення. Для таких функцій глобальне оптимальне рішення надає собою найменше значення  $\varphi(S)$ , тоді як локальні оптимальні рішення представляють собою найменше значення  $\varphi(\vec{X}_k)$  в околиці оптимального проекту  $S^1$ . Як для глобального, так і для локального мінімуму  $\varphi(S^1) \leq \varphi(S)$ , але для глобального оптимального рішення це відношення виконується для всіх  $\vec{X}_k$  в  $E^n$ , тоді для локального оптимального рішення цей простір має місце тільки для деякої околиці.

На практиці припущення про те, що локальний екстремум є глобальним, може бути перевірено шляхом використання деяких початкових векторів, але якщо знайдено одне найменше локальне рішення, в загальному випадку, неможливо показати, що це рішення обов'язково є глобальним оптимальним проектом. Цільова функція є позитивною і володіє єдиним екстремумом. Цей факт встановлюється на основі понять випуклості і вігнутості функції.

Функція  $\varphi(\vec{X}_k)$  називається випуклою в області  $R$ , якщо для любых векторів  $\vec{X}_{k1}$  і  $\vec{X}_{k2} \in R$

$$\varphi(\theta\vec{X}_{k1} + (1 - \theta)\vec{X}_{k2}) \leq \theta\varphi(\vec{X}_{k1}) + (1 - \theta)\varphi(\vec{X}_{k2}). \quad (1.5)$$

Якщо має місце нерівність, що зворотна (1.5) то функція називаються вігнутою.

Диференціальна випукла функція володіє наступними властивостями

1.  $\varphi(\vec{X}_{k2}) - \varphi(\vec{X}_{k1}) \geq \nabla^T \varphi(\vec{X}_{k1})(\vec{X}_{k2} - \vec{X}_{k1})$ ; для всіх  $\vec{X}_{k1}$  і  $\vec{X}_{k2}$
2. матриця  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$  (матриця Гессе) позитивно напів визначена;
3. В області  $R$  функція  $\varphi(\vec{X}_k)$  має тільки один екстремум.

З поняття випуклості витікає важливий результат математичного програмування. Якщо мінімізація функції  $\varphi$  випукла і кожна функція  $g_j(\vec{X}_k)$ ,

яка задає обмеження у вигляді нерівності – вигнута функція, то локальний мінімум являється також і глобальним мінімумом. І аналогічно локальний максимум увігнутої функції являється глобальним максимумом [1].

**Результати числових досліджень.** Важливий елемент постановки задачі оптимального проектування – вибір механічної моделі процесу деформування, яка відображає фізичні закони дослідного чого процесу і реальні властивості матеріалів, математично виражених у вигляді рівняння стану. Коефіцієнти чутливості, які використовуються в цьому пошуковому процесі, розраховуються в ході аналізу чутливості підбору поперечного перерізу колон.

Параметрична оптимізація дозволяє знайти оптимум конструкції в ході мінімізації або максимізації призначеної цільової функції. В процесі оптимізації колон підбираються фізичні параметри поперечного перерізу колон, що є проектними змінними. При зміні проектних невідомих повинно виконуватися обмеження, для нашого випадку, це максимальні напруження, які накладені на відгук конструкції і на змінні проектування.

В ході аналізу чутливості розраховується відношення, коли необхідно модифікувати конструкцію, яка неефективна, щоб можна було запропонувати варіанти для зменшення її поперечного перерізу, що приведе до зменшення маси. Головна ціль оптимізації – автоматизувати для даної задачі процес підбору поперечного перерізу колони, використовуючи для знаходження кращого варіанту конструкції чисельних методів.

Математичне представлення задачі проектування називається загальною формулюванням задачі оптимізації можна записати так:  $F(\bar{X}) \rightarrow \min$ , де  $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  - змінні проектування. При цьому повинні виконуватися нерівність  $\sigma_{max} \leq \sigma_{adm}$ .

Об'єктом оптимізації є прототип Національного цирку України — один з найстаріших церков в Україні. Будівля має круглу форму в плані діаметром 50,3 метра. Будівля одноповерхова. Верхня відмітка комплексу +15.700 м; відмітка прибудови +4.000 м.

Конструктивна схема являє собою одноповерхову будівлю з повним каркасом. Основні несучі та огорожувальні конструкції будівлі прийняті:

- зовнішнє покриття: проф.. настил, супердифузійна мембрана, утеплювач 300 мм, паробар'єр, внутрішнє оздоблення.

- каркас будівлі складається з колон що представлені різного поперечного перерізу. Металеві колони для нижнього висотою 4 м. Колони основного ярусу висотою 8 м. Металеві колони для верхнього ярусу висотою 1.6 м. На колони нижнього ярусу спираються металеві ригелі, перерізом 250x250 мм, товщиною 3 мм, довжиною 4.87 м. На колони основного ярусу спираються металеві

ригелі, перерізом 600x600 мм, товщиною 5 мм, довжиною 4.08 м. Металеві ригелі верхнього ярусу перерізом 100x100 мм товщиною 3 мм ;

- зовнішні стіни: проф. настил, супердифузійна мембрана, утеплювач мін. вати 150 мм, паробар'єр, ОСБ-3 15 мм, внутрішнє оздоблення.

В даній статті розглядається тільки частина будівлі – це оптимальне проектування колон.

Навантаження на будівлю задавалося згідно [2]. Були задані наступні навантаження: власна вага несучого каркасу, снігове, вітрове, технологічне навантаження від людей. Була обрана сама небезпечна комбінація навантажень і за цією комбінацією виконувався безпосередньо розрахунок на оптимальне проектування колон різного поперечного перерізу. Мета цього розрахунку мінімізувати вагу матеріалу колони і дослідження поведінки комбінованих напружень оптимального перерізу за заданим навантаженням.

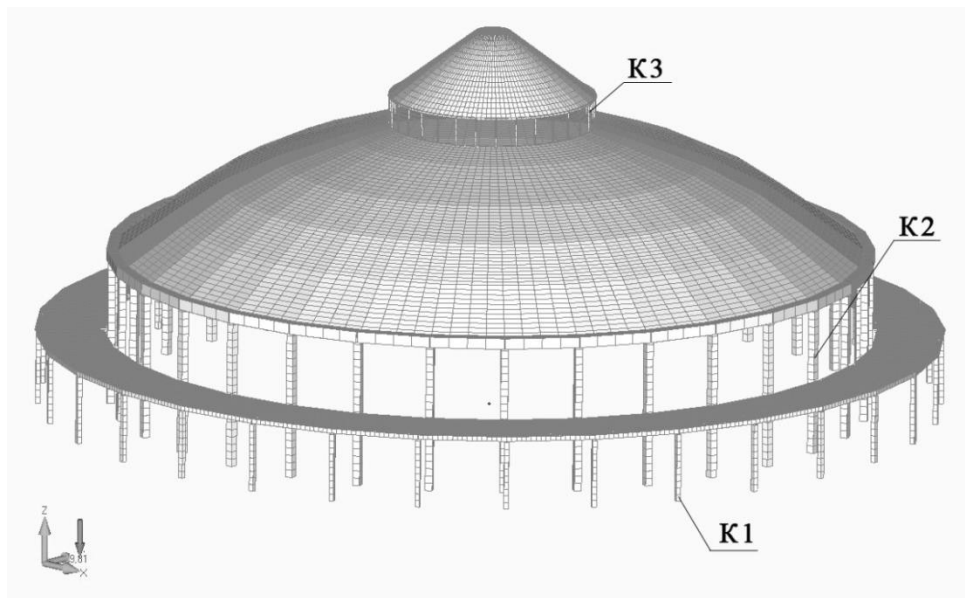


Рис 1.1. Просторова скінченно-елементна модель будівлі в Femap Nastran

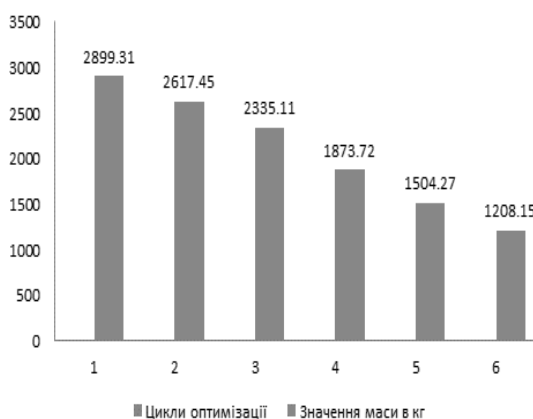


Рис 1.2. Колона К1, поперечний переріз профіль прямокутної труби

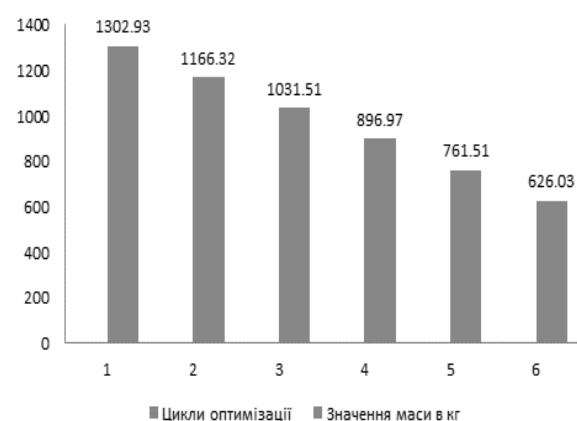


Рис 1.3. Колона К1, поперечний переріз профіль двотавр

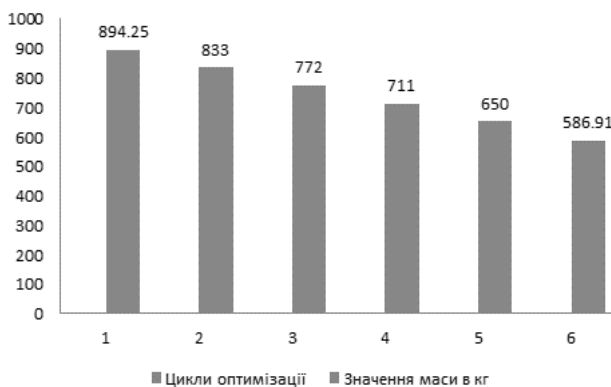


Рис 1.4. Колона К1, поперечний переріз профіль круглої труби

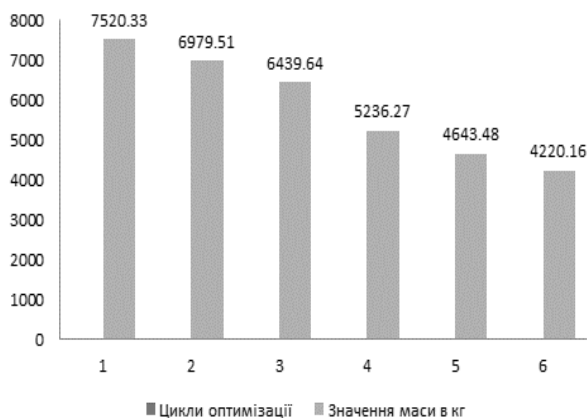


Рис 1.5. Колона К2, поперечний переріз профіль прямокутної труби

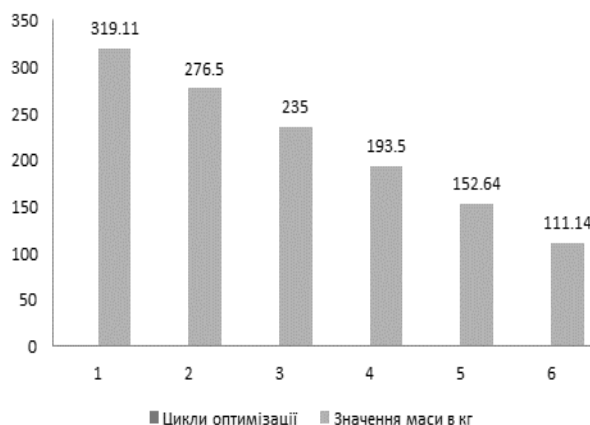


Рис 1.6. Колона К3, поперечний переріз профіль прямокутної труби

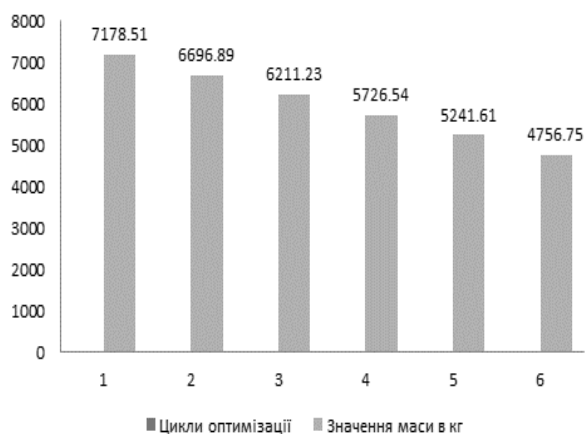


Рис 1.7 Колона К2, поперечний переріз профіль двотавр

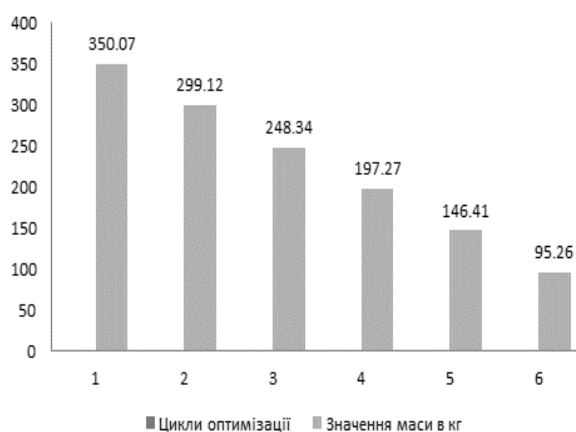


Рис 1.8 Колона К3, поперечний переріз профіль двотавр



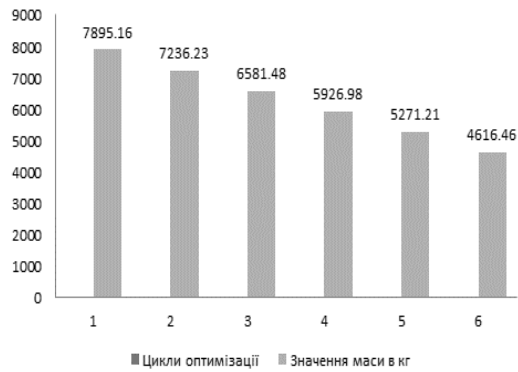


Рис 1.9 Колона К2, поперечний переріз профіль круглої труби

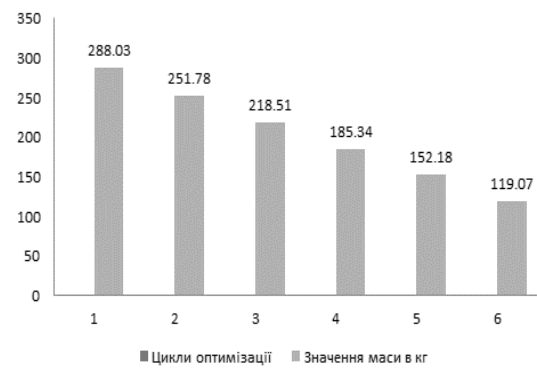


Рис 1.10 Колона К3, поперечний переріз профіль круглої труби

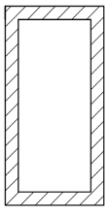
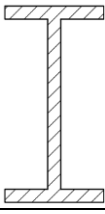
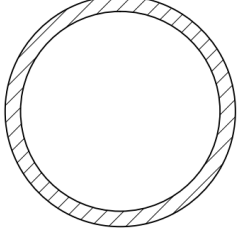
Таблиця 1

## Зменшення по циклам оптимізації колон

Колона	Ескіз перерізу	До оптимізації			Після оптимізації		
		Площа в мм <sup>2</sup>	Маса в кг.	Напруження в МПа.	Площа в мм <sup>2</sup>	Маса в кг.	Напруження в МПа.
К1		2964	2899.31	151.2	1208.32	1208.15	195.5
К2		3564	7520.33	153	2003.5	4756.75	197.7
К3		804	319.11	159.4	281	111.14	194.1
К1		1332	1302.93	146.5	640	626.03	196.5
К2		3402	7178.51	170	2254.3	4220.16	200
К3		882	350.07	151.4	240	95.26	195.1
К1		914.21	894.25	168.2	602	586.91	197.3
К2		3741.64	7895.16	161.2	2187.82	4616.46	199.6
К3		725.71	288.03	170.5	302.1	119.07	199.9

Таблиця 2

## Зменшення по циклам оптимізації колон

Колона	Ескіз перерізу	Зменшення і збільшення параметрів оптимізації		
		Площа в %	Маса %	Напруження %
K1		59.23346829	58.3297405	22.65984655
K2		43.78507295	43.8833136	22.61001517
K3		65.04975124	65.1718843	17.87738279
K1		51.95195195	51.9521386	25.44529262
K2		33.73603762	33.7362489	15
K3		72.78911565	72.7882995	22.39876986
K1		34.15079686	34.3684652	14.74911303
K2		41.52777926	41.5279741	19.23847695
K3		58.37180141	58.6605562	14.70735368

**Висновки:**

За допомогою програмного комплексу Femap Nastran з використанням методу скінченних елементів було побудована просторову скінченну-елементну модель. На яку було задано навантаження згідно будівельних норм і виконаний розрахунок на параметричну оптимізацію колон різного поперечного перерізу і дослідження комбінованих напружень при оптимальному проектування колон.

Розрахунок показав, що для сталевих колон при оптимізації можна зменшити площу поперечного перерізу і ваги від 30% до 60%, при цьому комбіновані напруження збільшилися від 15% до 20% і не перевищують критичне комбіноване допустиме напруження  $\sigma_{max} \leq \sigma_{adm} = 200 \text{ МПа}$ . Цей метод оптимізації для сталевих колон, які працюють на стиск зі згином, дає можливість автоматизувати процес проектування і отримання оптимального поперечного перерізу для будівельних конструкцій такого типу. Також було проведено перевірочний розрахунок на стійкість всієї просторової скінченно-елементної моделі після того як було введено згідно розрахунків оптимальний поперечний переріз розрахованих колон.

### Перелік використаної літератури

1. Пермяков В.О., Перельмутер А.В. Оптимальное проектирование стальных стержневых конструкций. – К: ООО “Издательство Сталь”, 2008. – 538 с.
2. ДБН В.1.2-2:2006. *Навантаження і впливи*. Норми проектування.- К.: Мінрегіонбуд України, 2006. - 59 с.
3. Моргун А.С., Сорока М.М. Розв’язування задач параметричної оптимізації будівельних конструкцій в програмного комплексу ANSYS // Вісник Вінницького політехнічного інституту 2017. №5 С. 18-22.
4. Гинзбург А.В., Василькин А.А. Постановка задачи оптимального проектирования стальных конструкций // Вестник МГСУ. 2014. № 6. - С. 52—62.
5. Волков А.А., Василькин А.А. Развитие методологии поиска проектного решения при проектировании строительных металлоконструкций // Вестник МГСУ. 2014. № 9. - С. 123—137.
6. Волков А.А., Беляев А.В., Давыдов Е.А., Юдин С.В. Некоторые задачи автоматизации проектирования в строительстве // Вестник МГСУ. 2010. № 4. - С. 256—261.
7. Шелофаст В.В., Куликов В.Г., Аль Хаммади, Яковлев А.С. Автоматизированное проектирование зданий и сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2011. № 9. - С. 49—51. 11. Fedorik F. Effici

д.т.н., проф. Гайдайчук В.В.,  
аспирант Кошевий О.О., лаборант Кошева О.В.,  
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

### ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛОНН ПРИ РАЗНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ.

В статье рассмотрены численное исследование оптимального проектирования и подбор оптимального поперечного сечения стержневых конечных элементов, работающих на сжатие с изгибом. Выполнен сбор нагрузки, согласно строительным нормам. При расчете выполнено минимизации массы и уменьшения поперечного сечения, сделаны выводы по универсальности данной методики.

*Ключевые слова:* параметрическая оптимизация, оптимальное проектирование стальных конструкций, оптимизация колонн разного поперечного сечения, оптимизация Femap Nastran.

Gaydaychyk V.V. doctor of technical sciences, professor,  
Kosheviy O.O., postgraduate, Kosheva O.V. laboratory assistant  
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

## **PARAMETRIC OPTIMIZATION OF COLUMNS WITH DIFFERENT GEOMETRIC SHAPE OF CROSS-SECTION.**

The article considers a numerical analysis of optimal design of metal column. Selected optimal cross-section rod elements of column, which works in compression with bending. Collected all load that acts to the column in accordance with building standards. Minimizing the weight and reducing the cross-section of column were calculated. The summary about versatility of this methodology was made.

*Keywords: parametric optimization, optimal design of steel structures, optimization of columns with different cross-section, optimization with Femap Nastran.*