УДК 519.21
канд. ф-м. наук доц. Наголкіна З.І.,
zonagol@ukr.net, ORCID / 0000-0002-2722-5176,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ІМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ ВПЛИВУ ТУРБУЛЕНТНОСТІ НА ПРОЦЕСИ ТЕПЛООБМІНУ В ТРУБОПРОВОДІ

Запропонована імовірнісна модель впливу турбулентності на процеси теплообміну представляє собою стохастичне диференціальне рівняння з необмеженим коефіцієнтом знесення. Вона дає можливість визначити середньоквадратичні оцінки розподілів температури.
Ключові слова. Теплоносії, турбулентний режим, втрати теплової енергії.

Гідродинамічні режими руху теплоносія в трубопроводах теплопостачання комунальних теплових мереж визначаються теплофізичними властивостями і швидкістю теплоносія. Критерієм переходу є число $Re = \frac{v \cdot L}{\nu}$, де v - швидкість руху теплоносія, L - лінійний розмір, ν – кінематична в’язкість. Велика протяжність трубопроводів теплових мереж, наявність локального опору у вигляді арматури і поворотів сприяють появі вихорів, що являє собою ознаку турбулентності. В теплових мережах важливо враховувати втрати теплової енергії в навколишнє середовище. Гідродинамічний режим в свою чергу визначає інтенсивність тепловіддачі, що описана рядом емпіричних закономірностей типу Nu=f(Re, Pe). Таким чином при числі $Re \geq Re_{kp}$ будь-які малі збурення, що спонтанно виникають в потоці, не зникають, а навпаки - сприяють турбулізації потока теплоносія.

Існують різноманітні моделі, що описують турбулентність. Одна з таких моделей – статистична. В цій моделі теплофізичні і гідродинамічні процеси описуються через статистичні характеристики – моменти випадкових полей.

В даній роботі запропонована імовірнісна модель, яка в деякому розумінні є окремим випадком статистичної. Вона не дає змогу отримати точне значення температури теплоносія, а тільки її середньоквадратичні оцінки.

В якості імовірнісної моделі турбулентності в трубопроводі пропонується рівняння конвективного теплообміну з випадковим збуренням у вигляді білого шуму. Саме цей випадковий адитивний додаток, пов'язаний з вінеровським процесом, враховує вплив турбулентності.

Рівняння конвективного теплообміну в трубопроводі в одновимірному випадку в найбільш загальному вигляді

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - v \frac{\partial \theta}{\partial x} + b\,(\theta - \theta_0) \qquad (1)$$

Де $\theta(t,x) -$ температура теплоносія в точці з координатою x в момент часу t. $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт температуропровідності, v –швидкість руху, $b = \frac{2\alpha}{c\rho R}$, -

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Θ_0 -температура зовнішнього середовища, λ-коефіцієнт теплопровідності, c – коефіцієнт теплоємності, ρ – густина, R-радіус труби [1]. (Будемо вважати, що розподілом температур вздовж радіуса можна нехтувати).

Введемо до розгляду функціональний нескінченно вимірний Гілбертів простір неперервних функцій з інтегрованим квадратом $H = L^2[0,l]$ і нормою $\|\varphi\|^2 = \int_0^l |\varphi(x)|^2 dx$. x$\in [0,l]$. Тоді, при кожному фіксованому t , $\theta(t,x) = \theta_t(x) = \varphi(x)$.

Нехай функція u(t) - розподіл температури в момент t, і приймає значення в $H = L^2[0,l]$. Тоді $u(t_1) = \theta_{t_1}(x) = \varphi_1(x)$. Відповідно $\|u(t_1)\|^2 = \int_0^l |\varphi_1(x)|^2 dx$.

Рівняння (1) можна записати в загальному вигляді в просторі H

$$\frac{du}{dt} = Au\ , \quad u(t_0) = u_0. \qquad (2)$$

Оператор A в H визначається за формулою

$$Au = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial u}{\partial x} + b\,u$$

і є необмеженим оператором диференціювання, визначений на області $D_A \subset H$ щільно вкладеній. (D_A - множина двічі неперервно диференційованих функцій). Якщо задача Коші (2) - коректна, то існує полугрупа сильно неперервних обмежених операторів U(t), які визначені спочатку на D_A і подовжені на H. Ця полугрупа визначає розв'язок (2) за формулою

$$u(t) = U(t)u_0,\ \ u_0 \in H,\ \ t \in [0,T]$$

При певних умовах на спектр оператора A полугрупа має оцінку

$$\|\mathrm{U}(\mathrm{t})u_0\| \le e^{\gamma t}\|u_0\| \qquad (3)$$

В [2] досліджені рівняння параболічного типу, до яких відносяться (1), а також відповідно (2), і показана справедливість (3). Імовірнісна модель описана рівнянням в H вигляду

$$du = Au\,dt + B\big(t, u(t)\big)dw(t) \qquad (4)$$

$u(t_0) = u_0 = u_0 \in H, t \in [0,T]$.

Рівняння (4) є випадковим збуренням рівняння (2) і представляє собою стохастичне диференціальне рівняння з необмеженим коефіцієнтом знесення.

Це рівняння відрізняється від класичного стохастичного диференціального рівняння [3]. Доведення існування його єдиного розв'язку провадиться методом мультиплікативних представлень Троттера-Далецького [4]. За цим методом випливає можливість розглядання замість (4) еквівалентного йому інтегрального рівняння Іто

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)B\big(s,u(s)\big)dw(s) \qquad (5)$$

Для дослідження (4) розглянемо наступні об'єкти. Нехай (Ω, F, P) – імовірносний простір. H – дійсний сепарабельний гілбертів простір, F^t – поток $\sigma -$ підалгебр $\sigma -$ алгебри F, узгоджений з вінеровським процесом w(t) [3]. Будемо вважати, що коефіцієнт $B(s,x) \in \wp^2(H)$ – функція вимірна по сукупності змінних ($\wp^2(H)$ -простір операторів Гільберта Шмідта) $x \in H, s \in [0,T]$ задовольняє

$$\sigma^2(B(s,x) \le k_1\|x\|^2 + k_2 \qquad (6\ )$$

$$\sigma^2(B(s,x) - B(s,y))) \le k_3\|x-y\|^2 \qquad (7)$$

$\sigma^2(B) = \sum_{j=0}^{\infty}\left\|B\varphi_j\right\|^2$- норма Гільберта–Шмідта,

$\{\varphi_j\} -$ ортонормований базис в H. k_1, k_2, k_3 – довільні сталі. Умови (6),(7), а також (3) стандартні для існування єдиного розв'язку рівняння (5).

Теорема. Нехай коефіцієнти (5) задовольняють умовам (6,7,3). Тоді, існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності $\mathrm{F^t}$ вимірний випадковий процес u(t), який з імовірністю 1 має наступні оцінки:

$$\mathrm{M_0}\|\mathrm{u_x(t)}\|^2 \le \mathrm{e^{\beta_1 t}}\|\mathrm{x}\|^2 + \beta_2 t \qquad (8)$$

$$\mathrm{M_0}\left\|\mathrm{u_x(t)} - \mathrm{u_y(t)}\right\|^2 \le \mathrm{e^{\beta_3 t}}\|\mathrm{x-y}\|^2 \qquad (9)$$

$\mathrm{M_0}$ – умовне математичне сподівання відносно $F^0, x, y\epsilon H$, F^0- вимірні функції. Існування єдиного розв'язку рівняння не залежить від простору і наведено в [3] у разі виконання відповідних оцінок. Для доведення (8), (9) розглянемо норму в H у вигляді скалярного добутку

$$\mathrm{M_0}\|\mathrm{u_x(t)}\|^2 = M_0(U(t)x + \int_0^t U(t-s)B\big(s,u_x(s)\big)dw(s), U(t)x + \int_0^t U(t-s)B\big(s,u_x(s)\big)dw(s))$$

$$\mathrm{M_0}\|\mathrm{u_x(t)}\|^2 = \|U(t)x\|^2 + 2(M_0(\,U(t)x, \int_0^t U(t-s)B\big(s,u_x(s)\big)dw(s))$$

$$+\mathrm{M_0}\left\|\int_0^t U(t-s)B\big(s,u_x(s)\big)dw(s)\right\|^2.$$

Скориставшись оцінками стохастичного інтеграла, а також властивостями коефіцієнтів рівняння (6,7) одержимо оцінку

$$\mathrm{M_0}\|\mathrm{u_x(t)}\|^2 \le e^{2\gamma t}\|x\|^2 + \int_0^t e^{\gamma(t-s)}\mathrm{M_0}\,(k_1\|u_x(s)\|^2 + k_2)\mathrm{ds}e^{t(\gamma + k_1 e^{\gamma t})}$$

скориставшись лемою Гронуола для інтегральних рівнянь отримаємо оцінку

$$\mathrm{M_0}\|\mathrm{u_x(t)}\|^2 \le \mathrm{e^{\beta_1 t}}\|\mathrm{x}\|^2 + \beta_2 t\ ,$$

де $\beta_1 = 2\gamma + e^{\gamma t}k_1$, $\beta_2 = k_2$

Аналогічно доводиться справедливість нерівності (9).

Користуючись теоремою Чебишева можна знайти імовірність функцією u(t) перевищення певного критичного значення. $P\{\|u(t)\|^2 > K\} \leq \frac{M\|u(t)\|^2}{K^2}$.

Висновок. Запропонована модель визначає середньоквадратичні оцінки збуреного рівняння конвективного теплообміну, а також імовірність відхилень розподілу температури від контрольних або критичних значень.

Література.

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. -М.: Изд. Машгиз, 1962.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. -М.: Изд. Наука 1967.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Изд. Наука, 1977.
4. Белопольская Я.И., Наголкина З.И. О мультипликативных представлениях решений нелинейных стохастических уравнений, сб: Вероятностные распределения в бесконечномерном пространстве. - К.: Наукова думка, 1978.

канд. ф-м. наук, доцент Наголкина З.І.,
Киевский национальный унывеpситет строительства и архитектуры

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ПРОЦЕССЫ ТЕПЛООБМЕНА В ТРУБОПРОВОДЕ

Предлагается вероятностная модель влияния турбулентности на процессы конвективного теплообмена. Эта модель представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение с неограниченным оператором сноса и дает возможность найти средние значения температурных распределений.

Ключевые слова: Теплоносители, турбулентный режим, потери тепловой энергии.

Nagolkina Z.,
Kiev National University of building and architecture

PROBABILISTIC MODEL OF THE EFFECT OF TURBULENCE ON THE PROCESSES OF HEAT EXCHANGE IN A PIPELINE.

The proposed probabilistic model of the influence of turbulence on the processes of heat transfer is a stochastic differential equation with an unlimited demping coefficient. It gives the possibility to determine the mean-square estimates of temperature distributions.

Key words. Heat transfers, turbulent regime, thermal energy losses.