

УДК 514.18

к.т.н., доцент Скочко В.І.,
vladimir.and.friends@gmail.com, orcid: 0000-0002-1709-2621,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ОБРАЗІВ ЗАМКНЕНИХ КРИВИХ НА ОСНОВІ МОДЕЛЕЙ З НАПЕРЕД ЗАДАНОЮ ТОПОЛОГІЄЮ

Демонструється спосіб розрахунку координат дискретних каркасів плоских замкнених кривих, функції яких задані явним або неявним способом. Для цього використовуються дискретні інтерпретаційні моделі сітчастих структур, що мають наперед задані топологічні ознаки та змінюють форму під впливом регульованих векторних навантажень.

Ключові слова: дискретні образи, сітчасті структури, геометричне моделювання, замкнуті криві.

Постановка проблеми. В процесі побудови плоских перерізів складних технічних поверхонь, заданих функціонально, виникає потреба у визначенні певних множин точок – дискретних образів, що належать графікам відповідних функцій. Якщо просторова функція задана у явній формі:

$$z = f(x, y), \quad y = f(x, z) \quad \text{або} \quad x = f(z, y), \quad (1)$$

то, задаючи одну з координат, як сталу величину, одержимо рівняння графіку перерізу площиною, паралельною одній з координатних площин. Наприклад:

$$z = f(x), \quad \text{при} \quad y = \text{const}, \quad \text{або} \quad (2)$$

$$z = f(y), \quad \text{при} \quad x = \text{const}. \quad (3)$$

В такому випадку побудова каркасу графіку одержаної функції значно спрощується, оскільки представляє собою пряму підстановку координат x чи y до формул (2) чи (3) відповідно. Нескладно побудувати дискретний каркас кривої й у випадку, якщо її функцію задано у параметричній формі на площині:

$$\begin{cases} x = f_x(u), \\ y = f_y(u), \end{cases} \quad \text{або} \quad s = f_s(u). \quad (4)$$

де: s – узагальнене позначення координат (x та y) для спрощення записів надалі.

Задача побудови каркасу кривої значно ускладнюється, якщо необхідно побудувати плоский переріз (плоску криву) поверхні, заданої у неявній формі:

$$\zeta(x, y, z) = 0, \quad (5)$$

оскільки, навіть після задання однієї з координат сталою величиною, немає жодної гарантії того, що одержані функції графіків плоских кривих можна буде привести до явної форми. Окрім того, велика кількість досліджуваних кривих, які представляють собою плоскі перерізи або обводи технічних форм, є

замкненими. Це ще більше ускладнює задачу моделювання, оскільки, якщо крива замкнена, то її дискретному образу мають бути притаманні відповідні ознаки, а саме: замкненість, рівномірність розподілу вільних вузлів (що будуть інцидентними досліджуваній неперервній кривій), а також їх згущення у характерних зонах (різкої зміни кривизни, наявності особливих точок та ін.). Відтак, підбір геометричної моделі, яка б найкращим чином відображала особливості побудованої замкненої кривої, є важливою й актуальною задачею.

Формулювання цілей та завдання публікації. Зважаючи на все вище зазначене, запропонуємо геометричну модель, на основі якої можна буде будувати дискретні образи замкнених кривих, що будуть максимально точно відображати особливості та властивості відповідних функцій.

Огляд попередніх досліджень. В роботах [1, 2, 3] було розглянуто кілька підходів до геометричного моделювання дискретних образів плоских кривих. Одним із цих підходів передбачалася побудова сітчастих структур, які інтерпретують роботу реальних стрижневих безмоментних конструкцій [4], що деформуються під дією вузлових векторних зусиль \vec{Z} польової природи, утворюючи шукану форму дискретних образів. При цьому процес формоутворення дискретних образів реалізується шляхом пошуку такого перерозподілу внутрішніх зусиль \bar{R}_{ij} або умовних параметрів жорсткості \aleph_{ij} ланок моделей (де « i » та « j » – індекси довільних i -го та j -го з'єднаних вузлів), при яких обрана множина незафіксованих вузлів стає інцидентною графіку досліджуваної функції, а сама функція може бути задана у неявній формі:

$$\varphi = \zeta(x, y) = 0. \quad (6)$$

Пошук параметрів \aleph_{ij} передбачає вирішення системи параметричних рівнянь стану ланок моделі типу (7) та (8) [8, 9] спільно з рівняннями рівноваги вільних вузлів типу (9) згідно з узагальненою формою статико-геометричного методу дискретної геометрії [5]. Параметричні рівняння мають такий вигляд:

1) для ланок, що з'єднують деякі два вільні вузли (S_a і S_b):

$$\sum_{i=1}^{l-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \aleph_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,b}^2 \cdot \aleph_{a,b} + \sum_{j=1}^{m-1} \delta_{b,j}^2 \cdot \aleph_{b,j} - (\varphi_a + \varphi_b) + B_{a,b} = 0, \quad (7)$$

2) для ланок, що з'єднують деякі вільний і зафіксований вузли (S_a і S_{fix}):

$$\sum_{i=1}^{l-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \aleph_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,fix}^2 \cdot \aleph_{a,fix} - \varphi_a + (R_{x_{fix}} \cdot x_{fix} + R_{y_{fix}} \cdot y_{fix}) + B_{a,fix} = 0, \quad (8)$$

де l і m – кількість вузлів суміжних із a -м та b -м (або fix -м); χ – константа, величина якої залежить від топології моделі; φ_a і φ_b – вузлові потенціали (або значення досліджуваної функції); $R_{s_{fix}}$ – проекції зусиль у ланках, що з'єднуються з зафіксованими вузлами; $B_{a,b}$ і $B_{a,fix}$ – константи, що є результатом інтегрування та додаткових математичних перетворень рівнянь типу (11):

$$\sum_{j=1}^n \aleph_{i,j} \cdot \delta_{i,j}^2 - \varphi_i + G_i = 0, (i = \overline{1, w}), \quad (9)$$

де: φ_i – вузлове значення потенціалу формоутворюючих впливів (або значення досліджуваної функції); G_i – невизначена константа інтегрування. Останнє рівняння встановлює зв'язок між формою дискретного образу та потенціалом векторного поля вузлових навантажень. Воно виводиться шляхом інтегрування рівнянь статичної рівноваги вільних вузлів, що мають наступну форму:

$$\sum_{j=1}^n (s_j - s_i) \cdot \aleph_{i,j} + \mathfrak{Z}_{s_i} = 0, (i = \overline{1, w}; s = x, y), \quad (10)$$

$$\aleph_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j}, \quad (11)$$

де: \mathfrak{Z}_{s_i} – компоненти вектора зовнішніх сил $\overline{\mathfrak{Z}}_i$, прикладених до досліджуваних w вільних вузлів моделі; n – кількість незафіксованих вузлів моделі, з'єднаних із i -м вузлом; $\delta_{i,j}$ – довжина ланки між i -м та j -м вузлами. Спільне розв'язання системи рівнянь (7), (8) та (10) відносно координат x_i, y_i та параметрів умовної жорсткості $\aleph_{i,j}$ дає шукану форму дискретного образу.

Згідно з [6] рівняння (11) можна записати у модифікованій формі функції Лагранжа \mathfrak{R}_i з введенням невизначених коефіцієнтів λ_i :

$$\mathfrak{R}_i = \sum_{j=1}^n \aleph_{i,j} \cdot \delta_{i,j}^2 - \lambda_i \cdot \varphi_i + G'_i = 0, (i = \overline{1, w}), \quad (12)$$

де G'_i – невизначена константа, що враховує введення коефіцієнта λ_i . Диференціювання цієї функції по x_i, y_i та λ_i дає систему рівнянь:

$$\sum_{j=1}^n (s_j - s_i) \cdot \aleph_{i,j} + \wp_{s_i} = 0, (i = \overline{1, w}; s = x, y), \quad (13)$$

$$\wp_{s_i} = \lambda_i \cdot \mathfrak{Z}_{s_i} = \lambda_i \cdot \partial \varphi_i / \partial s_i, (i = \overline{1, w}; s = x, y), \quad (14)$$

$$\varphi_i = \zeta_i(x_i, y_i) = 0, (i = \overline{1, w}), \quad (15)$$

розв'язуючи яку відносно координат x_i, y_i та коефіцієнтів λ_i , також можна одержати шукану форму дискретного образу, однак положення вузлів будуть відрізнятися.

Основне дослідження. Спираючись на два запропоновані вище підходи до формування дискретного образу графіку досліджуваної функції, а також враховуючи те, що графік має бути замкненою кривою, стає очевидною необхідність у тому, щоб і топологічний еквівалент дискретної моделі був замкненим. Найпростішим прикладом такої моделі є два дискретно представлені концентричні у початковому стані кола (див. рис. 1.а.). На зовнішньому колі мають міститися базові (зафіксовані) вузли моделі, а на внутрішньому – вільні. При цьому суміжні вузли внутрішнього кола можуть бути як з'єднаними так і нез'єднаними ланками між собою та вузлами

зовнішнього кола базових вузлів. Бажано, щоб з'єднання з базовими вузлами були регулярними, оскільки в іншому випадку процес формоутворення може призвести до виродження моделі й співпадіння окремих або групи вільних вузлів. Внаслідок цього довжини деяких ланок можуть стати нульовими, а параметри \aleph_{ij} зростатимуть до нескінченності й розрахункові системи (7), (8) і (10) або (13) – (15) не матимуть розв'язку, або цей розв'язок не матиме фізичного сенсу.

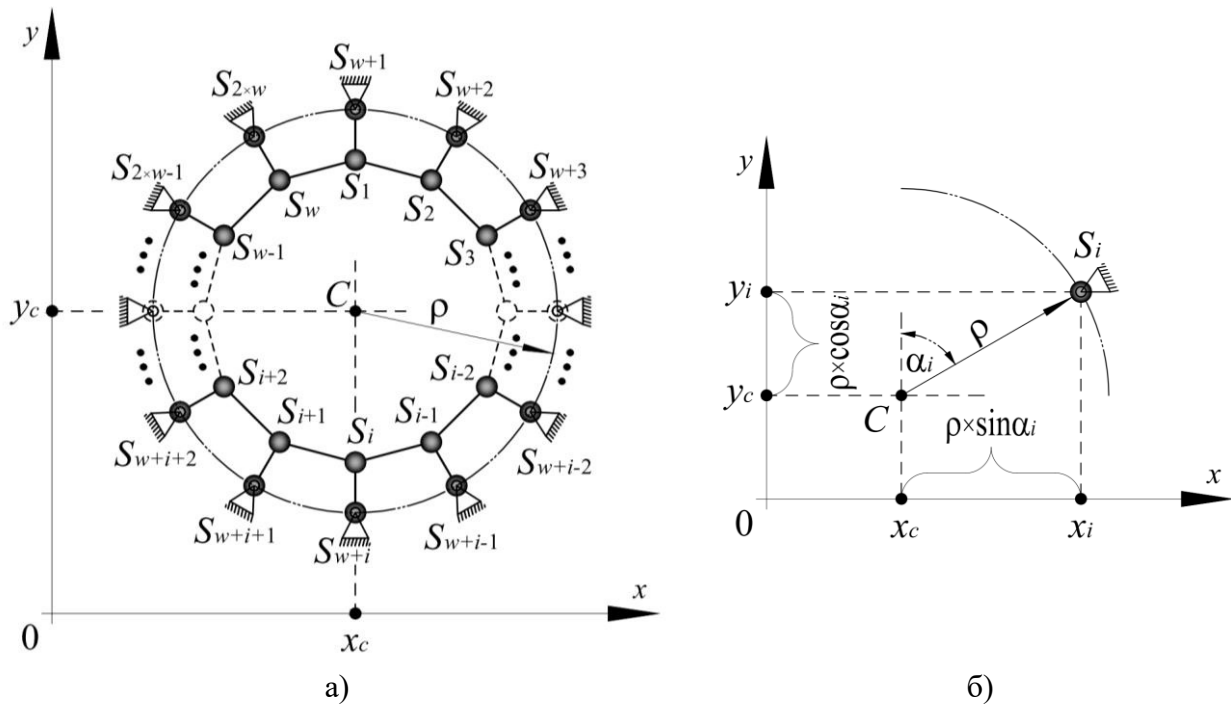


Рис. 1. Формування дискретної моделі замкнутої кривої:

- а) дискретна модель замкнутої кривої, представлена двома концентричними колами;
- б) принцип визначення координат базових (зафіксованих) вузлів моделі

Умовні позначення (тут і надалі): ——— – ланки дискретного образу (моделі);
 ——— – зовнішнє коло базових вузлів; ● – вільні вузли дискретного образу з множини w ,
 координати яких мають задовільняти функції φ ; ● – базові вузли моделі.

Розміщення вузлів запропонованої моделі саме на колі зумовлюється простотою визначення координат базових вузлів. Нехай нумерація вузлів є послідовною з використанням одинарного індексу. Вважатимемо, що перші w вузлів є вільними, а наступні ще w вузлів – базовими. Тоді, якщо очікується, що графік кривої буде розміщено в межах кола (з радіусом ρ), центр якого лежить у точці $C(x_c, y_c)$, то координати базових вузлів становитимуть (див. рис. 1.б.):

$$x_i = \rho \cdot \sin \alpha_i + x_c, (i = \overline{w+1, 2 \cdot w}), \quad (16)$$

$$y_i = \rho \cdot \cos \alpha_i + y_c, (i = \overline{w+1, 2 \cdot w}). \quad (17)$$

Базові вузли будуть встановлені зі сталим кутовим кроком ψ , що складе:

$$\psi = 2 \cdot \pi / w . \quad (18)$$

Кут α становитиме:

$$\alpha_i = \psi \cdot (i - 1) = (2 \cdot \pi / w) \cdot (i - 1), (i = \overline{w + 1, 2 \cdot w}), \quad (19)$$

З урахуванням (19) формули (16) та (17) приймуть наступний вигляд:

$$x_i = \rho \cdot \sin[(2 \cdot \pi / w) \cdot (i - 1)] + x_C, (i = \overline{w + 1, 2 \cdot w}), \quad (20)$$

$$y_i = \rho \cdot \cos[(2 \cdot \pi / w) \cdot (i - 1)] + y_C, (i = \overline{w + 1, 2 \cdot w}). \quad (21)$$

Маючи координати базових вузлів та наперед визначаючись із топологічними ознаками моделі, можемо розрахувати й координати усіх вільних вузлів. Початкове їх положення можна визначити шляхом складання системи рівнянь рівноваги типу (10) за відсутності вузлових навантажень:

$$\sum_{j=1}^n (s_j - s_i) \cdot \mathfrak{N}_{i,j} = 0, (i = \overline{1, w}; s = x, y). \quad (22)$$

Далі, при визначенні координат вільних вузлів на інших етапах ітераційного числення, можна діяти двома шляхами, використовуючи одну з двох вище продемонстрованих методик.

У випадку, якщо для обчислення шуканих координат використовуються рівняння типу (7), (8) і (10), то існує можливість впливу на форму дискретного образу не лише за допомогою варіювання абсолютних величин та напрямків вузлових навантажень, а й шляхом корегування умовних параметрів жорсткості. Це дозволяє управляти характером розподілу вузлів по периметру кривої. Але, якщо шуканий дискретний образ аналізується виключно як геометрична фігура і постановкою задачі не вимагається задання конкретних вузлових навантажень, що характеризуватимуть реальні зовнішні впливи на технічну форму, яка буде результатом глобального проектування, то можливі кілька варіантів задання функцій вузлових навантажень.

В першому й простішому випадку зберігається градієнтний зв'язок між значенням досліджуваної функції φ_i та відповідними векторами зовнішніх сил:

$$\mathfrak{F}_{s_i} = \partial \varphi_i / \partial s_i, (i = \overline{1, w}; s = x, y). \quad (23)$$

У даному випадку, незважаючи на оперування параметрами умовної жорсткості, характер розподілу вузлів моделі є досить непередбачуваним.

В другому випадку, градієнтний зв'язок (23) відсутній, що цілком можливо згідно з [7]. В такому випадку побудова векторів вузлових навантажень може базуватися на логічних міркуваннях та спрямовувати вузли у необхідному напрямку. Наприклад, якщо спрямовувати вільні вузли строго до центру кола моделі $C(x_C, y_C)$, то величини векторів можна записати так:

$$\mathfrak{F}_{s_i} = F_{s_i} = s_C - s_i, (i = \overline{1, w}; s = x, y). \quad (24)$$

Якщо необхідно, щоб вузлові навантаження не лише були спрямовані

строго до центру, але й завжди мали деяку однакову абсолютну величину a_i , то формули для розрахунку векторних складових цих навантажень записуватимуться так:

$$\mathfrak{F}_{si} = a_i \cdot F_{si} / (F_{xi}^2 + F_{yi}^2)^{1/2}, (i = \overline{1, w}; s = x, y). \quad (25)$$

Можливий, також, випадок, при якому необхідно спрямовувати усі вільні вузли не до центру зовнішнього кола опорних вузлів, а до центру ваги вільних вузлів. Це дає можливість зосередити більше вузлів на нетривіальних ділянках кривої, що мають увігнутості або різку зміну кривизни. В такому випадку векторні компоненти F_{si} записуватимуться таки чином:

$$F_{si} = \sum_{j=1}^w (s_j / w) - s_i, (i = \overline{1, w}; s = x, y). \quad (26)$$

Окрім того, параметр a_i також може бути змінною функцією. Наприклад, якщо достеменно відомо, що крива опукла й лежить в межах кола радіуса ρ , то ефективним рішенням може стати прийняття в якості a_i значення досліджуваної функції φ_i :

$$a_i = \varphi_i, (i = \overline{1, w}). \quad (27)$$

Тоді абсолютні величини вузлових навантажень зменшуватимуться з наближенням вузлів до кривої досліджуваної функції в процесі моделювання дискретного образу, що прискорить процес збіжності ітераційного числення при пошуку параметрів умовної жорсткості ланок.

Варто додати, що запропонована топологічна конфігурація дискретної моделі – не є оптимальною, й може бути змінена в залежності від обраного підходу до моделювання. Так, наприклад, якщо крива представляє собою плоский переріз конструкції, що буде реалізована у вигляді плоскої стрижневої рами (ферми або каркасу) й відомим є характер сполучень між окремими вузлами, то доцільно використовувати реальні конфігурації майбутньої конструкції. При цьому збільшення сполучень між вузлами може прискорити процес розрахунку, оскільки збільшення кількості ланок веде до підвищення надійності конструкції та розширює спектр можливих варіантів перерозподілу умовних параметрів жорсткості й внутрішніх зусиль цих ланок. На рисунках 2.а. та 2.б. показано приклади можливих варіацій топологічних ознак запропонованої моделі з різними сполученнями між вільними вузлами.

З іншого боку, якщо метою моделювання є пошук вузлів дискретного образу, що не являється прообразом технічних форм (реальних фізичних конструкцій), або використовуватиметься для ескізного проектування, то підхід до сполучення вузлів моделі можна докорінно змінити й повністю вилучити ланки, що сполучають вільні вузли між собою. Тоді кожен вільний вузол сполучатиметься лише з базовими вузлами, й в сукупності зі сполучними

ланками представлятиме собою незалежну сітчасту структуру (див. рис. 2.в. та 2.г.). В результаті використання такого підходу розрахунковий процес значно спрощується і стає можливим використання рівнянь типу (13) – (15), система яких повинна бути складеною та розв'язаною окремо для координат x_i , y_i та коефіцієнтів λ_i кожного вільного вузла моделі.

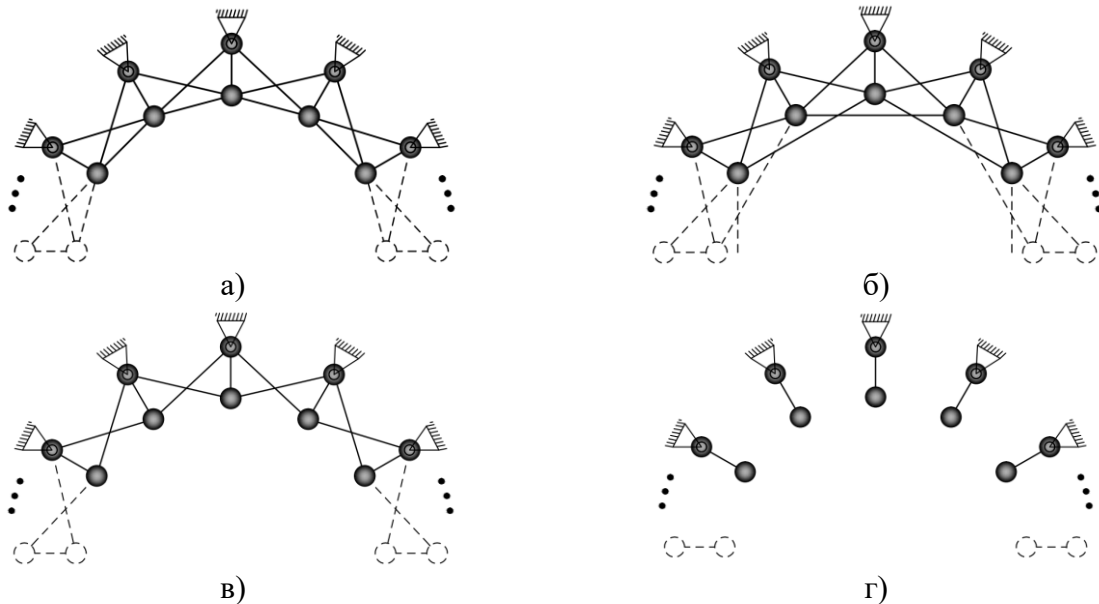


Рис. 2. Варіювання топологічних ознак дискретних моделей замкнених кривих:
 а) і б) – моделі дискретних образів, вільні вузли яких з'єднуються між собою;
 в) і г) – моделі дискретних образів, вільні вузли яких з'єднуються лише з базовими вузлами

На останок варто додати, що базові вузли запропонованих вище моделей дискретних образів замкнених кривих не обов'язково мають розміщуватися на колі. Такий принцип запропонований з метою скорочення витрат часу на пошук оптимального положення базових вузлів. В дійсності, вузли опорного контуру можуть бути розміщені довільно або на будь-якій кривій (замкненій або розімкненій), що за попередніми прогнозами чи аналітичними розрахунками охоплюватиме усю область у якій лежить графік досліджуваної функції φ . Якщо базові вузли розміщуватимуться довільно, то тотожність (24) прийме наступну форму:

$$F_{s_i} = \sum_{j=w+1}^{2 \cdot w} (s_j / w) - s_i, \quad (i = \overline{1, w}; s = x, y). \quad (28)$$

Висновки. Використання запропонованого підходу до формування геометричних моделей замкнених кривих досліджуваних функцій дозволяє не лише одержати дискретні образи відповідних кривих і наперед визначити характер розподілу вільних вузлів моделей, але й задавати напрямок руху цих вузлів в процесі ітераційного числення. Це дозволяє обрати один із вище наведених методів розрахунку виходячи з природи і особливостей самої кривої.

Список використаних джерел:

1. *Скочко В. І.* Дискретна візуалізація плоских кривих, заданих функціями в неявній формі / *В. І. Скочко* // Містобудування і територіальне планування. Вип. 64. – К. : КНУБА, 2017. – С. 372-383.
2. *Skochko V.* Morphogenesis and Correction of Planar Rod Constructions With a Small Amount of Free Nodes / *V. Skochko* // Lublin-Rzeszow, 2015. Motrol: Commission of Motorization and Energetics in Agriculture, Polish Academy of Sciences, vol. 17 (8), P. 35-43.
3. *Скочко В. І.* Формоутворення каркасів технічних форм, заданих на площині неявними функціями / *В. І. Скочко* // Підводні технології. Промислова та цивільна інженерія. Вип. 7. – К. : КНУБА, 2017. – С. 3-17.
4. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики стержневых систем. Часть 2. Статически неопределимые системы. Издание 2-е. перераб. / *И. М. Рабинович.* – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 548 с., ил.
5. *Ковалёв С. Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / *С. Н. Ковалёв* // Дис. ... доктора техн. наук. 05.01.01. – М.: МАИ, 1986. – 348 с.
6. *Скочко В. І.* Практичні аспекти дослідження та корегування сітчастих структур, побудованих шляхом геометричного формоутворення / *В. І. Скочко* // Сучасні проблеми архітектури та містобудування. Вип. 51. – К. : КНУБА, 2018. – В друці.
7. *Kulikov P.* The Principles of Discrete Modeling of Rod Constructions of Architectural Objects / *P. Kulikov, O. Ploskiy, V. Skochko* // Lublin-Rzeszow, 2014. Motrol: Commission of Motorization and Energetics in Agriculture, Polish Academy of Sciences, vol. 16 (8), 3-10.
8. *Скочко В.І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язей сітчастих структур / *В.І. Скочко, Л.О. Скочко* // Основи і фундаменти. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 34. – С. 47-56.
9. *Скочко В.І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язі, що сполучає вільний та закріплений вузли сітчастої структури / *В.І. Скочко* // Містобудування та територіальне планування. – К.: КНУБА, 2014. – С. 521-527.
10. *Бронштейн ИН.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Изд. перераб. / *И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев;* под ред. *Г. Гроше, и В. Циглера.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 976 с.
11. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений / *И.П. Мысовских.* – М.: Физматгиз. Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 344 с.

к.т.н., доцент Скочко В.И.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ФОРМИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОБРАЗОВ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ С ЗАРАНЕЕ ЗАДАННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Демонстрируется способ расчета координат дискретных каркасов плоских замкнутых кривых, функции которых заданы явным или неявным способом. Для этого используются дискретные интерпретационные модели сетчатых структур, имеющих заранее заданные топологические признаки и изменяющих форму под влиянием регулируемых векторных нагрузок.

Ключевые слова: дискретные образы, сетчатые структуры, геометрическое моделирование, замкнутые кривые.

Skochko V.I.,
Ph.D., Associate Professor, Department of Architectural Constructions,
Kyiv National University of Construction and Architecture

FORMING OF DISCRETE IMAGES OF CLOSED CURVES ON THE BASIS OF MODELS WITH A PREDETERMINED TOPOLOGY

The method for calculating the coordinates of discrete frames of plane-closed curves whose functions are given in an explicit or implicit way is demonstrated. For this, discrete interpretational models of net structures, having predetermined topological features, and changing the shape under the influence of regulated vector loads, are used.

Key words: discrete images, mesh structures, geometric modeling, closed curves.