

УДК 624.012.45

Мыза А.С.,  
7994227@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2642-2231,  
Одесская государственная академия строительства и архитектуры  
докт.техн.наук, профессор Азизов Т.Н.,  
taljat999@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9621-9805,  
Уманский государственный университет имени Павла Тычины

## РАСЧЕТ КОМБИНИРОВАННЫХ БАЛОК С УЧЕТОМ КРУЧЕНИЯ

*Приведен способ расчета каменных балок, усиленных боковой железобетонной пластиной. За счет наличия разных материалов в сечении при действии внешней нагрузки кроме изгиба балки закручиваются. При расчете с учетом нелинейных свойств материалов становится не возможным использование замкнутых формул. В связи с этим объемный элемент предложено заменить перекрестно-стержневой схемой. Показана схема определения касательных усилий, приложенных к стержням стержневой системы. Эти усилия вычисляются как интеграл по площади от касательных напряжений, действующих в пределах одного стержня, на которые делится объемный элемент. В результате комбинированный элемент рассматривается как определенное количество стержней прямоугольного сечения, связанных между собой в узлах.*

*Ключевые слова: комбинированная балка, кручение, стержневая аппроксимация, касательные напряжения.*

### **Постановка задачи и анализ исследований.**

В работе [1] было показано преимущество каменных конструкций, усиленных боковыми железобетонными пластинами. В работах [1-2] приведена методика расчета таких конструкций, в том числе расчет с учетом нелинейных свойств материалов. Однако, при расположении железобетонной пластины с одной стороны каменного элемента в комбинированной балке появляются крутящие моменты за счет несимметричности сечения.

Известно, что определение изгибной и крутильной жесткостей является важной и актуальной задачей [5-9]. Расчет на кручение комбинированных балок можно производить в программных комплексах Ansys, Lira и др. с использованием объемных конечных элементов. Однако при расчете с учетом нелинейных свойств материалов и трещинообразования моделирование каждого линейного элемента (балка, стена, усиленная боковой пластиной) из объемных конечных элементов с включением элементов арматуры представляется весьма трудоемким процессом.

Кроме того, при расчете на кручение с учетом наличия нормальных трещин основной и самой сложной задачей расчета крутильной жесткости является определение взаимного перемещения блоков железобетонного элемента, отделенных нормальной трещиной. Эта задача усложняется тем, что крутящий момент передается через часть сечения железобетонного элемента, что в свою очередь приводит к неприменимости формул теории упругости, в которых предполагается, что касательные напряжения распределены по всему торцевому сечению.

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является разработка методики расчета комбинированных балок на кручение с использованием стержневой аппроксимации с учетом наличия в них нормальных трещин.

### **Изложение основного материала.**

Как было сказано выше основной и самой сложной задачей расчета крутильной жесткости комбинированного элемента с нормальной трещиной является определение взаимного поворота (смещения) двух смежных берегов нормальной трещины. Ранее были предложены различные модели определения таких перемещений путем деления на полосы [9], а также путем деления сечения на конечное число прямоугольных стержней [2]. При этом вместо сплошного прямоугольного сечения рассматривается система стержней. Однако, в этой работе не приведена методика определения усилий, прикладываемых к стержням аппроксимирующей стержневой системы.

Для расчета на кручение комбинированного элемента можно использовать стержневую аппроксимацию, предложенную в [3]. Учитывая, что сечение элемента делится на отдельные прямоугольники, каждый из которых может иметь свои жесткостные характеристики, мы можем и комбинированный элемент рассчитать таким образом.

На рис.1 для примера показана схема при делении прямоугольного сечения на четыре стержня. Поперечное сечение  $dxh$  (в плоскости  $XOY$ ) разделено на четыре прямоугольника размерами  $axb$ , которые соединены в узлах их стыковки  $O_1 \dots O_5$ . Жесткость каждого прямоугольника сосредоточена в стержнях 1...4, расположенных в центрах тяжести соответствующих прямоугольников. Стержни 1...4 соединены наклонными стержнями (на рис. 1 обозначены двойными линиями), расположенными по диагонали прямоугольников  $axb$  в вышеупомянутых узлах  $O_1 \dots O_5$ .

Таким образом, расчет на кручение объемного элемента (на рис. 1 показан штриховыми линиями) проводится методом стержневой аппроксимации. Т.е. сплошное тело заменяется стержневой системой с продольными и наклонными стержнями. При этом в местах расположения боковой пластины и каменной части жесткости стержней отличаются.

Раскрытие статической неопределенности такой стержневой системы состоит в мысленном рассечении наклонных стержней в узлах их стыковки и рассмотрении совместности деформаций. Однако, остается открытым вопрос, каким образом задавать крутящую нагрузку на торце элемента (в плоскости  $XOY$  на рис. 1). Дело в том, что при передаче крутящего момента с одного блока, отделенного нормальной трещиной, на другой блок касательные напряжения  $\tau$ , сумма которых равна крутящему моменту  $M_t$ , распределены только на части сечения. Обозначим эту часть размерами  $sxd$ . При этом  $s < h$ , где  $h$  – высота сечения. Если какая-то часть стержней в стержневой системе рис. 1 попадает в зону передачи крутящего момента  $sxd$ , то надо знать, какие именно силы должны быть приложены к этим стержням.

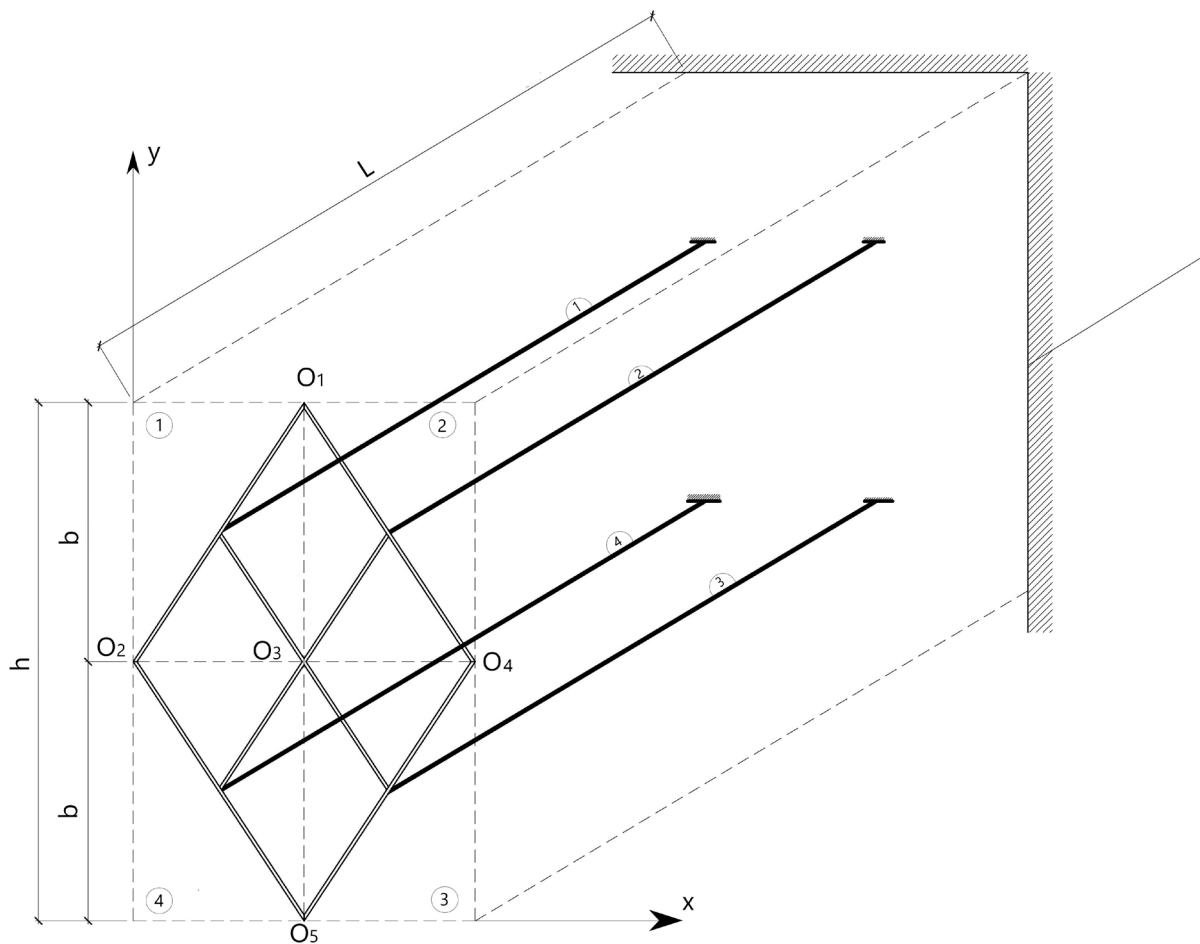


Рис. 1. Схема деления объемного блока на прямоугольные элементы и представления в виде стержневой системы

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться методом [4]. Для этого из серии расчетов с применением объемных конечных элементов следует получить распределение касательных напряжений по прямоугольной области  $sxd$ , содержащей различные материалы с различными механическими

характеристиками. В результате можно получить зависимости для определения двух составляющих касательных напряжений типа:

$$\tau_{yz}=f_1(c,d); \quad \tau_{xz}=f_2(c,d) \quad (1)$$

Пусть поперечное сечение стержня размерами  $2a \times 2b$  разделено на  $n \times m$  прямоугольных элементов. Пусть также крутящий момент передается через площадь  $s \times 2a$  (рис. 2), т.е. на элементы  $1, 2, \dots, 3n$ .

В каждом элементе в пределах площади  $s \times 2a$  будут действовать касательные силы  $T_x$  и  $T_y$  в направлении соответствующих осей. Эти усилия получаются в результате двойного интегрирования выражения (1) для касательных напряжений по площади соответствующего прямоугольника. Так, усилия  $T_y$  в элементе с номером  $i$  на рис. 2, будут определены из выражений:

$$T_y = \int_0^s \int_{2t}^{3t} \tau_{yz} dx dy, \quad (2)$$

где  $\tau_{yz}$  определяется по (1).

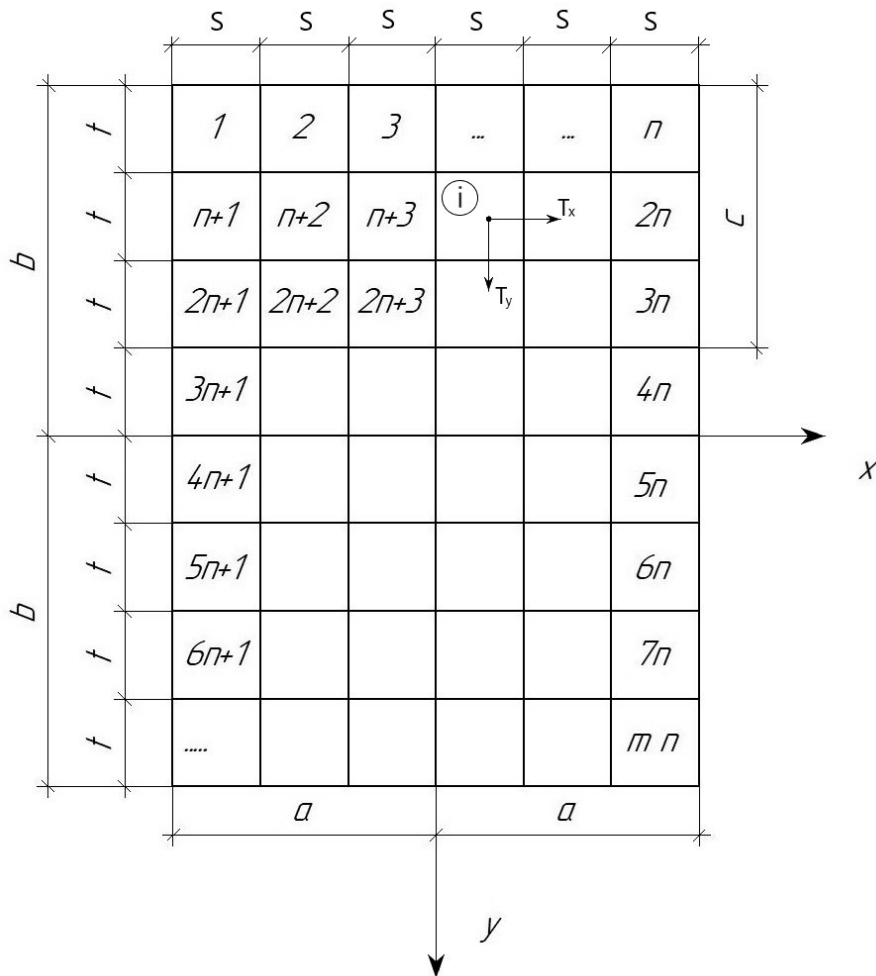


Рис. 2. Схема к определению касательных усилий в поперечном сечении

Аналогично определяется составляющая  $T_x$ :

$$T_x = \int_0^s \int_{2t}^{3t} \tau_{xz} dx dy, \quad (3)$$

Вычисление интегралов, входящих в выражения (2) и (3) не представляет трудностей, если известны функции (1), полученные аппроксимационным методом.

Силы  $T_x$ ,  $T_y$  прикладываются к соответствующим стержням для определения неизвестных усилий в узлах.

В каждом узле примыкания смежных элементов делается сечение и рассматривается условие совместности деформаций. Для пояснения рассмотрим, какие усилия влияют на перемещения в сечении вблизи узла 3 по рис. 1. Схема усилий, влияющих на перемещения с нижней стороны сечения около узла 3 показана на рис. 3.

На перемещения в сечении у узла 3 с одной стороны (снизу) будут влиять неизвестные силы (см. рис. 3)  $S_{31}$ ,  $H_{31}$ ,  $S_{32}$ ,  $H_{32}$ ,  $S_{33}$ ,  $H_{33}$ ,  $S_4$ ,  $H_4$ ,  $S_5$ ,  $H_5$ , а также внешние силы  $T_{x,3}$ ,  $T_{y,3}$ . С другой стороны (сверху) на перемещения в сечении у узла 3 будут влиять неизвестные силы  $H_1$ ,  $S_1$ ,  $H_2$ ,  $S_2$ ,  $H_{31}$ ,  $S_{31}$ , а также внешние силы  $T_{x1}$ ,  $T_{y1}$  (рис. 4).

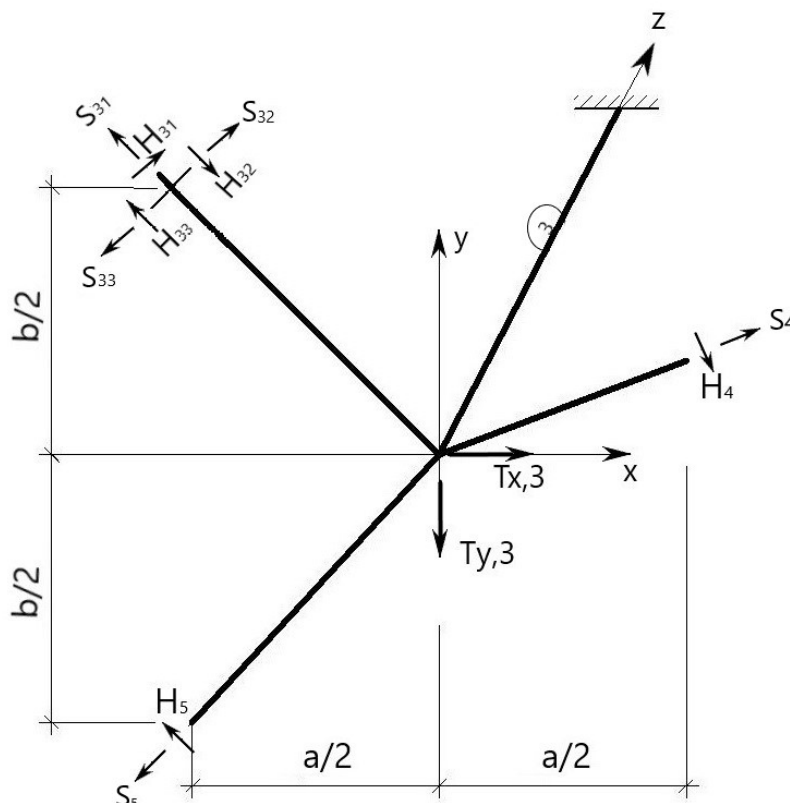


Рис. 3. Схема усилий, влияющих на перемещения в сечении снизу около узла 3 (по рис. 1)

Внешние силы в  $i$ -том стержне  $T_{x,i}$  и  $T_{y,i}$  определяются по формулам (2).

Из составления условий совместности деформаций (перемещений) определяются неизвестные силы в сечениях. После определения неизвестных усилий в сечениях каждый стержень рассматривается как статически определимый, на который действуют внешние силы  $T_{x,i}$  и  $T_{y,i}$  и определенные по вышеприведенной схеме усилия. Далее не трудно определить перемещения в любой точке системы.

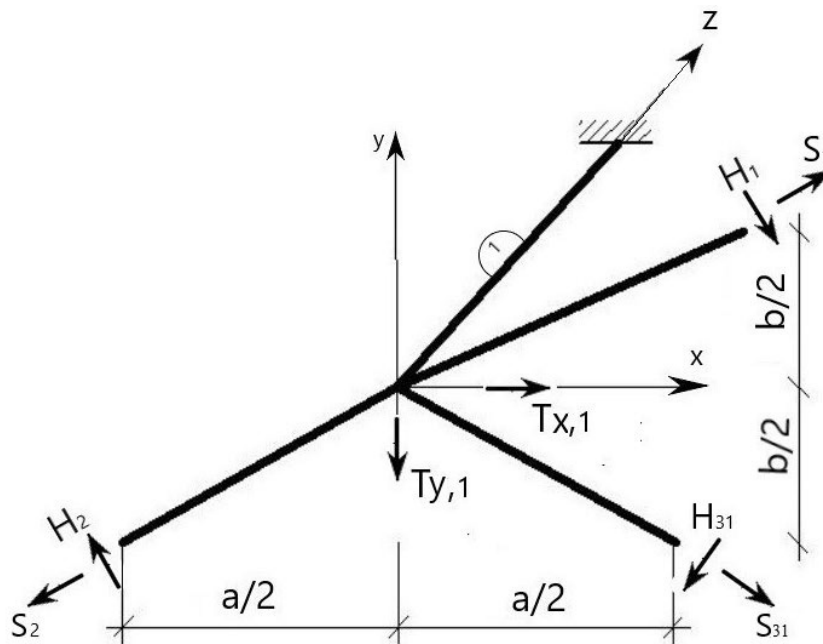


Рис. 4. Схема усилий, влияющих на перемещения в сечении сверху около узла 3 (по рис. 1)

Если размеры прямоугольников  $a$  и  $b$ , на которые делится основное сечение, малы, то вполне достаточно определять только силы  $T_x$ ,  $T_y$ . Если же размеры сечения  $a$  и  $b$  таковы, что в пределах элемента касательные напряжения, определенные по формуле (1) заметно изменяются, то следует учитывать еще и кручение продольных стержней (стержни 1...4 на рис.1). Объяснение вышесказанного можно видеть из рисунка 5, где приведен фрагмент поперечного сечения с эпюрой касательных напряжений  $\tau_{xz}$ .

На рис. 5,б показан выделенный прямоугольный элемент с номером  $i$ .

Равнодействующая  $T_x$  касательных напряжений  $\tau_{xz}$  приложена с эксцентриситетом  $e$  по отношению к центру тяжести элемента и поэтому она создает крутящий момент  $M_{t,i} = T_x \cdot e$ . Крутящие моменты  $M_{t,i}$  прикладываются к стержням в дополнение к силам  $T_x$ ,  $T_y$  (см. рис. 3, 4). При этом при составлении условий совместности деформаций в сечениях, описанных выше, учитываются также перемещения от этих крутящих моментов.

Жесткость продольных стержней схемы стержневой аппроксимации (вдоль оси  $Z$ ) определяется как жесткость стержня с размерами  $axb$ . Принцип определения жесткости наклонных стержней приведен в [3].

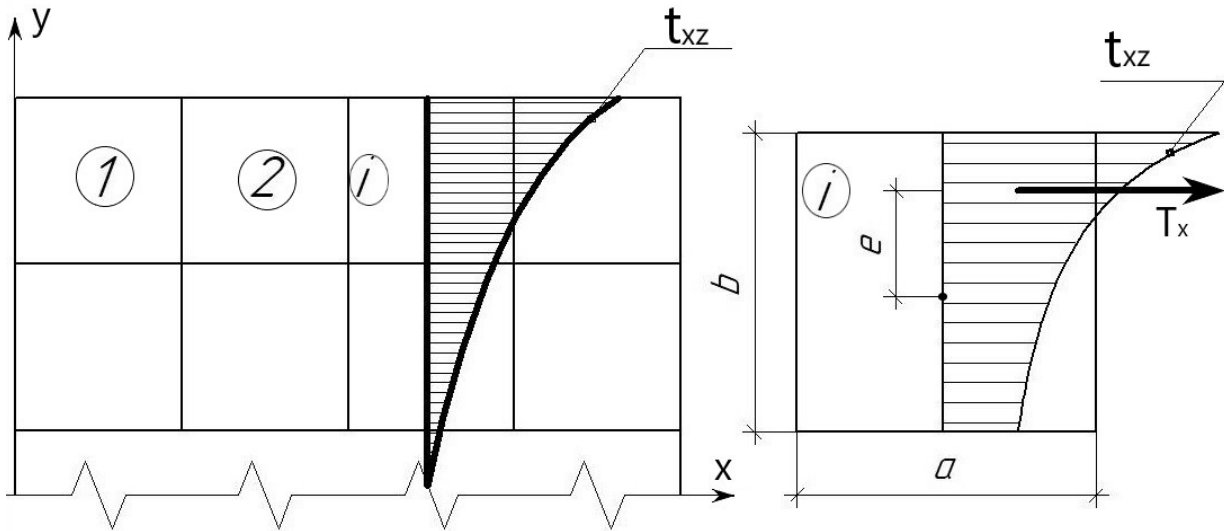


Рис. 5. Схема к определению крутящего момента в  $i$ -том прямоугольнике от неравномерного распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$

### Выводы и перспективы исследований.

Сплошное тело комбинированного элемента предложено аппроксимировать стержневой системой, что позволяет получать усилия в отдельных точках без применения программных комплексов с использованием объемных конечных элементов, что является довольно громоздкой задачей. Суть стержневой аппроксимации состоит в том, что рассчитывается статически неопределимая стержневая схема. После определения неизвестных усилий каждый стержень рассматривается как статически определимый, на который действуют внешние силы и определенные по вышеприведенной схеме усилия, что позволяет определить перемещения в любой точке элемента с трещиной.

В перспективе предполагается расширить методику на учет сил вдоль оси элемента, а также усовершенствовать методику определения жесткости наклонных стержней стержневой аппроксимирующей системы.

### Список использованной литературы

1. Азизов Т.Н. Каменные балки, усиленные одной стороной железобетонной обоймой / Т.Н. Азизов, А.С. Мыза // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 32., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2016. – С. 428-435.

2. Азизов Т.Н. Расчет комбинированных конструкций с учетом нелинейных свойств материалов / Т.Н. Азизов // Ресурсоекономні матеріали,

конструкції, будівлі та споруди. Вип. 32., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2016. – С. 105-112.

3. Азизов Т.Н. Учет нелинейных свойств бетона при кручении стержневых элементов / Т.Н. Азизов // Sciences of Europe. – 2019. – Vol 1, № 35. – P. 19-22.

4. Азизов Т.Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций /Т.Н. Азизов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 39, частина 1. – Одеса: Зовнішпрекламсервіс, 2010. – С. 4-9.

5. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчёт несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. – 223 с.

6. Карabanов Б.В. Нелинейный расчет сборно-монолитных железобетонных перекрытий // Бетон и железобетон. – 2001. - №6. - С. 14-18.

7. Карпенко, Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. / Н.И. Карпенко; – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.

8. Коуэн, Г.Дж. Кручение в обычном и предварительно напряженном железобетоне: Пер. с англ. / Г.Дж. Коуэн; – М.: Изд-во литературы по строительству, 1972. – 104 с.

9. Срібняк, Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами: автореф. дис. .... канд. техн. наук 05.23.01 / Срібняк Наталія Миколаївна; Одеська державна академія будівництва та архітектури. – О., 2009. – 23 с.

Миза О.С.,  
Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
д.т.н., професор Азизов Т.Н.,  
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

## **РОЗРАХУНОК КОМБІНОВАНИХ БАЛОК З ВРАХУВАННЯМ КРУЧЕННЯ**

Наведено спосіб розрахунку кам'яних балок, посилені бічною залізобетонною пластиною. За рахунок наявності різних матеріалів в перерізі при дії зовнішнього навантаження крім згину балки закручуються. При розрахунку з урахуванням нелінійних властивостей матеріалів стає неможливим використання замкнених формул. У зв'язку з цим об'ємний елемент запропоновано замінити перехресно-стрижневою схемою. Показана схема визначення дотичних зусиль, прикладених до стержнів стрижневої системи. Ці зусилля обчислюються як інтеграл по площі від дотичних



напружень, що діють в межах одного стрижня, на які ділиться об'ємний елемент. В результаті комбінований елемент розглядається як певна кількість стрижнів прямокутного перерізу, пов'язаних між собою у вузлах.

Ключові слова: комбінована балка, кручення, стрижнева апроксимація, дотичні напруження.

O. Myza

Odessa State Academy of Construction and Architecture  
Dr. Sc. (Tech.), Prof. T. Azizov,  
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Ukraine

### **CALCULATION OF COMBINED BEAMS BY ACCOUNTING TORSIONS**

A method for calculating stone beams reinforced with a side reinforced concrete plate is given. It is shown that such beams are not only bent, but twisted. It is shown that the use of formulas is not possible when taking into account nonlinear properties. In this regard, it is proposed to replace the volume element with a rod scheme. A scheme for determining the tangential forces that are applied to the rods is shown. These forces are calculated as an integral over the area of tangential stresses acting within one rod, into which the volume element is divided. As a result, the combined element is considered as a certain number of rectangular rods interconnected at the nodes.

Keywords: combined beam, torsion, bar approximation, shear stresses