УДК 621.863

© **Фідровська Н. М.**

ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ВІСІСИМЕТРИЧНОМУ ТИСКУ

Оболонка канатного барабану у більшості випадків являється циліндричною. Дія канату, який намотується на барабан, зумовлює зовнішній тиск.

У багатьох авторів [1], [2], [3] цей тиск приймався постійним і задача таким чином розглядалася як вісісіметрична.

Але якщо врахувати наявність сил тертя між канатом і барабаном [4], то тиск буде зміщуватись в залежності:

$$P = P_0 e^{-k\mu \frac{l-x}{h} 2\pi}, \tag{1}$$

де P_0 - максимальний тиск, який має місце в точці сходу каната з барабана;

μ - коефіцієнт тертя між канатом і барабаном;

k - коефіцієнт, який враховує геометричні та пружні властивості канату та барабану;

l - довжина навивки;

h - крок навивки.

Проведені експерименти різних авторів [5], [6] також підтверджують змінність тиску при навивці каната на барабан.

Поперечний згин циліндричної оболонки являється досить складною задачею і розглядався багатьма авторами [7], [8], які для її вирішення застосовували деякі спрощення, наприклад, такі як:

1) оболонка в коловому напрямку нерозтяжна

2) в серединній поверхні тонкостінної конструкції здвиги відсутні.

Представимо радіальні переміщення циліндричної оболонки у вигляді функції:

$$\omega = f(x)\cos n\varphi, \qquad (2)$$

де $f(x)$ - статично невизначена функція, яка змінюється впродовж осі;

φ - кут, який відраховується від вертикальної осі y (рис. 1);

n - 2,3,4 – числа натурального ряду.

Рівняння потенційної енергії Г на одиницю довжини оболонки буде мати вигляд [9]:

$$\Gamma = \oint [\frac{1}{2} m_\varphi x_\varphi + \frac{1}{2} m_{x\partial o\partial} x_x + m_{x\varphi\partial o\partial} x_{x\varphi} + \frac{\delta}{2} G_{x\partial o\partial}\varepsilon_x + \frac{\delta}{2} G_\varphi \varepsilon_\varphi - m_{\varphi_0} x_\varphi] R d\varphi \qquad (3)$$

де m_φ - загальні згибкі моменти

$$m_\varphi = D\left(x_\varphi + \eta x_x\right);$$

D - згибка жорсткість

$$D = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\eta\right)};$$

E - модуль жорсткості;

δ - товщина оболонки;

η - коефіцієнт Пуассона;

x_φ - кривизна серединної поверхні в коловому напрямку

$$x_\varphi = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \omega\right),$$

R - радіус серединної поверхні оболонки

x_x - кривизна серединної поверхні оболонки в напрямку твірної

$$x_x = -\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2},$$

$m_{x\partial o\partial}$ - додаткові подовжні згибні моменти

$$m_{x\partial o\partial} = D\left(x_x + \eta x_\varphi\right),$$

$m_{x\varphi\partial o\partial}$ - додаткові крутні моменти окремих елементів оболонки

$$m_{x\varphi дод} = m_{\varphi x дод} = D(1-\eta)\, x_{x\varphi}$$

$x_{x\varphi}$ - відносний кут закручування елементів

$$x_{x\varphi} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial V_n}{\partial x} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \varphi}\right),$$

V - колові переміщення

$G_{x дод}$ - додаткові нормальні напруження

$$G_{x дод} = E\frac{\partial U}{\partial x},$$

U - подовжні переміщення

ε_x - відносна деформація вподовж твірної

G_φ - кільцеві нормальні напруження

$$G_\varphi = \frac{R}{\delta}\left(\frac{\partial Q_{x дод}}{dx} + \frac{\partial Q_\varphi}{R d\varphi}\right) + \frac{pR}{\delta},$$

$Q_{дод}$ і Q_φ - поперечні сили

$$Q_{x дод} = \frac{\partial m_{x дод}}{\partial x} + \frac{\partial m_{\varphi x дод}}{R d\varphi},$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial m_\varphi}{R d\varphi} + \frac{\partial m_{x\varphi дод}}{\partial x},$$

ε_φ - відносна деформація в коловому напрямку

$$\varepsilon_\varphi = \frac{G_\varphi}{E} - \mu\frac{G_{x доп}}{E},$$

$m_{\varphi_0} x_\varphi$ - потенціал зовнішніх сил

$$m_{\varphi_0} x_\varphi = p\omega.$$

На основі гіпотези про не розтяжність кілець відносні деформації в коловому напрямку:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\omega}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial U} = 0.$$

Звідки знаходимо:

$$V = -\frac{1}{n} f(x)\sin n\varphi.$$

Використовуючи друге припущення, я саме про відсутність зсуву серединної поверхні, отримаємо:

$$\frac{\partial U}{Rd\varphi}+\frac{\partial V}{\partial x}=0,$$

$$U=-\frac{R}{n^2}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\cos n\varphi.$$

Підставляючи всі ці вирази у рівняння (3), отримаємо:

$$\varGamma=\int\frac{D}{2}\left\{\begin{array}{l}\left(1+\frac{E\delta R^2}{}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\cos^2 n\varphi-\frac{2n}{R^2}\left(n^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x)\right)\cos^2 n\varphi+\\+\frac{2}{R^2}\frac{(n^2-1)}{n^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sin^2 n\varphi+\frac{1}{R^4}f^2(x)(n^2-1)^2\cos n\varphi-\frac{T_0e^{-k\mu\frac{l-x}{k}2\pi}}{}f(x)\cos n\varphi\end{array}\right\}Rd\varphi \quad (4)$$

Для вирахування інтеграла $\int\cos n\varphi d\varphi$ розглядаємо $\cos n\varphi$ в ряд:

$$\cos n\varphi=1-\frac{4\left(\frac{n}{2}\right)^2}{2!}\sin^2\varphi+\frac{4\left(\frac{n}{2}\right)^2\left[4\left(\frac{n}{2}\right)^2-4\right]}{4!}\sin^4\varphi-\frac{4\left(\frac{n}{2}\right)^2\left[4\left(\frac{n}{2}\right)^2-4\right]\left[4\left(\frac{n}{2}\right)^2-4^2\right]}{6!}\sin^6\varphi+\ldots$$

Крім цього, замінимо $\sin^2\varphi$ і $\sin^4\varphi$ виразами:

$$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}\left(-\cos 2\varphi+1\right)$$

$$\sin^4\varphi=\frac{1}{8}\left(\cos 4\varphi-4\cos 2\varphi+3\right)$$

Тоді отримаємо:

$$\int\cos n\varphi d\varphi=\int d\varphi-\frac{1}{2}\int\frac{n^2}{2}-d\varphi+\frac{3}{8}\int\frac{n^2(n^2-4}{24}d\varphi=2\pi\left[1-\frac{n^2}{4}\left(1-\frac{n^2-4}{16}\right)\right]$$

Вираз (4) буде мати вигляд:

$$\varGamma=\frac{D\pi}{}\left\{\begin{array}{l}R\left(1+\frac{E\delta R^3}{Dn^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2-\frac{2n\left(n^2-1\right)}{R}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(x)+\frac{2\left(n^2-1\right)}{Rn^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\\+\frac{1}{R^3}\left(n^2-1\right)^2f^2(x)-2\left[1-\frac{n^2}{4}\left(1-\frac{n^2-4}{16}\right)\right]\frac{T_0\,\mathrm{R}\,e^{-k\mu\frac{l-x}{h}2\pi}}{D}f(x)\end{array}\right\} \quad (5)$$

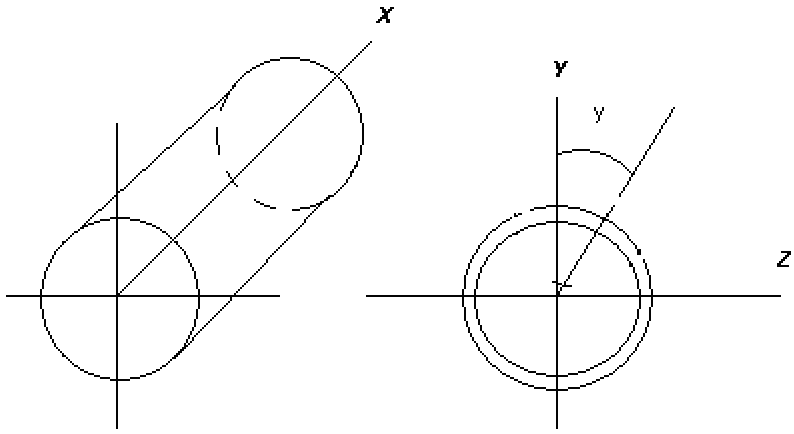

Рис.1 - Розрахункова схема

Запишемо рівняння Ейлера для варіаційної задачі:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial f(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial f'(x)}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial f''(x)}\right) = 0$$

Для нашого випадку отримаємо

$$R\left(1+\frac{E\delta R^2}{Dn^2}\right)\frac{\partial^4 f}{dx^4} - \frac{2\left(n^2-1\right)}{R}\left(n-\frac{1}{n^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{R^3}\left(n^2-1\right)^2 f(x) - \frac{T_0}{D}\left[1-\frac{n^2}{4}\left(1-\frac{n^2-4}{16}\right)\right]e^{-k\mu\frac{l-k}{n}2\pi} = 0 \quad (6)$$

Одержуємо диференційне рівняння IV-ого ступеню, яке можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - a_1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_2 f = a_3 e^{k\mu\frac{l-x}{n}2\pi}, \quad (7)$$

де $$a_1 = \frac{2\left(n^2-1\right)\left(n-\frac{1}{n^2}\right)}{R^2\left(1+\frac{E\delta R^2}{Dn^2}\right)},$$

$$a_2 = \frac{\left(n^2-1\right)^2}{R^4\left(1+\frac{E\delta R^2}{Dn^2}\right)},$$

$$a_3 = \frac{T_0\left[1-\frac{n^2}{4}\left(1-\frac{n^2-4}{16}\right)\right]}{RD\left(1+\frac{E\delta R^2}{Dn^2}\right)}.$$

Загальне рішення рівняння (7) буде мати вигляд:

$$f(x)=e^{\sqrt{\frac{a}{2}}x}\left(c_1\cos\sqrt{\frac{a_1^2}{4}-a_2}\,x+c_2\sin\sqrt{\frac{a_1^2}{4}-a_2}\,x\right)+A_1e^{-k\mu\frac{l-x}{n}2\pi}-c_5, \qquad (8)$$

де $A_1=\dfrac{a_3}{\dfrac{k^4\mu^4}{n^4}16\pi^4-a_1\dfrac{k^2\mu^2}{n^2}4\pi^2+a_2}$,

$c_1=c_2=c_3=c_4=0$,

$c_5=-a_1e^{-k\mu\frac{l}{n}2\pi}$.

Таким чином, функція прогину буде мати вигляд:

$$f(x)=A_1e^{-k\mu\frac{l-x}{n}2\pi}+c_5=A_1e^{-k\mu\frac{l}{n}2\pi}\left(e^{k\mu\frac{l}{n}2\pi}-1\right). \qquad (9)$$

Отримане рішення дає змогу визначення напруження в оболонці відповідно до її геометричних розмірів, пружних властивостей та закону навантаження.

Список використаних джерел

1. Александров М. П. Грузоподъемные машины / М. П. Александров. – М. : Изд-во МГТУ, 2000. – 552 с.
2. Абрамович И. И. Грузоподъемные краны промышленных предприятий / И. И. Абрамович. – М. : Машиностроение, 1989. – 360 с.
3. Вайнсон А. А. Подъемно-транспортные машины / А. А. Вайнсон. – М : Машиностроение, 1989. – 563 с.
4. Фидровская Н. Н. Влияние трения на натяжение каната, навиваемого на барабан / Н. Н. Фидровская // Зб. наук. пр. / Укр. держ. акад. залізн. транспорту. – Х., 2004. – Вип. 58. – С. 116–121.
5. Артеменко Н. П. Напряжение в стенке кранового барабана : дис. канд. техн. наук / Н. П. Артеменко. – Харьков, 1947. – 91 с.
6. Морозов Б. А. Исследование прочности барабанов грузоподъемных машин / Б. А. Морозов. – М. : ЦНИИТМАШ, 1949. – Кн. 27. – С. 42–51.
7. Канн С. Н. Строительная механика – оболочек / С. Н. Канн. – М. : Машиностроение, 1966. – 508 с.

8. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Доннелл. – М. : Наука, 1982 – 31 с.

Фидровская Н. Н. Поперечный изгиб цилиндровой оболочки при осисимметричном давлении

Решается задача определения прогиба стенки цилиндрической оболочки канатного барабана, нагруженного ассиметричной нагрузкой, с использованием уравнения Эйлера для вариационной задачи.

Фідровська Н. М. Поперечний згин циліндричної оболонки при вісісиметричному тиску

У статті вирішується задача визначення прогину стінки циліндричної оболонки канатного барабана, який навантажений асиметрично, з використанням рівняння Ейлера для варіаційної задачі.

Fidrovskaya N. N. Transversal bend of cylinder shell at axis symmetry pressure

In article one should solve the problem of cylindrical casings walls sag of roped rum which is occupied with asymmetrical load using equation of Eelier for variated task.