

УДК 621.002.019.3

©Оболенская Т. А., Лазаренко В. И., Светличная Н. С.

## **ВЕРОЯТНОЕ КАЧЕСТВО ПРОДУКЦИИ И СХЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФЕКТНЫХ ИЗДЕЛИЙ В ПАРТИИ ПРОДУКЦИИ**

### **1. Постановка проблемы**

Обычно при нормальном ходе процесса изготовлений изделий качество всех партий при идеальной схеме должно быть одинаковым. Однако при наличии случайных факторов вполне закономерно появление брака. Классифицировав эти факторы, можно построить математическую модель процесса.

### **2. Анализ последних исследований**

Как известно, качество продукции один из важнейших факторов, влияющий на срок службы изделия, долговечность, конкурентоспособность и т. д. В связи с действием большого числа факторов, а именно: наличия дефектов оборудования, действия переменных напряжений, изнашивания, процент выбраковки изделий все еще достаточно велик.

При рассмотрении задач контроля предполагается, что при нормальном ходе процесса изготовления изделий качество всех

партий оказывается совершенно одинаковым. Это, конечно, идеальная схема, которая никогда не наблюдается на практике. В действительности даже при полной стабильности всех условий производства качество изготовленных партий окажется неодинаковым из-за наличия случайных колебаний, присущих любому технологическому процессу [1, 2]. Изучение закономерностей, управляющих вариацией качества партий, имеет практическое значение для стандартизации продукции и выработки правил ее контроля.

В дальнейшем под качеством партии принимаем либо число  $X$  имеющихся в ней дефектных изделий, либо долю  $q = \frac{X}{N}$  дефектности в партии.

### **3. Основное содержание**

Большое разнообразие причин, вызывающих появление брака, можно свести в несколько классификационных групп и каждой такой группе дать математическое изображение (составить ее математическую модель). Можно указать следующие группы.

*А. Постоянно действующие причины.* Причины этой группы создают постоянную для всего хода процесса вероятность появления дефектного изделия. Это означает, что каждое изготавливаемое изделие может с вероятностью  $\varepsilon_0$  оказаться дефектным и с вероятностью  $1 - \varepsilon_0$  годным.

К причинам этой группы относятся, например, несоответствие точности оборудования заданному допуску, ошибки рабочего-сборщика и ряд других.

Б. *Мгновенные повреждения.* Схема возникновения мгновенных повреждений следующая. Будем предполагать, что с вероятностью  $\gamma_0$  рабочий орган может при изготовлении любого изделия получить повреждение. Если повреждение своевременно не обнаружено и рабочий орган не заменен, то оно способно вызвать появление дефектных изделий. Предполагается, что в результате повреждения вероятность возникновения брака становится равной  $\varepsilon > 0$ .

В. *Накапливающиеся повреждения.* Здесь предполагается, что с момента получения  $r$  повреждений вероятность возникновения брака становится равной  $\varepsilon > 0$ . Говоря производственными терминами, следовало бы сказать, что вероятность возникновения брака становится больше нуля с момента разладки процесса обработки.

Г. *Внешние причины.* Причины этой группы в отличие от предыдущих не присущи технологическому процессу как таковому и являются следствием нарушения технологической дисциплины. К ним относятся, например, изготовление изделий из некондиционного материала, грубые промахи при наладке процесса и т. п. Эти причины вызывают изменение условий протекания процесса изготовления изделий в том смысле, что изменяются величины  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma_0$ ,  $r$ .

Рассмотрим несколько задач на вычисление распределения числа  $X$  в зависимости от причины появления брака.

Случай 1. Брак появляется исключительно вследствие наличия постоянно действующей причины. Вычислить вероятность  $P\{X = m\}$ .

Рассматривая изготовление одного изделия как один опыт, убеждаемся, что событию Б (изделие — брак) отвечает вероятность  $\varepsilon_0$ , а событию  $\Gamma = \bar{B}$  — вероятность  $1 - \varepsilon_0$ . Если партия состоит из  $N$  изделий, вероятность того, что в результате  $N$  опытов событие Б наблюдается  $m$  раз, будет

$$P\{X = m\} = C_N^m \varepsilon_0^m (1 - \varepsilon_0)^{N-m} \quad (1)$$

или, иначе говоря, число  $X$  имеет биномиальное распределение.

Для дальнейшего понадобится производящая функция биномиального распределения. Её можно получить способом, который является типичным и для всех последующих рассуждений.

Введем в рассмотрение случайную величину  $y_i$ , принимающую значение, равное единице, если в данном  $i$ -м опыте имело место Б, и равное нулю, если в данном  $i$ -м опыте имело место  $\Gamma'$ . Тогда получим распределение величины  $y_i$ :

$$\begin{aligned} P\{y_i = 1\} &= \varepsilon_0, \\ P\{y_i = 0\} &= 1 - \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Это распределение является частным случаем биномиального распределения, когда общее число опытов равно единице. Для него нетрудно получить производящую функцию. Согласно (2),

$$H y_i(S) = 1 - \varepsilon_0 + \varepsilon_0 s = 1 - \varepsilon_0(1 - s). \quad (3)$$

Поскольку  $X$  — общее число дефектных изделий в партии, т. е. число случаев, когда  $y_i = 1$ , то можно написать

$$X = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \quad (4)$$

Величины  $y_i$  независимы, и, следовательно,  $X$  образуется как сумма  $N$  независимых случайных величин, каждая из которых имеет производящую функцию, заданную (3) Производящая функция распределения числа  $X$  будет

$$H_x(s) = [1 - \varepsilon_0(1 - s)]^N. \quad (5)$$

Пользуясь (5) легко получить выражения для математического ожидания и дисперсии числа  $X$ :

$$E(X) = N\varepsilon_0, \quad D(X) = N\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0).$$

Случай 2. Перед началом изготовления партии процесс изготовления изделий отлаживается, так что до возникновения разладки вероятность появления брака  $\varepsilon_0 = 0$  (нет постоянно действующих причин появления брака). Разладка процесса является следствием мгновенного повреждения и вызывает вероятность  $\varepsilon_1 > 0$  появления брака. Профилактический контроль отсутствует, и после возникновения разладки вероятность  $\varepsilon_1$  остается неизменной до окончания изготовления партии. Перед началом изготовления следующей партии процесс отлаживается вновь и т. д. Вычислить производящую функцию распределения числа  $X$ , математическое ожидание  $E(X)$ , дисперсию  $D(X)$ , вероятность  $P\{X = m\}$ .

Здесь имеем схему мгновенных повреждений с той, однако, особенностью, что процесс изготовления партии заканчивается после изготовления  $N$  изделий в отличие от случая 1, где процесс длился сколько угодно долго.

Допустим, что разладка (повреждение) имела место при изготовлении изделия с номером  $k$ , где номер изделия отчитывается от начала изготовления партии. Тогда это  $k$ -е и каждое следующее за ним изделие может с вероятностью  $\varepsilon_1$  оказаться дефектным и с вероятностью  $1 - \varepsilon_1$  годным. Всего при наличии разладки будет изготовлено  $N - k + 1$  изделий. Вводя случайную величину  $y_i$  с распределением

$$P\{y_i = 1\} = \varepsilon_1$$

$$P\{y_i = 0\} = 1 - \varepsilon_1, \quad i = k, k + 1, \dots, N \quad (6)$$

можно написать, что число дефектных изделий в партии

$$X = y_k + y_{k+1} + \dots + y_N. \quad (7)$$

Число  $N - k + 1$  слагаемых в правой части (7) является случайным, так как  $m = k - 1$  — случайное число. Следовательно, число  $X$  образуется как сумма случайного числа  $(N - k + 1)$  независимых случайных величин  $y_i$ .

*Определение.* Если случайная величина  $z$  образуется как сумма случайного числа  $m^*$  независимых случайных величин  $z_i$   $z = \sum_{i=1}^{m^*} z_i$ , то имеет место сложное распределение.

Рассмотрим основу полученных здесь результатов.

В качестве одного из существенных использовалось предположение, что с момента разладки вероятность  $\varepsilon$  появления брака остается неизменной. Практически это предположение может нарушаться. Во-первых, если имеется причина, вызывающая мгновенные повреждения, и если поврежденный орган не заменен, то та же причина способна вызвать его последующие повреждения, что может приводить к росту вероятности появления брака; во-вторых, при наличии профилактического контроля смена поврежденного органа до окончания изготовления партии приведет к уменьшению вероятности появления брака. Поэтому в реальных условиях вероятность  $\varepsilon$  может иметь в случайные моменты времени скачкообразные изменения.

### **Вывод**

Мы рассмотрели некоторые схемы образования распределения числа  $X$  дефектных изделий в партии продукции. Эти схемы не являются исчерпывающими. В частности, не изучены распределения, которые образуются, когда вероятность  $\varepsilon$  имеет три и более скачкообразных изменений за время изготовления партии. В частности не было указано, при каких условиях за время изготовления партии число разладок не превзойдет одной. Игнорировалась возможность применения профилактического контроля при стационарных причинах и т. д. Все эти ограничения связаны с недостаточными возможностями решения задач при помощи

дискретных распределений. Очевидно, значительную часть введенных здесь ограничений можно будет снять за счет перехода к непрерывным распределениям.

#### **Список использованных источников**

1. Болотин В. В. Статистические методы строительной механики / В. В. Болотин. – М. : Стройиздат, 1961.
2. Кордонский Х. Б. Расчеты усталостной долговечности методами теории вероятностей / Х. Б. Кордонский, Б. Е. Корсаков / РИИГВФ. – Рига, 1961.

*Оболенская Т.А., Лазаренко В.И., Светличная Н.С.*  
«Вероятное качество продукции и схемы распределения дефектных изделий в партии продукции».

В статье рассматриваются схемы распределения числа дефектных изделий в партии продукции в зависимости от причин, вызывающих появления брака. В качестве математического аппарата применяется метод дискретных распределений.

**Ключевые слова:** продукция, дефектные изделия, партия, брак, метод дискретных распределений.

*Оболенська Т.О., Лазаренко В.І., Светлічна Н.С.* «Імовірна якість продукції та схеми розподілення дефектних виробів в партії продукції».



В статті розглядаються схеми розподілення числа дефектних виробів в партії продукції в залежності від причин, які спричиняють появу браку. В якості математичного апарату застосовано метод дискретних розподілень.

**Ключові слова:** продукція, дефектні вироби, партія, брак, метод дискретних розподілів.

*Obolenskaya T.A., Lazarenko V.I., Svetlichnaya N.S.* «The probable quality of production and schemes of distribution of defective articles in the production group».

In the article the schemes of distribution the numbers of defective articles in the productions group depending on the reasons, which cause the appearance of faulty production are examined. In the grade of mathematical apparatuses the method of the discrete distribution is used.

**Key words:** production; defective articles; lot; spoilage; method of the discrete distribution.

Стаття надійшла до редакції 31 березня 2009 р.