УДК 62-50

©Оболенская Т.А., Трыков Д.Ю.

ВЫБОРОЧНЫЙ ПРИЁМНЫЙ КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА ПРОДУКЦИИ

1. Постановка задачи

При решении задач приёмного контроля обычно игнорируют влияние внешних причин возникновения дефектов продукции.

Довольно типична ситуация, когда из-за отсутствия внешних причин вероятность возникновения брака ничтожно мала. Это заставляет использовать приёмочный контроль, который вызывает дополнительные затраты материальных средств и людских резервов и оправдывает своё назначение только в отдельные, иногда очень редкие периоды работы производства. Поэтому необходимо построить выборочный приёмочный контроль, так чтобы при нормальном ходе производства затраты на него были по возможности минимальными.

2. Анализ исследований

Для ВПК (выборочный приёмочный контроль) довольно хорошо служит схема с переменным планом контроля. При этом используются выборки сравнительно малого объёма при нормальном ходе производства, а затем переходят к выборкам большого объёма при возникновении расстройства. Забракованные партии рассматриваются как признак расстройства производства. Случается, что при нарушенном ходе партия случайно окажется принятой, и это повлечет переход к выборкам малого объёма и возможный приём большого числа дефектных изделий. Итак, постараемся построить контроль с переменным планом разумно и свести ошибки к минимуму и уменьшить затраты на контроль.

3. Основной материал

Простейшая форма контроля с переменным планом заключается в следующем. Устанавливаются два объема выборок n_1, n_2 причем $n_1 > n_2$. Для указанных объемов числа c_1, c_2 принимаются равными нулю. Это значит, что независимо от объема выборки при обнаружении в ней хотя бы одного дефектного изделия партия бракуется. Первые, поступившие на контроль партии, проверяются выборками объема n_1. Если какая-либо из них оказалась принятой, то делается вывод, что имеет место нормальный ход производства и последующие партии контролируются выборкой объема n_2 до тех пор, пока какая-либо партия не окажется забракованной. Забракование партии принимается за признак расстройства производства, и следующие за ней партии проверяются выборками объема n_1 до тех пор, пока одна из них не будет принята и т. д. Будем говорить, что контроль находится в состоянии E_1, если проверка осуществляется выборкой объема n_1, и в состоянии E_2, если она осуществляется выборкой объема n_2. Тогда мы получим схему смен состояний контроля в виде E_1, E_2, где стрелками показаны направления перехода от одного состояния к другому. Мы видим, что оба состояния E_1, E_2 равноправны в том смысле, что возможны взаимные переходы от одного состояния к другому.

Допустим, что при контроле k партий имела место последовательность состояний контроля, представленная таблицей 1.

Таблица 1 – последовательность состояний контроля

Номер партии							
Состояние							

Для того чтобы определить, в каком состоянии будет находиться контроль при проверке $k+1$ -й партии, достаточно знать результаты проверки k-й партии. Если k-я партия принята, то при проверке $k+1$ -й партии контроль будет находиться в состоянии E_2, если k-я партия забракована, то контроль будет находиться в состоянии E_1. Тот факт, что при проверке предыдущих $k-1$ партий контроль находился в состояниях, заданных табл. 1, не имеет здесь никакого значения.

Итак, для того чтобы определить вероятность того, что при проверке партии с номером $k+1$ контроль будет находиться в состоянии E_1 (или E_2), достаточно знать в каком состоянии он находился при проверке партии с номером k.

Пусть в каждой партии имеется число X дефектных изделий. Тогда вероятность приемки партии при объеме выборки n_1 будет

$$P_{E_1}\ X\ = \left(1-\frac{n_1}{N}\right)^X, \tag{1}$$

а вероятность забракования

$$Q_{E_1}\ X\ = 1-P_{E_1}\ X \tag{2}$$

Обозначение $P_{E_1}\ X$ подчеркивает, что вычисленные вероятности относятся к состоянию E_1. Аналогично для состояния E_2 получим

$$P_{E_2}\ X\ = \left(1-\frac{n_2}{N}\right)^X \tag{3}$$

$$Q_{E_2}\ X\ = 1-P_{E_2}\ X\ . \tag{4}$$

Составим таблицу (табл. 2), левый столбец которой соответствует возможным состояниям контроля при проверке партии с номером k, а верхняя строка – состояниям контроля при проверке партии с номером $k+1$. И в том и другом случае имеем два состояния E_1, E_2, и поэтому таблица будет квадратной. Клетка с номером 1 обозначает, что при проверке партии с номером k имело место состояние E_1 и при проверке партии с номером $k+1$ тоже состояние E_1. Иначе говоря, при переходе от партии k к партии $k+1$ контроль остался в состоянии E_1. Клетка с номером 2 обозначает, что при переходе от партии k к партии $k+1$ контроль перешел из состояния E_1 в состояние E_2. Кратко этот переход можно записать как $E_1 \to E_2$. Аналогично клетки с номерами 3 и 4 обозначают соответственно переходы $E_2 \to E_1$ и $E_2 \to E_2$.

Теперь по аналогии с табл. 2 составим табл. 3, в которой вместо номеров укажем в соответствующих клетках результаты проверки k-й партии

Таблица 2

	E_1	E_2
E_1	1	2
E_2	3	4

Таблица 3

	E_1	E_2
E_1	забракование	прием
E_2	забраковано	прием

Заменив в табл. 3 наименование результата проверки его вероятностью, получим табл. 4. В ней вероятность $Q_{E_1}\ X$ задает вероятность перехода контроля из состояния E_1, имевшего место при проверке k-й партии, в состояние E_1 при проверке $k+1$-й партии.

Таблица 4

	E_1	E_2
E_1	$Q_{E_1}\ X$	$P_{E_1}\ X$
E_2	$Q_{E_2}\ X$	$P_{E_2}\ X$

Аналогично $P_{E_1}\ X$ задает вероятность перехода $E_1 \to E_2$, $Q_{E_2}\ X$ – вероятность перехода $E_2 \to E_1$, $P_{E_2}\ X$ – вероятность перехода $E_2 \to E_2$. Поэтому естественно назвать табл. 4 таблицей вероятностей перехода.

Таблицы такого типа называют матрицами вероятностей перехода и кратко записываются как

$$P_{ij} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}, \qquad (5)$$

где p_{ij} — вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j.

Нам предстоит несколько отвлечься от терминологии ВПК и изложить приведенные нами понятия в более общем виде.

Условимся называть исследуемый объект системой. Так, в разбираемом нами случае ВПК является исследуемым объектом и поэтому системой. Состояния E_1, E_2 будем называть состояниями системы. У некоторых систем их может быть много, поэтому будем считать, что система может находиться в одном из m состояний: $E_1, E_2, ..., E_m$.

Действие, способное перевести систему из одного состояния в другое, назовем шагом. Например, для системы – ВПК шагом явится проверка одной партии. Соответственно вероятность p_{ij} (см. 5) будет называться вероятностью перехода системы из состояния E_i в состояние E_j за один шаг. Вероятности p_{ij} перехода задают матрицу вероятностей перехода за один шаг типа (5). Если число состояний системы равно m, то матрица имеет вид

$$p_{ij} = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

Для матриц вероятностей перехода справедливо свойство: сумма вероятностей перехода, находящихся в одной строке, равна единице, т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1. \qquad (7)$$

Это свойство легко проверить на примере матрицы, отвечающей табл. 1. Например,

$$Q_{E_1}\ X\ + P_{E_1}\ X\ = 1.$$

Считается, что состояния системы $E_1, E_2, ..., E_m$ связаны в цепь Маркова, если вероятность перехода в каждое из состояний системы на шаге $k+1$ зависит лишь от того, в каком состоянии система находилась на шаге k, и не зависит от всех предшествующих состояний системы.

Анализируемый нами контроль с переменным планом, когда объем выборки меняется в зависимости от результата контроля предыдущей партии, является типичным примером цепи Маркова. Действительно, если, например, известно что k-я партия проверялась выборкой объема n_1 (состояние E_1), то вероятность перехода к состоянию E_2 задается как $P_{E_1}\ \ q$ и не зависит от того, в каком состоянии находилась система при проверке всех предыдущих партий.

Как уже указывалось, контроль партий начинается с состояния E_1, т. е. первая поданная на контроль партия проверяется выборкой объема n_1. Это определяет начальное состояние системы. В дальнейшем по ходу проверки последующих партий система будет переходить из состояния E_1 в E_2 и обратно. Табл. 4 (матрица) задает вероятности перехода из одного состояния в другое за один шаг (при контроле одной партии). Но естественно поставить практически очень важный вопрос: какова вероятность, что случайно взятая партия, уже прошедшая контроль, была проверена выборкой объема n_1? Если искомая вероятность велика, то это означает, что в основном партии проверялись выборками объема n_1 и применение переменного плана контроля не принесло существенной экономии по сравнению с контролем постоянной выборкой объема n_1.

Прежде всего, следует обсудить, зависит ли ответ на поставленный вопрос от начального состояния системы. Очевидно, что если проверено всего две партии и первая из них с вероятностью единица имела объем выборки равный n_1, то искомая вероятность, по крайней мере, не менее 1/2 и влияние начального состояния системы очень ощутимо. Но оно будет постепенно уменьшаться по мере увеличения числа проверенных партий. Для изучаемой нами цепи Маркова установлено, что при .большом числе проверенных партий (после большого числа шагов) влияние начального состояния системы ничтожно мало и может не учитываться. Это свойство цепи Маркова носит название *эргодичности.*

Рассмотрим изучаемую ситуацию с более строгих позиций. Пусть система, имеет m состояний $E_1, E_2, ..., E_m$ и задана матрица (6) вероятностей перехода за один шаг. Пусть, далее, известно, что в начальный момент система находилась в состоянии E_i. Обозначим через p_{ij}^k вероятность того, что система за k шагов перейдет в состояние E_j. По отношению к системе — ВПК величина p_{12}^k задаст вероятность того, что $k+1$ -а партия была проверена выборкой объема n_2, если первая партия была проверена выборкой объема n_1. Аналогично трактуются величины p_{11}^k, p_{21}^k, p_{22}^k.

Свойство эргодичности означает, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} p_{ij}^k = u_j, \tag{8}$$

причем u_j не зависит от E_i, т. е. от начального состояния системы. Величина u_j называется *предельной вероятностью* нахождения системы.

Применительно к системе — ВПК величины u_1 и u_2 задают вероятность того, что взятая наугад из числа прошедших проверку партия имела объем выборки n_1 и n_2 соответственно.

Более общая трактовка величины u_j заключается в следующем. Рассмотрим последовательность состояний E_i по ходу проверки партий. Поскольку результат проверки каждой отдельной партии является случайным, то и последовательность состояний E_i будет случайной. В табл. 1 дана единичная реализация такой последовательности. При каждом новом повторении процедуры проверки k партий будет получена своя, отличная от предыдущих последовательность состояний E_i, т. е. своя единичная реализация такой последовательности. Допустим, что выполнено M повторений указанной процедуры и тем самым получено M реализаций последовательностей состояний E_i. Запишем их в виде таблицы, где каждая строка соответствует одной реализации (табл. 5).

В столбце, соответствующем партии с номером k имеется некоторое чередование состояний E_1, E_2. Оно носит случайный характер, и поэтому имеет смысл рассматривать частости появления E_1 и E_2. Пусть в k-м столбце содержится r_1 раз состояние E_1 и r_2 раз состояние E_2. Тогда частость состояния E_1 при проверке k-й партии будет

$$\nu_1 = \frac{r_1}{M},$$

частость состояния E_2

$$\nu_2 = \frac{r_2}{M}.$$

Таблица 5

Номер партии	1	2	3	4	5	…	$k-1$	k
1-я реализация	E_1	E_1	E_2	E_1	E_1	…	E_2	E_2
2-я реализация	E_1	E_2	E_1	E_1	E_2	…	E_2	E_1
3-я реализация	E_1	E_2	E_2	E_2	E_1	…	E_1	E_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
M-я реализация	E_1	E_1	E_1	E_2	E_2	…	E_2	E_2

На основе теоремы Я. Бернулли можно утверждать, что при большом числе M повторений процедуры контроля k партий частость ν_1 близка к вероятности α_1 появления состояния E_1 при проверке k-й партии, такую же формулировку можно дать относительно частости ν_2 и вероятности α_2 появления состояния E_2.

Проверка k-й партии отвечает $k-1$ -му шагу. Согласно теории цепей Маркова, вероятность α_1 равна p_{11}^{k-1}, т. е. вероятности перехода системы из состояния E_1 в состояние E_2 за шагов. Вероятность α_2 a2 равна p_{12}^{k-1}, т. е. вероятности перехода системы из состояния E_1 в состояние E_2 за $k-1$ шагов. Равенство (8) означает, что по мере роста числа шагов эта вероятность стремится к некоторому пределу, не зависящему от того, с какого состояния началась данная реализация.

При решении задач, связанных с приложениями теории цепей Маркова, как правило, основной интерес представляют предельные вероятности u_j. Для их вычисления на основе задания вероятностей p_{ij} перехода за один шаг можно воспользоваться системой линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = u_1 p_{11} + u_2 p_{21} + \ldots + u_m p_{m1} \\ u_2 = u_1 p_{12} + u_2 p_{22} + \ldots + u_m p_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m = u_1 p_{1m} + u_2 p_{2m} + \ldots + u_m p_{mm} \\ \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 1 \end{array}\right\}. \qquad (9)$$

Уравнения (9) могут быть использованы не для всякой цепи Маркова, а только для цепей определенного типа. В частности, уравнения (9) приложимы к цепи Маркова, заданной таблицей (матрицей) 4.

Если исключить случаи, когда доля дефектности в партии $q = 0$ или $q = 1$, то при бесконечно долгом продолжении процедуры проверки партий система – ВПК бесконечно много раз побывает в состоянии E_1 и бесконечно много раз в состоянии E_2. При этом возможность перехода из состояния E_i в состояние E_j не зависит от номера шага, а лишь от состояния системы на предыдущем шаге. Именно эта особенность обеспечивает получение предельных вероятностей на основе уравнений (9).

Приведем случай, когда для проверки партий используется ВПК с переменным планом. Объемы выборок равны n_1 и n_2, причем $n_1 > n_2$. Партия бракуется при обнаружении в выборке хотя бы одного дефектного изделия. Задано распределение числа X дефектных изделий в партии. Вычислить их среднее число $E\ Y$ после проверки, если предполагается, что забракованная партия подвергается сплошному контролю и все дефектные изделия заменяются годными.

Предварительно мы решим более простую задачу, предположив, что качество всех партий одинаково и число дефектных изделий в каждой из них равно X.

Матрица вероятностей перехода за один шаг будет задана в виде

$$p_{ij} = \begin{Vmatrix} Q_{E_1}(X) & P_{E_1}(X) \\ Q_{E_2}(X) & P_{E_2}(X) \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где $Q_{E_1}(X)$ и $Q_{E_2}(X)$ – вероятности забракования партии при объемах выборки n_1 и n_2; $P_{E_1}(X)$, $P_{E_2}(X)$ – соответствующие вероятности приемки партии.

Таким образом, вероятности перехода за один шаг

$$p_{11} = Q_{E_1}(X) = 1 - P_{E_1}(X); \quad p_{12} = P_{E_1}(X),$$

$$p_{21} = Q_{E_2}(X) = 1 - P_{E_2}(X); \quad p_{22} = P_{E_2}(X).$$

Система уравнений (9) примет вид:

$$\begin{gathered} u_1 = u_1 p_{11} + u_2 p_{21}, \\ u_2 = u_1 p_{12} + u_2 p_{22}, \\ u_1 + u_2 = 1. \end{gathered}$$

Подставляя p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, получим

$$\begin{gathered} u_1 = u_1\left(1 - P_{E_1}(X)\right) + u_2\left(1 - P_{E_2}(X)\right), \\ u_2 = u_1 P_{E_1}(X) + u_2 P_{E_2}(X), \\ u_1 + u_2 = 1. \end{gathered}$$

Легко проверить, что первые два уравнения тождественны. Действительно, складывая их правые и левые части, получим

$$u_1 + u_2 = u_1 + u_2.$$

Поэтому для нахождения u_1, u_2 используем уравнения

$$\begin{gathered} u_2 = u_1 P_{E_1}(X) + u_2 P_{E_2}(X), \\ u_1 + u_2 = 1. \end{gathered}$$

Решая их относительно u_1 и u_2, найдем,

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1 - P_{E_2}(X)}{1 + P_{E_1}(X) - P_{E_2}(X)} \\ u_2 &= \frac{P_{E_1}(X)}{1 + P_{E_1}(X) - P_{E_2}(X)} \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Если выполнена проверка большого количества партий, то величина u_1

покажет вероятность того, что взятая наугад партия имела объем выборки n_1, величина u_2 – что она имела объем выборки n_2.

Вычислим математическое ожидание $E_{n_1}\ Y$ числа дефектных изделий в проверенной партии в предположении, что объем выборки равен n_1. Для этого достаточно воспользоваться формулой с той только разницей, что доля q_0 дефектности заменяется числом X дефектных изделий:

$$E_{n_1}\ Y\ = XP_{E_1}\ X\ . \tag{12}$$

При объеме выборки n_2 математическое ожидание $E_{n_2}\ Y$ вычисляется по формуле

$$E_{n_2}\ Y\ = XP_{E_2}\ X\ . \tag{13}$$

Итак, если случайно взятая партия проверялась выборкой объема n_1, то среднее число дефектных изделий в ней равно $E_{n_1}\ Y$, если она проверялась выборкой объема $n_1\, n_2$, то – $E_{n_2}\ Y$. В **то** же время, равенства (11) задают вероятности указанных объемов. Сопоставляя вместе сказанное относительно величин u_1, u_2 $E_{n_1}\ Y$, $E_{n_2}\ Y$, можно составить таблицу вероятностей проверки партий выборками объемов n_1, n_1 и отвечающих этим объемам средних чисел дефектных изделий (табл. 6)

Таблица 6

Объем выборки	n_1	n_2
Вероятность u_i того, что партия была проверена выборкой объема n_i	u_1	u_2
Среднее число дефектных изделий в проверенной партии	$E_{n_1}\ Y$	$E_{n_2}\ Y$

Табл. 6 задает распределение некоторого числа $\bar{Y}$, которое с вероятностью u_1 принимает значение $E_{n_1}\ Y$ и с вероятностью u_2 - значение $E_{n_2}\ Y$. Поэтому математическое ожидание числа $\bar{Y}$ может быть вычислено как

$$E\ \bar{Y}\ = E_{n_1}\ Y\ u_1 + E_{n_2}\ Y\ u_2 .$$

Математическое ожидание $E(\bar{Y})$ является искомым математическим ожиданием $E(Y)$:

$$E(Y) = E_{n_1}(Y)u_1 + E_{n_2}(Y)u_2. \qquad (14)$$

На основе формулы (14) $E_{n_1}(Y)$ и $E_{n_2}(Y)$ могут рассматриваться как условные математические ожидания: $E_{n_1}(Y)$ вычислено при условии, что объем выборки равен n_2.

Если процесс изготовления изделий стабилен, то применение контроля с переменным планом теряет всякий смысл. Такой контроль становится выгодным, когда имеется колебание параметров a, σ, b распределения числа χ, так как он обеспечивает автоматическое изменение объема выборки при ухудшении качества продукции.

Параметры распределения a, σ, b вычисляются на основе опытных данных. Естественно, что опытные данные относятся к какому-то определенному промежутку работы производства и может оказаться, что в силу своей ограниченности этот промежуток не дает общей картины вариаций качества продукции. Установив на основе полученных опытных данных объем выборки, мы рискуем, что при изменении параметров распределения он окажется отнюдь не наилучшим.

Применение несмещенных оценок числа принятых дефектных изделий позволяет корректировать условия контроля по мере накопления данных о числе дефектных изделий, обнаруженных в выборках. Этой же цели может служить контроль с переменным планом. Если нет уверенности, что процесс изготовления изделий стабилен, то целесообразно использовать контроль с переменным планом, причем объем выборки n_2 следует взять близким к оптимальному, а объем выборки n_1 – в зависимости от стабильности производства. Объем выборки n_1 устанавливается в известной мере произвольно. Вообще говоря, он должен быть тем большим, чем менее устойчиво качество продукции. При этом не следует устанавливать $n_1 > 2n_2$.

Изучение данных различных производств показывает, что, как правило, достаточно, если $n_1 = 1,5n_2$.

Выводы

Мы привели простейшее построение приемочного контроля в виде цепи Маркова. В принципе здесь возможны дальнейшие усложнения, когда контроль имеет не два, а большее число состояний. Практическое использование сложных форм контроля с переменным планом становится возможным при его полной автоматизации. Наличие решающего устройства, которое по определенной заданной программе переводит контроль из одного состояния в другое и подсчитывает несмещенную оценку числа принятых дефектных изделий, может обеспечить наиболее экономичный режим проверки изделий. Создание такого рода автоматических устройств целесообразно для массовых производств, когда контроль связан с разрушением изделий.

Список использованных источников:

1. Кузьмин В. В. Статистические методы контроля качества в машиностроении / В. В. Кузьмин, В. В. Марков // III Студенческая региональная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы техники и технологии машиностроительного производства» / Федеральное агентство по образованию , Орловский государственный технический университет технологический институт ОРЕЛГТУ, 25 февраля-23 апреля 2010 г. – Орел, 2010.

2. Колмогоров А. Н. Статистический приемный контроль при допустимом числе дефектных измерений, равных нулю / А. Н. Колмогоров. – Л. : ЛДНТП, 1991.

3. Кордонский Х. Б. Статистический приемный контроль на поточной и конвеерной лентах / Х. Б. Кордонский // Вестник машиностроения. – 1983. – № 9.

4. Кордонский Х. Б. Приложении теории цепей Маркова к контролю партий / Х. Б. Кордонский // Вестник ЛГУ. – Л., 1995. – № 11.

Оболенская Т.А, Трыков Д.Ю. «Выборочный приёмочный контроль качества продукции».

В статье рассмотрены виды приёмочного контроля с учетом того, чтобы при нормальном ходе производства затраты на него были минимальными, а при нарушении производственного процесса под влиянием внешних причин он обеспечил бы надлежащий отсев дефектных партий.

Ключевые слова: Выборка, контроль, качество, дефект, продукция

Оболенська Т.О., Триков Д.Ю. «Вибірковий приймальний контроль якості продукції».

В статті розглянуті види приймального контролю з урахуванням того,щоб при нормальному ході виробництва витрати на нього були б мінімальними, а при порушеннях виробничого процесу під впливом зовнішніх причин він би забезпечував надійний відсів дефектних виробів.

Ключові слова: вибірка, контроль, якість, дефект, продукція

Obolenskaya T.A., Trikov D.J. “The selective receiving quality inspection of production”.

In the article the kinds of receiving inspection with due for the normal working order the expenditures have to be minimum, but if the production process was broken with influence of external reasons it has to provide the safety elimination of defect lots are examined.

Key words: Selection, inspection, quality, defect, production

Стаття надійшла до редакції 28 червня 2011 р.