

ДИНАМІКА ПРУЖНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ В КАНАТАХ ТА СТЕРЖНЯХ З РУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

1. Вступ

Розглянуто основні варіанти постановки крайових задач про рух пружних хвиль в канатах змінної довжини, що застосовуються до динамічних процесів в механізмах шахтних установок. Проблема поздовжніх пружних коливань канатів присвячено велику кількість досліджень. Однак загальною характерною рисою цих досліджень є той факт, що в них розглядались переважно канати постійної довжини, а фактична зміна довжини канату враховувалась тільки опосередковано. Ці обставини суттєво змінюють характер відображень хвиль від рухомого кінця, з'являються не тільки відображені хвилі, а й залишкові, і таким чином змінюється розподіл динамічної напруги в досліджуваному середовищі. Щоб усунути подібну неточність у вихідній постановці задачі ми проводили розрахунки за допомогою модифікованого методу продовження та відображення для областей зі мінною границею. Зміна границі області інтегрування здійснюється з дозвуковою швидкістю. Застосування цього методу показало, що характер руху хвиль у середовищах змінної довжини має специфічні особливості і суттєво відрізняється від характеру руху хвиль у середовищах з нерухомими границями. Постановка та розв'язок крайових задач, що враховують математично точно зміну границь області інтегрування рівняння динамічного стану канатів, дозволить отримати більш близьку до реальної картини розповсюдження хвиль, а також поширення динамічного поля напруг в канатах, і відповідно зробити точний розрахунок параметрів міцності канатів. В результаті чого, ми знайшли розв'язки першої крайової задачі для

інтервалу, одна границя якого змінювалась по заданому закону, а інша знаходилась в стані нерухомості.

2. Постановка задачі

Схема на рис. 1 відповідає підніманню вантажу, коли до початку руху ($t = 0$) вантаж вже був закріплений на канаті, та висить на ньому.

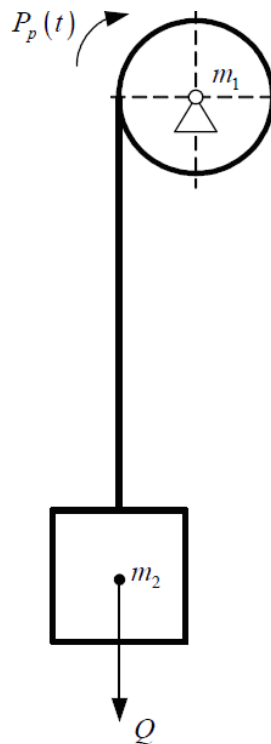


Рис. 1 – Схема піднімання вантажу

Будемо вважати, що жорсткість канату є достатньо великою, і тому його будемо вважати пружним. Слідуючи прийнятим умовам підйому вантажу його рух підпорядковується законам рівномірно-змінного переміщення. Тобто, помноживши прискорення вантажу на його масу та додавши отриману величину до статичного опору Q , знайдемо динамічне зусилля F , яке діє на канат, виражене таким чином

$$F = \frac{m_2 P_{над}}{(m_1 + m_2)} + Q,$$

де $P_{над}$ – надлишкове зусилля приводу.

Розглянемо закон руху каната в точці дотику його з барабаном $v(t)$, при якому виконується критерій мінімуму квадрата $(F-Q)$ в процесі підйому вантажу, а саме

$$\int_0^{t_p} (F - Q)^2 dt \Rightarrow \min,$$

де t_p – час піднімання вантажу, по завершенню якого, швидкість підйому вантажу стабілізується і стає рівною V_0 . Очевидно, що F при цьому буде мінімальною.

Розглядається модель шахтної вертикальної установки: канат намотується на барабан; до нижнього кінця прикріплений вантаж масою m_2 , який відповідно переміщується вертикально. Середній радіус намотки каната на барабан дорівнює R . Вважаємо, що тертя канату на барабані однакове в кожній точці, і не має опору канату в точці контакту канату з барабаном. До початку намотки канату на барабан, вантаж вже був підвішений до канату і в канаті встановилось певне статичне переміщення та напруга. Приймаємо, що пружні переміщення точки контакту канату з барабаном рівні нулеві. На цьому вигині ці переміщення будуть зменшуватись по абсолютній величині до нуля. Внаслідок того, напруга на вигині не враховується, канат можна вважати прямолінійним. Довжина цього вигину залежить від коефіцієнту тертя, і відповідно становиться достатньо малою для великих значень коефіцієнтів тертя. Обираємо обмежений варіант фізичної моделі, в якій довжина вигину прирівнюється до нуля.

Додатній напрям пружних переміщень в канаті, які позначаються як $u(x,t)$, будемо вважати співпадаючими з додатнім напрямом вісі ξ . Канат має площу поперечного перерізу S , модуль пружності першого роду E , кутове прискорення каната – $\beta(t)$, кутова швидкість – $\omega(t)$.

Тоді лінійне переміщення каната в точці дотику його з барабаном буде дорівнювати

$$v(t) = R \int_0^t \int_0^s \beta(\tau) d\tau ds + R\omega(0)t + v(0).$$

При $t < 0$, вантаж вже був підвішений до канату і в канаті встановились статичне переміщення $u(\xi)$ та напруга $\sigma(\xi)$. Тоді сума функцій лінійного переміщення каната в точці дотику його з барабаном $v(t)$ та статичного переміщення $u(\xi)$ буде розв'язком хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = 0,$$

де a – швидкість звуку в канаті.

3. Розв'язок задачі

Нехай $u(x, t)$; $u_1(x)$ – розв'язки початково-крайової задачі пружних переміщень точок каната. В області $v(t) < x < l$, $t > 0$ будемо шукати розв'язок рівняння (1), яке задовольняє таким початковим та крайовим умовам:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$u(x, t) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u(v(t), t) = -u_1(v(t)); \quad u_x(l, t) = \gamma[u_{tt}(l, t) - R\beta(t)H(t)], \quad t > 0, \quad (3)$$

де $\gamma = \frac{m}{ES}$; H – функція Хевісайда.

$\varphi(x) = -u_1(x)$; $\psi(x) = 0$, оскільки $u_1(x)$ не залежить від t .

Далі розглянемо спрощену модель канату, як пружний горизонтальний стержень, де лівий кінець буде закріплений, а правий рухатись за певним законом, по заданій функції

$$x = l + v(t).$$

Функція $v(t)$ буде враховувати вплив умов (2) та (3). Тоді для даної крайової підзадачі початково-граничні умови будуть такими:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad D = \{0 < x < l; 0 < t < T\}, \quad (2')$$

$$u(l, t) = 0; \quad u(l + v(t), t) = \mu(t), \quad t > 0. \quad (3')$$

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = \chi(x - at) + \chi(x + at).$$

Так, як лівий кінець стержня закріплений, то функція $u(x, t)$ запишеться у вигляді

$$u(x, t) = \chi(x + at), \quad (4)$$

а продовження функції $\mu(t)$ на всю вісь t у вигляді

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тоді враховуючи граничну умову (3'), підставимо продовження (5) у форму розв'язку (4)

$$\chi(l + v(t) + at) = \tilde{\mu}(t). \quad (6)$$

Очевидно, що функція:

$$u(x, t) = \tilde{\mu}(t_0(x + at)) \quad (7)$$

є розв'язком рівняння (1), але за певних умов.

При $t < \frac{l}{a}$, функція (7) задовольняє умовам (2') та (3').

При $t < \frac{2l + v(t)}{a}$, функція (8) задовольняє умовам (2') та (3'), отже

$$u(x, t) = \tilde{\mu}(t_0(x + at)) - \tilde{\mu}(t_0(at - x)), \quad (8)$$

і є розв'язком рівняння (1).

При $t < \frac{4l + v(t) + 2v(\tau_1)}{a}$ функція $u(x, t)$ дорівнює:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \tilde{\mu}(t_0(x + at)) - \tilde{\mu}(t_0(at - x)) + \\ & + \tilde{\mu}(t_0(at_0(x + at) - l - v(t_0(x + at)))) - \\ & - \tilde{\mu}(t_0(at_0(at - x) - l - v(t_0(at - x))))), \end{aligned}$$

де τ_1 – найменший додатній корінь рівняння хвилі, що компенсує функцію (8):

$$at = 2l + v(t).$$

Відмітимо, що величина $a\tau_1 = 2l + \nu(\tau_1)$ є шлях, пройдений переднім фронтом хвилі, випроміненим правим кінцем стержня, до першої зустрічі цього переднього фронту знов з правим кінцем.

Продовжуючи цей процес відображення хвиль від закріпленого та незакріпленого кінців пружного стержня будемо мати, що для довільного моменту часу $t > 0$ розв'язок рівняння (1), який задовольняє гранично-крайові умови (2') та (3'), буде

$$u(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{u}(t_0(w(w(\dots(w_{k-2}(x + at)))))) - \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{u}(t_0(w(w(\dots(w_{k-2}(at - x))))),$$

де $w(y) = at_0(y) - l - \nu(t_0(y))$.

Але даний розв'язок задачі про переміщення поздовжніх хвиль в канаті змінної довжини буде мати місце, якщо у рівнянні (6) функція

$$z = l + \nu(t) + at \tag{9}$$

буде мати обернену до себе функцію. Тобто функція (9) має бути монотонною або кусково-монотонною.

Отже функція $g(t) = \nu(t) + at$ має бути неперервною та диференційованою, а також повинна виконуватись умова: $l + \nu(t) > 0, t > 0$.

Будемо шукати обернену функцію $t_0(z)$ до (9), яка в свою чергу теж повинна бути монотонною або кусково-монотонною.

4. Чисельна реалізація результатів

За допомогою методу продовження для побудови відображень хвиль від нерухомого та рухомого кінців каната, ми встановили час появи кожної відображеної хвилі від незакріпленого кінця:

Запишемо алгоритм програми в середовищі sage, яка за допомогою поліноміальної апроксимації буде за функцією $z = l + \nu(t) + at$ знаходити обернену до неї функцію $t_0(z)$.

Для певної визначеності розглянемо конкретну функцію $v(t) = 0,05 \cdot t^2 + 2t - 4$, яка є кусково-монотонною, і знайдемо для неї обернену функцію. Виберемо область, на якій функція $v(t)$ буде монотонно зростати, та представимо її дискретно, тобто в точковій формі: $N=100$, $\text{step}=(t_{\max}-t_{\min})/N$.

Потім функцію $z(t) = l + v(t) + at$ запишемо у вигляді полінома четвертого степеня, та знаходимо обернену матрицю до коефіцієнтів цього полінома. До транспонованої матриці застосовуємо обернену апроксимацію та знаходимо власне, обернену функцію.

Отже програмний код запишемо таким чином:

```
#alpha.sagenb.org
N=100
t=[]
tmin=0
tmax=90.0
step=(tmax-tmin)/N
for i in range(N):
    t.append(tmin+i*step)
v=[]
#зімітувати монотонну функцію
for i in range(N):
    v.append(0.05*t[i]^2+t[i]*2-4)
p=[]
for i in range(N):
    p.append((t[i],v[i]))
show(points(p))
#виконаємо поліноміальну апроксимацію
n=4 #ступінь багаточлена
T=matrix(RR,N,n+1)
V=matrix(N,1,v)
for i in range(N):
```

```

for j in range(n+1):
    T[i,j]=t[i]^(n-j)
A=((T.transpose()*T)^-1)*T.transpose()*V
t1=t
var('t')
mas2=[]
for i in range(n+1):
    mas2.append(t^(n-i))
M2=matrix(n+1,1,mas2)
v(t)=(A.transpose()*M2)[0,0]
#наприклад, зафіксуємо 1, a
l=10
a=2.2
z(t)=l+v(t)+a*t
#виконаємо обернену апроксимацію
n=4 #ступінь багаточлена
T=matrix(RR,N,n+1)
V=matrix(RR,N,1)
for i in range(N):
    V[i,0]=tmin+i*step
for i in range(N):
    for j in range(n+1):
        T[i,j]=z(V[i,0])^(n-j)
A=((T.transpose()*T)^-1)*T.transpose()*V
t1=V.list()
var('z')
mas2=[]
for i in range(n+1):
    mas2.append(z^(n-i))
M2=matrix(n+1,1,mas2)

```



```

t(z)=(A.transpose()*M2)[0,0]
show((points(p)+plot(t,(z,0,800))+plot(x,0,600)),aspect_ratio=1)
plot(t,(z,0,300))

```

В результаті ми маємо строго монотонно спадаючу функцію $t(z)$, яка є оберненою до строго монотонно зростаючої функції $z(t)$ на відрізку $t \in [0, 90]$. Отриманий результат дає можливість змоделювати процес відображення хвиль в канаті зі змінною границею на протязі певного відрізка часу.

На рис. 2 показана математична модель переміщення та відображення хвиль від рухомого верхнього та нерухомого нижнього кінця, до якого закріплений вантаж. Також вказано точки, по яким був здійснений розрахунок зміни переміщення канату та напруги в перерізах позначених точок. У таблиці 1 наведено розрахунок кількості та час появи відображених хвиль від рухомого верхнього кінця канату.

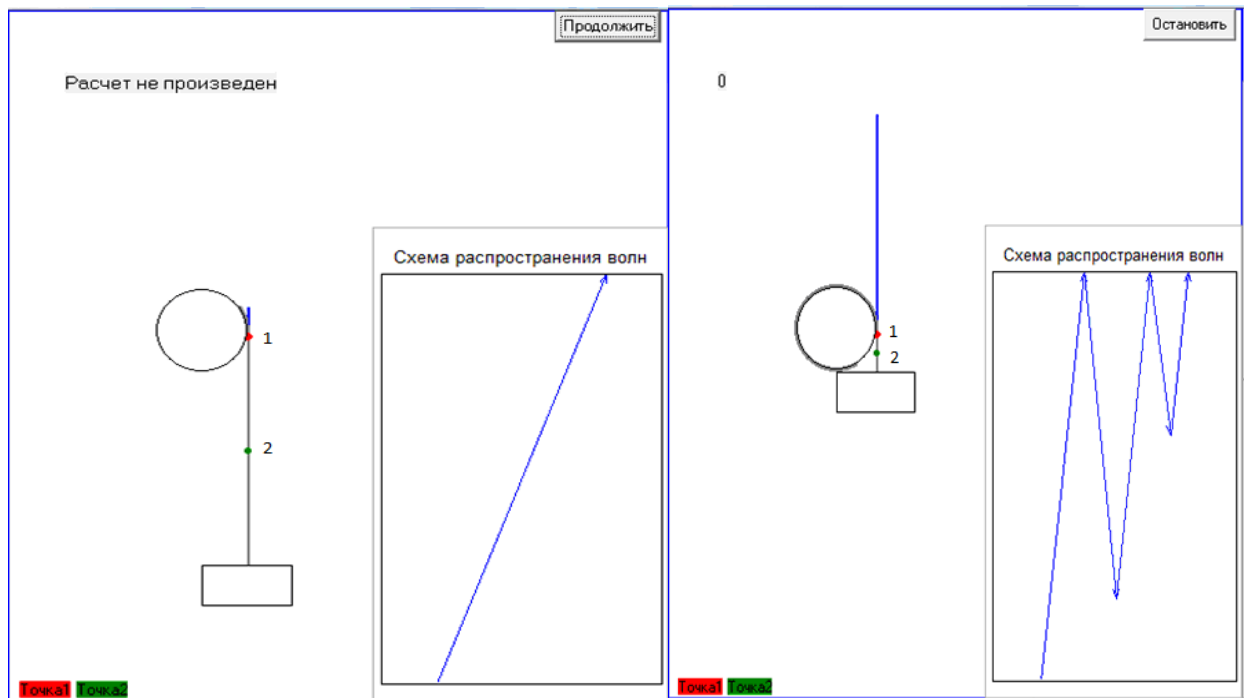


Рис. 2 – Спрощена модель підйомної канатної установки

Таблиця 1 – Показники переміщення та напруги в точках 1 і 2 в момент відображення хвиль

№	Время (с)	Перемещение т.1 (м)	Перемещение т.2 (м)	Напряжение в т.1 (Па)	Напряжение в т.2 (Па)
0	0	0,001	1	-10	-9,999999999999999
1	0,001	0,00301635732817557	1,0010149925	-9,99993073168724	-10,00000000000211
2	0,002	0,00503272109565032	1,002029985	-9,99993075643332	-9,999999999999999
3	0,003	0,00704908437312507	1,0030449775	-9,99993078118084	-10,00000000000211

Висновки

Розв'язок поставленої крайової задачі дозволяє побудувати більш коректну концепцію поширення пружних хвиль та розподілу динамічного поля напруг в канатах змінної довжини. Виявляється, що характер відображення від рухомого та нерухомого кінців суттєво відрізняються один від одного. В результаті чого, стрибки напруг, які виникають вздовж канату з рухомим кінцем через присутність в крайових умовах функції Хевісайда, розповсюджуються інакше, ніж в канаті з незмінною довжиною. Розв'язок крайової задачі залежить від заданої функції переміщення рухомої границі канату або пружного стержня. Чисельне знаходження оберненої функції до продовження переміщення на всю область зміни часу було представлено у вигляді поліноміальної апроксимації.

Список використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Численные методы в прикладном пакете sage / В.В. Воеводин. – Спб.: БХВ-Петербург, 2011. – 257 с.
2. Ильин С. Р. Математическая модель продольных колебаний струны и отвеса каната мобильной подъемной установки / С. Р. Ильин // Научные труды ДонНТУ. – Донецк, 2011. – Вып. 16(143). – С. 122–138.
3. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения / В. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 36, № 11. – С. 153–158.

4. Ильин В. А. Аналитический вид оптимального граничного условия смещения на одном конце струны с модельным нелокальным граничным условием одного из четырех типов / В. А. Ильин // Доклады РАН. – 2010. – Т. 420, № 3. – С. 309–313.

5. Коряшкіна Л. С. Чисельні методи / Л. С. Коряшкіна, М. М. Одновол. – Дніпропетровськ: Вид-во ДГУ. – 2007. – 219 с.

Зеленська Т.С., Сясев А.В. «Динаміка пружних переміщень поздовжніх коливань в канатах та стержнях з рухомими границями».

Розглядається крайова задача для канатів та стержнів, які змінюють свою довжину на протязі певного часу роботи механізму. Досліджується характер відображення поздовжніх хвиль від рухомого кінця.

Ключові слова: поздовжні коливання, відображення, переміщення.

Зеленская Т.С., Сясев А.В. «Динамика упругих перемещений продольных колебаний в канатах и стержнях с подвижными границами».

Рассматривается краевая задача для канатов и стержней, которые меняют свою длину на протяжении некоторого промежутка работы механизма. Исследуется характер отражений продольных волн от подвижного конца.

Ключевые слова: продольные колебания, отражение, перемещение.

Zelenskaya T.S., Syasev A.V. “Dynamics of elastic displacements of longitudinal oscillations in ropes and cores with mobile borders”.

Initial boundary value problems are considered for ropes and cores that change length throughout some interval of operation of the mechanism. Character of reflections of longitudinal waves from the mobile end are investigated.

Key words: longitudinal oscillations, reflection, displacement.

Стаття надійшла до редакції 26 листопада 2012 р.