УДК 621.002-52

©Оболенская Т.А., Белецкая И.В., Рудецкая Ю.Е.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО МОМЕНТА НАЛАДКИ МНОГОСТРУННОЙ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

1. Актуальность проблемы

В последние годы все большее распространение получают многоструйные автоматические линии (рис. 1). Идея конструкции такой линии заключается в объединении на одной станине нескольких изолированных потоков обрабатываемых заготовок. Это значительно уменьшает затраты на создание автоматического производства, экономит производственные площади, уменьшает затрату энергии. Кроме того, создается возможность в пределах одной автоматической линии вести изготовление нескольких типов изделий.

2. Постановка задачи

При отказе одной струи можно прекратить подачу к ней заготовок и продолжить работу струй, оставшихся исправными. Однако ремонт отказавшей струи требует остановки всей линии в целом. Исключение составляет случай, когда конструкция линии предусматривает автоматическую смену поврежденного инструмента без нарушения темпа ее работы.

В дальнейшем мы будем исходить из предположения, что каждая из струй может быть отключена без остановки линии, но ввод струи в строй возможен лишь при выключении всей линии. Если струя отключена, то линия будет недодавать продукцию, причем доля утерянной продукции зависит от общего числа струй и длительности простоя.

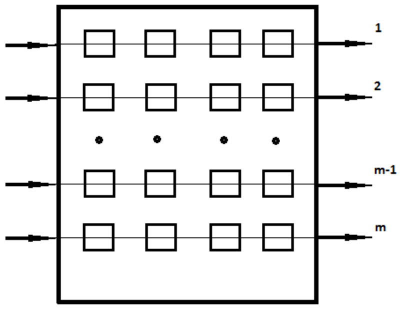

Рис. 1 – Схема многострунной линии: 1,2, ..., m — номера струй

Момент остановки, линии для ремонта – момент наладки линии, обеспечивающий максимум ее производительности, или, иначе говоря, минимум потерь, будем называть оптимальным.

3. Основной материал

Допустим, линия содержит m струй (рис. 1). Надежность работы для всех струй одинакова, так что независимо от номера струи, вероятность ее отказа в промежутке от T до $T+\Delta T$ равна

$$\gamma = \lambda \Delta_t + o \quad \Delta_T \quad ,$$

где λ – постоянная величина, не зависящая от времени и числа работающих струй. Предполагается, что длительность ремонта (наладки) линии не зависит от числа ремонтируемых струй и что вероятность наладки линии за время от T до $T+\Delta T$ равна

$$\omega = l \Delta_T + o \quad \Delta_T \quad ,$$

где l – постоянная, не зависящая от числа ремонтируемых струй. Линия останавливается для ремонта, если число отказавших струй достигло K. Требуется найти K, обеспечивающее максимум производительности линии (минимум потерь). Будем понимать под системой автоматическую линию и говорить, что система находится в состоянии E_n, если n из m струй не работают, т. е. отключены как отказавшие. Состояние E_n, где $0 \le n < K$, соответствует ситуации, когда отключены n струй, состояние E_K – ситуации, когда линия остановлена для ремонта.

Учитывая малость величины γ, будем считать, что за промежуток времени $T,T+\Delta_T$ может произойти отказ только одной струи. Это приводит к системе переходов

$$E_0 \to E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_{K-1} \to E_K, \qquad (1)$$

причем процесс обладает марковскими свойствами. Заметим, что среди состояний $E_0, E_1, \ldots, E_K$ нет поглощающего, и поэтому при бесконечном продолжении процесса система сколько угодно раз побывает в любом из своих состояний.

В начальный момент времени система находится в состоянии E_0, и мы обозначим через $P_n(T)$ вероятность перехода за время $0,T$ из состояния E_0 в состояние E_n. Рассмотрим вывод дифференциального уравнения для вероятности $P_n(T)\ (0<n<K)$.

Переход из состояния E_0 в состояние E_n за время $0,T+\Delta_T$ может осуществиться одним из двух взаимно исключающих друг друга способов:

а) за время $0,T$ имел место переход $E_0 \to E_n$, и за время $T,T+\Delta_T$ не было повреждений – вероятность совместного осуществления этих событий равна $P_n(T)\left[1-\ m-n\ \ \lambda\Delta_T+o\ \Delta_T\ \right]$;

б) за время $0,T$ имел место переход $E_0 \to E_{n-1}$, и за время $T,T+\Delta_T$ переход $E_{n-1} \to E_n$— соответствующая вероятность равна

$$P_{n-1}(T)\ m-n+1\ \ \lambda\Delta_T+o\ \Delta_T\ .$$

Таким образом,

$$P_n(T+\Delta_T)=P_n(T)\left[1-\ m-n\ \ \lambda\Delta_T+o\ \Delta_T\ \right]+P_{n-1}(T)\ m-n+1\ \ \lambda\Delta_T+o\ \Delta_T\ ,$$

соответственно:

$$\frac{dP_n\ T}{dT}=-\ m-n\ \lambda P_n\ T\ +(m-n+1)\lambda P_{n-1}\ T\ .$$

Рассматриваемому процессу отвечает система уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_n(T)}{dT} = -(m-n)\lambda P_n(T) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(T),\\
&\frac{dP_K(T)}{dT} = -lP_K(T) + (m-K+1)\lambda P_{K-1}(T),\\
&\frac{dP_o(T)}{dT} = -m\lambda P_o(T) + lP_K(T).
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

причем $\quad P_0(T) + P_1(T) + \ldots + P_K(T) = 1.$

Если выбрать на некотором удалении от начального момента времени некоторый момент $T > 0$, то система в этот момент будет находиться в одном из состояний $E_0, E_1, \ldots, E_K$. Вероятность того, что система в момент T находится в состоянии E_n равна вероятности перехода $P_n(T)$. При T, близком к нулю, наиболее вероятно, что система будет находиться в состоянии, соседнем или равном E_0, так как она еще не успеет сделать много переходов. По мере увеличения времени T влияние начального состояния системы будет уменьшаться и при больших T станет малым. Это свойство встречается при рассмотрении цепей Маркова и оно носит название эргодичности. Мы не будем формулировать общие условия, при которых процесс Маркова обладает таким свойством, но заметим, что так же, как это имело место в цепях Маркова, цепочка переходов (1) является замкнутой, и при бесконечном продолжении процесса система может сколь угодно раз побывать в любом из своих состояний.

Для процесса Маркова с непрерывным временем и дискретными состояниями свойство эргодичности формулируется как существование при $T \to \infty$ предела

$$\lim P_{ij}(t,T) = u_j,$$

где u_j – постоянное число, не зависящее от начального состояния E_i и от времени t. Физический смысл предельной вероятности перехода u_j тот же, что и в теории цепей Маркова.

Для нас представляет интерес число K, обеспечивающее максимум производительности в условиях длительной эксплуатации линии.

Поэтому мы должны рассмотреть решение системы (2) при $T \to \infty$. Переходя в ней к пределу при $T \to \infty$ и учитывая, что производная от постоянного числа равна нулю, найдем

$$\left.\begin{aligned} & m-n\;\; u_n - \;\; m-n+1\;\; u_{n-1} = 0,\; 0 \prec n \prec K, \\ & lu_K - \;\; m-K+1\;\; \lambda u_{K-1} = 0, \\ & m\lambda u_0 - lu_K = 0, \\ & u_0 + u_1 + \ldots + u_K = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где

$$u_n = \lim_{T \to \infty} P_n(T)$$

есть предельная вероятность нахождения системы в состоянии E_n.

Решение системы (3) дает

$$u_n = \frac{1}{(m-n)\left(\sum\limits_{i=0}^{K-1} \frac{1}{m-i} + \frac{\lambda}{l}\right)}, \qquad 0 \le n \prec K;$$

$$u_K = \frac{\lambda}{l} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{K-1} \frac{1}{m-i} + \frac{\lambda}{l}}.$$

С каждым из состояний E_n связано число $m-n$ работающих струй. Математическое ожидание Ак числа работающих струй представится как

$$A_K = mu_0 + \;\; m-1\;\; u_1 + \ldots + \;\; m-K+1\;\; u_{K-1}.$$

Очевидно, что в среднем производительность линии будет тем выше, чем больше A_K. Поэтому число K, обращающее A_K в максимум, задает оптимальный момент наладки многоструйной линии.

Преобразуя выражение для математического ожидания числа работающих струй; получим

$$A_K = \frac{K}{\sum\limits_{i=0}^{K=1} \frac{1}{m-i} + \frac{\lambda}{l}}. \qquad (4)$$

Если $A_K \succ A_{K-\nu}$, то это значит, что, останавливая линию для ремонта при отказе K струй, мы получим большую производительность, чем при ремонте после отказа $K+\nu$ струй.

Легко доказать, что если $A_K \geq A_{K+1}$, то $A_K \succ A_{K+\mu}$ где $\mu \geq \nu + 1$. Отсюда, в частности, следует, что остановка линии при отказе одной струи выгодна, когда

$$\frac{1}{m(m-1)} \geq \frac{\lambda}{l}.$$

Остановка линии при отказе двух струй выгодна, если

$$\frac{1}{m(m-1)} \prec \frac{\lambda}{l} \leq \frac{3m-2}{m(m-1)(m-2)}$$

Заметим, что

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{E(\Theta)}{E(\tau)},$$

где $E(\tau)$ – математическое ожидание времени τ безотказно работы струи, а $E(\Theta)$ – математическое ожидание времени Θ затрачиваемого на ремонт (наладку) линии.

Рассмотрим случай, когда линия имеет 6 струй. Известно, что математическое ожидание времени безотказной работы струи равно $E(\tau) = 120$ мин, математическое ожидание времени ремонта линии $E(\Theta) = 5$ мин. Требуется найти число K, задающее оптимальный момент наладки линии.

Вычислим

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{E(\Theta)}{E(\tau)} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

и величины

$$\frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}; \frac{3m-2}{m(m-1)(m-2)} = \frac{18-2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{2}{15}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{30} \prec \frac{\lambda}{l} \leq \frac{2}{15}.$$

и, следовательно, линию целесообразно останавливать для наладки, когда число отказавших струй равно двум.

Решенная нами задача легко обобщается на случай, когда длительность ремонта зависит от числа K отказавших струй. Для этого достаточно принять, что l является функцией числа K, и оставить все проделанные выкладки без изменения. Следует отметить, что если ремонт выполняется одним наладчиком и в силу этого математическое ожидание $E\,\Theta$ времени ремонта прямо пропорционально числу K отказавших струй, то для обеспечения наибольшей производительности линию следует останавливать для наладки при отказе одной струи.

Этот вывод можно получить из (4), если положить $l = \dfrac{\mu}{K}$, где μ – некоторая постоянная. Полученное нами решение будет справедливо, если время τ безотказной работы струи имеет показательное распределение, которое возникает в двух случаях: во-первых, если каждый из рабочих органов струи имеет показательное распределение времени работы и, во-вторых, если применяется поочередная смена рабочих органов.

Выводы

Совершенно очевидно, что при использовании принудительной подналадки, когда рабочие органы выходят из строя по схеме накапливающихся повреждений, следует осуществлять одновременную наладку всех струй. Также обстоит дело и при использовании совместной наладки. Последнее объясняется тем, что при выходе из строя рабочих органов по схеме накапливающихся повреждений и совместной подналадке средняя интенсивность отказов струй $\lambda\,T \to \infty$ при $T \to \infty$. Если в системе (2) принять, что $\lambda\,T$ – функция времени T работы, то при $T \to \infty$ система потеряет смысл, так как $\lambda\,T \to \infty$. Тем самым теряет смысл методика проведенного нами рассуждения. Для нахождения решения система (2) должна рассматриваться при конечном T. Это приводит при соответствующих выкладках к выводу, что совместную подналадку надо осуществлять для всей линии в целом и останавливать линию при отказе одной из струй.

Список использованной литературы:

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.: ил.

2. Капустин Н. М. Автоматизация производственных процессов в машиностроении / Н. М. Капустин. – М.: Высш. шк., 2004. – 416 с.

3. Кордонский Х.Б. Приложение теории вероятностей в инженерном деле / Х. Б. Кордонский. – М. ; Л.: Физматгиз, 1963. – 436 с.

Оболенская Т.А., Белецкая И.В., Рудецкая Ю.Е. «Определение оптимального момента наладки многострунной автоматической линии».

Статья посвящена определению оптимального момента наладки многострунной автоматической линии, обеспечивая максимум производительности линии (минимум потерь). Приведены расчеты и их использование для определения оптимального момента наладки линии.

Ключевые слова: производительность, наладка, струя, линия.

Оболенська Т.О., Білецька І.В., Рудецька Ю.Є. «Визначення оптимального моменту налагодження багатострунної автоматичної лінії».

Стаття присвячена визначенню оптимального моменту налагодження багатострунної автоматичної лінії, забезпечуючи максимум продуктивності лінії (мінімум втрат). Наведені розрахунки та їх використання для визначення оптимального моменту налагодження лінії.

Ключові слова: продуктивність, налагодження, струмінь, лінія.

Obolenskaya T.A., Beletskaya I.V. Rudeckaya J.E. “Determination of optimum moment of adjusting of many-stringed automatic transfer line”.

The Article is devoted determination of optimum moment of adjusting of many-stringed automatic transfer line, providing a maximum of the productivity of line (a minimum of losses). Calculations and their use are resulted for determination of optimum moment of adjusting of line.

Keywords: productivity, adjusting, stream, line.

Стаття надійшла до редакції 14 травня 2012 р.