

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМ КРАНОВОГО ВІЗКА. ЧАСТИНА I

### 1. Постановка проблеми

Вантажопідйомні крани значну долю від усього циклу роботи працюють при неусталених режимах роботи (пуск, зупинка, реверс). Усталений режим руху крана взагалі може бути відсутнім. Тому динамічні процеси, які виникають протягом перехідних режимів руху кранових механізмів, визначають умови роботи крана. Крім того, перехідні процеси необхідно враховувати при визначенні енергетичних показників роботи крана. Що стосується надійності роботи крана, його продуктивності та зручності експлуатації то ці важливі показники залежать від коливань вантажу, закріпленого на гнучкому підвісі. Ці коливання виникають протягом перехідних режимів руху крана, продовжуються на усталеному русі і після зупинки вантажного візка.

Основна тенденція розвитку сучасних систем керування рухом крана – перехід на інтелектуальне комп'ютерне керування (мехатронізація крана [1]). Високоінтелектуальні системи керування краном вирішують задачу усунення коливань вантажу, але роблять це не за оптимальними принципами. Дійсно, якщо відома математична модель руху крана [2, 3], то завжди можна обрати закон руху візка (або функцію зміни приводного зусилля) при якому коливання вантажу зникають до кінця зупинки візка [4]. Таких законів керування рухом крана можна знайти безліч. Однак, нас цікавить такий закон, при якому енергетичні та динамічні показники роботи крана будуть якнайкращими. Така постановка задачі властива теорії оптимального керування. Використовуючи методи оптимального керування можна синтезувати функцію зміни приводного зусилля (одну з безлічі можливих варіантів) при якому досягаються якнайкращі, з деяких позицій, характеристики роботи крана. Ці характеристики визначаються оптимізаційним критерієм, у якості якого обирають інтегральний (рідше термінальний) функціонал, який повинен відображати бажані або небажані характеристики руху крана. У першому випадку критерій необхідно максимізувати, у другому – мінімізувати.

Зазначимо, що оптимізація керування зовсім не означає відмову від сучасних інтелектуальних систем керування краном. У системах керування краном (бортовий мікроконтролер) оптимальні закони його руху повинні бути „зашиті”, а система керування повинна сама вирішувати в яких ситуаціях їх використовувати.

У праці [5] зазначається, що досвідчені кранівники коливання вантажу гасять протягом гальмування візка. Очевидно, при цьому економиться час, оскільки тривалість розгону може бути якнайменшою (розгін візка при максимальному керуючому зусиллі). Надалі візок рухається при швидкості близькій до номінальної (вантаж при цьому коливається і візок розганяється або гальмується від цих коливань). Однак руху візка на цьому етапі може взагалі не бути (після розгону візка одразу йде його гальмування). Отже,

фазовий стан системи „візок-вантаж” на початку гальмування візка може бути яким завгодно. Варто також прийняти до уваги те, що на рух візка і вантажу можуть справляти вплив наперед непередбачувані фактори (вітрове навантаження особливо при значній парусності вантажу), а також неточності моделі руху (не прийняте у розрахунок різного роду тертя, неточно визначені параметри моделі візка з вантажем тощо). Тому необхідно синтезувати таке керування, яке б враховувало фактичний стан системи.

## **2. Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Існують три групи способів усунення коливань вантажу [6]: маневрування механізмами при ручному керуванні [7]; застосування спеціальних підвісок або направляючих [8-12]; використання систем керування приводами кранових механізмів [5-10].

Перші два способи при сучасних темпах перевантажувальних робіт не здатні забезпечити достатню якість усунення коливань вантажу: перший спосіб пов'язаний з надмірною психологічною втомою кранівника, другий – з необхідністю зміни конструкції гнучкого підвісу, включенням до цієї конструкції ненадійних та масивних елементів. Тому більш поширеною є третя група способів.

Апаратна реалізація систем керування рухом крана досягається за допомогою сучасних промислових мікропроцесорів та електронного силового обладнання (частотні перетворювачі [11]). Що стосується алгоритмів роботи систем керування, то вони повинні містити оптимальні закони руху крана. Робота алгоритму повинна базуватись на „склеюванні” різних оптимальних законів руху візка у відповідності до вимог того чи іншого етапу руху. Наприклад, розгін повинен проходити якнайшвидше (критерій оптимізації – час), усталений рух повинен проходити при мінімальних енергетичних витратах (критерій оптимальності енергія·час), гальмування повинно проходити з усунення коливань вантажу і при мінімізації динамічної складової приводного зусилля. Для кожного етапу руху необхідно сформулювати свій критерій оптимальності, що взагалі кажучи, є дуже важливим моментом, але це не є предметом даного дослідження (важливі результати щодо питання розробки оптимізаційних критеріїв для різних режимів роботи вантажопідійомних машин можна знайти у роботі [12]).

На сьогоднішній день математична теорія оптимальних процесів є гарно розробленою галуззю науки, яка має надзвичайно важливі прикладні питання (рух літальних апаратів [13], робота верстатів [14] тощо). Виділяються три основні методи, які дають змогу формалізувати та розв'язати оптимізаційну задачу. Це варіаційні методи [15], принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [16] та динамічне програмування Р.Беллмана [17]. Зазначимо, що для проблеми усунення коливань вантажу знайшли використання класичні варіаційні методи [12], прямі варіаційні методи [18] та принцип максимуму [5, 6, 9, 10, 19-22]. Дамо короткий аналіз результатів, які отримані при використанні вказаних методів.

Використання варіаційних методів дозволяє отримати плавний характер керуючої дії на візок. При цьому динамічні навантаження у перехідних процесах не є значними. Однак таке керування у деяких випадках (наприклад, при значній довжині гнучкого підвісу) супроводжується відносно значною тривалістю. Що стосується обмежень, які накладені на

керування, то вони можуть бути виконані лише при збільшенні тривалості перехідних процесів. Затягування перехідних процесів руху крана є небажаним. Тому для задачі усунення коливань вантажу був використаний принцип максимуму, який дав змогу знайти оптимальне за швидкодією керування. Таке керування має релейний характер зміни, що для приводу крана є небажаним, оскільки воно супроводжується знаними струмовими навантаженнями електрообладнання крана та динамічними навантаженнями механічних частин крана. Релейне керування досить важко реалізувати на практиці, оскільки необхідно підтримувати постійним і максимальним значення моменту на валу двигуна. Крім того, не враховується характер електромагнітних перехідних процесів у електроприводі крана. У праці [19] наведено результати експерименту при якому сігнум-функція керування апроксимована неперервною функцією. Така апроксимація зусилля, що діє на візок, зменшує динамічні навантаження у елементах крана, але приводить до того, що коливання вантажу гасяться не повністю.

Для усунення коливань вантажу були застосовані прямі варіаційні методи, які характеризуються плавністю роботи механізмів крана (причому розглядається двомасова модель „візок-вантаж” та тримасова модель „візок-траверса-вантаж”). Ці дослідження дали змогу синтезувати закони руху кранового візка, які неможливо було отримати з використання класичних варіаційних методів. Однак, деякі з цих результатів є неприйнятними для практики.

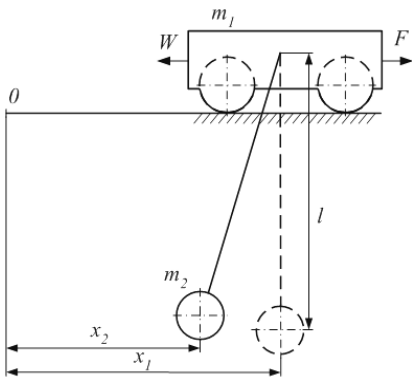
Отже проблема оптимальних законів керування для руху кранового візка з вантажем – це забезпечення швидкодії з одночасним зменшенням динамічних навантажень на елементи крана. Крім того, усі проаналізовані вище результати мають спільний недолік – вони ніяк не враховують фактичний стан системи „візок-вантаж”. Будь-який зовнішній стохастичний вплив призведе до „зриву” оптимальної траєкторії руху візка або вантажу і коливання вантажу після зупинки візка будуть залишатись. Якщо ж ввести у систему керування зворотній зв'язок за фактичними її параметрами, то при дії на візок або вантаж зовнішніх непередбачуваних впливах система відреагує: вона буде намагатись повернути рух візка до початкової, наперед заданої траєкторії. Така корекція керування, як зазначається у роботі [17], є вже не оптимальною.

### **3. Постановка мети та задач дослідження**

Метою приведеного дослідження (перша частина дослідження) є синтез оптимального керування рухом кранового візка з вантажем на гнучкому підвісі при якому коливання вантажу до кінця зупинки візка будуть усунені. Відповідно до мети ставляться такі задачі: 1) проаналізувати кінцеві умови руху системи „візок-вантаж” та на основі цього аналізу визначити кількість та зміст фазових координат для проведення синтезу оптимального керування; 2) синтезувати оптимальне керування рухом візка у формі зворотнього зв'язку.

### **4. Виклад основного матеріалу**

Для проведення досліджень прийнято двомасову модель механізму пересування кранового візка (рис. 1), яка досить широко використовується у задачах дослідження динаміки руху візка [2, 3] та оптимізації його руху [5-10, 12, 18-22].



**Рис. 1** – Розрахункова модель системи „візок-вантаж”

Приведена розрахункова схема (рис. 1) описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = F - W \operatorname{sign} \dot{x}_1; \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{l} (x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $m_1$  – приведена маса приводного механізму і вантажного візка;  $m_2$  – маса вантажу;  $x_1, x_2$  – координати центрів мас відповідно візка і вантажу;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $l$  – довжина гнучкого підвісу,  $F$  – сумарне тягове або гальмівне зусилля, що діє на візок;  $W$  –

приведена сила опору переміщенню візка.

Будемо вважати, що при переміщенні візка протягом гальмування візок не змінює свою швидкість, тобто  $\operatorname{sign} \dot{x}_1 = 1$ .

Для усунення коливань вантажу необхідно забезпечити такі умови:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(T) = 0; \\ x_1(T) - x_2(T) = 0; \\ \dot{x}_1(T) - \dot{x}_2(T) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де  $x_1(T)$  і  $x_2(T)$  – координати центрів мас відповідно візка і вантажу момент часу  $T$ ;  $\dot{x}_1(T)$  і  $\dot{x}_2(T)$  – швидкість візка і вантажу відповідно у момент часу  $T$ ;  $T$  – момент закінчення гальмування ( $T$  не є фіксованим).

Перше рівняння системи (2) встановлює зупинку візка у момент закінчення гальмування, а інші два – усунення коливань вантажу, оскільки енергія коливань буде рівною нулю (енергія коливань дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергії. Кінетична енергія коливань пропорційна квадрату різниці  $\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ , а потенціальна – квадрату різниці  $x_1 - x_2$ ). З другого рівняння системи (2) знайдемо:

$$\dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) + \Delta \dot{x}(T), \quad (3)$$

де через  $\Delta \dot{x}(T)$  позначено  $\frac{l}{g} \ddot{x}_2(T)$ . Оскільки згідно з (2)  $\Delta \dot{x}(T) = 0$ , то умову (3) можна переписати таким чином:

$$\dot{x}_2(T) = 0. \quad (4)$$

Введемо позначення:  $y_0 = \frac{l}{g} \dot{x}_2$ ,  $u = \frac{F - W}{m_1}$ , тоді систему рівнянь (2) можна

переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = y_1; \\ \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = u - \omega^2 y_1, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}$  – частота власних маятникових коливань вантажу відносно рухомої точки підвісу (відносно візка).

На керування накладаються обмеження у вигляді нерівності:

$$|u| \leq u_{\max} = \frac{F_{\max} - W}{m_1}, \quad (6)$$

де  $F_{\max}$  – максимальне зусилля приводу візка, яке відповідає максимальному моменту на валу двигуна.

Зазначимо, що отримана система рівнянь (5) має на одне рівняння менше ніж ті, які використовувались дослідниками такої ж задачі [21]. Таке зменшення кількості фазових координат системи дає змогу отримати аналітичний розв'язок задачі, причому сам процес розв'язування не є досить складним. Для отриманої системи рівнянь запишемо кінцеві умови руху системи „візок-вантаж”:

$$y_0(T) = y_1(T) = y_2(T) = 0. \quad (7)$$

Початкові умови визначаються значеннями фазових координат на початку гальмування візка з вантажем:

$$\begin{cases} y_0(0) = \frac{l}{g} \dot{x}_2(0); \\ y_1(0) = \frac{l}{g} \ddot{x}_2(0); \\ y_2(0) = \frac{l}{g} \ddot{\ddot{x}}_2(0). \end{cases} \quad (8)$$

У якості критерію, який потребує мінімізації, оберемо інтегральний функціонал:

$$I = \int_0^T [\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + (1 - \delta_0 - \delta_1 - \delta_2) u^2] dt, \quad (9)$$

де  $\delta_0, \delta_1, \delta_2$  – деякі коефіцієнти. Пояснимо чому саме такий критерій обрано. Одиначний критерій  $y_0^2$  відображає кінетичну енергію руху вантажу, який коливається. Зазначимо, що природніше було б обрати інший критерій, який би відображав кінетичну енергію руху візка, але при цьому інтегральний критерій став би нелінійним, що значно ускладнює розв'язування задачі. Сума критеріїв  $y_1^2$  та  $y_2^2$  (квадрати відхилення координат центрів мас візка і вантажу, а також квадрат різниці їх швидкостей) з відповідними коефіцієнтами характеризують енергію коливань вантажу. Крім того, у критерії (9) також враховані втрати на керування системою. Необхідно також сказати про те, що величини, які входять у критерій (9) мають різний фізичний зміст. Тому їх необхідно приводити до одної розмірності або до безрозмірної величини. У подальшому будемо вважати, що цю функцію виконують коефіцієнти  $\delta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Це означає, що коефіцієнти  $\delta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) представляються у вигляді добутку двох величин:

$$\delta_i = k_i \tilde{I}_i, \quad (10)$$

де  $k_i$  – ваговий коефіцієнт, який відображає важливість  $i$ -того одиничного критерію з виразу (9);  $\tilde{I}_i$  – деякий коефіцієнт, який приводить розмірність одиничного критерію, наприклад, до безрозмірного вигляду (це може бути мінімально можливе значення  $i$ -того критерію). Для скорочення записів введемо позначення:  $\delta_u = 1 - \delta_0 - \delta_1 - \delta_2$ .

Для розв'язування цієї задачі використаємо метод динамічного програмування [17]. Основне функціональне рівняння запишеться таким чином:

$$\min[\delta_0 y_0^2 + \delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \delta_u u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_0} y_1 + \frac{\partial S}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial S}{\partial y_2} (u - \omega^2 y_1)] = 0, \quad (11)$$

де  $S$  – функція Беллмана.

Будемо вважати, що на керування  $u$  не накладено обмежень (6). Це дасть змогу знайти аналітичний розв'язок задачі. Однак у подальшому ми врахуємо нерівність (6).

Мінімум правої частини рівняння (11) будемо шукати по параметру керування  $u$  для чого продиференціюємо її за  $u$  та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_u u + \frac{\partial S}{\partial y_2} = 0. \quad (12)$$

Знайдемо з рівняння (12) керування  $u$ :

$$u = -\frac{1}{2\delta_u} \frac{\partial S}{\partial y_2}. \quad (13)$$

Підставимо отримане у рівняння (11), в результаті чого будемо мати:

$$\delta_0 y_0^2 - \frac{1}{4\delta_u} \left(\frac{\partial S}{\partial y_2}\right)^2 + y_2 \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} + y_2 \delta_2\right) + y_1 \left(\frac{\partial S}{\partial y_0} + y_1 \delta_1 - \frac{\partial S}{\partial y_2} \omega^2\right) = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми, як це прийнято при розв'язуванні подібних задач [23]:

$$S = A_1 y_0^2 + A_2 y_1^2 + A_3 y_2^2 + A_4 y_0 y_1 + A_5 y_0 y_2 + A_6 y_1 y_2, \quad (15)$$

де  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  – постійні коефіцієнти, які необхідно визначити.

Візьмемо частинні похідні з виразу (15) за параметрами  $y_0, y_1$  та  $y_2$ :

$$\frac{\partial S}{\partial y_0} = 2A_1 y_0 + A_4 y_1 + A_5 y_2, \quad (16)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = A_4 y_0 + 2A_2 y_1 + A_6 y_2, \quad (17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_2} = A_5 y_0 + A_6 y_1 + 2A_3 y_2, \quad (18)$$

Підставимо вирази (16-18) у рівняння (14), отримаємо:

$$\delta_0 y_0^2 - \frac{1}{4\delta_u} (A_5 y_0 + A_6 y_1 + 2A_3 y_2)^2 + y_2 (A_4 y_0 + 2A_2 y_1 + A_6 y_2 + y_2 \delta_2) + y_1 (2A_1 y_0 + A_4 y_1 + A_5 y_2 + y_1 \delta_1 - A_5 y_0 + A_6 y_1 + 2A_3 y_2 \omega^2) = 0. \quad (19)$$

Розкриємо квадрати та винесемо за дужки спільні множники. У результаті перетворень рівняння (19) будемо мати:

$$\begin{aligned}
 & y_0^2 \left( \delta_0 - \frac{A_5^2}{4\delta_u} \right) + y_1^2 \left( A_4 - A_6 \omega^2 - \frac{A_6^2}{4\delta_u} + \delta_1 \right) + y_2^2 \left( A_6 + \delta_2 - \frac{A_3^2}{\delta_u} \right) + y_0 y_1 \times \\
 & \times \left( 2A_1 - \frac{A_6 A_5}{2\delta_u} - A_5 \omega^2 \right) + y_0 y_2 \left( A_4 - \frac{A_3 A_5}{2\delta_u} \right) + y_1 y_2 \left( 2A_2 + A_5 - \frac{A_3 A_6}{2\delta_u} - A_3 \omega^2 \right) = 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

Рівняння (20) буде справедливим у тому випадку, коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки  $y_0 \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$ ,  $y_2 \neq 0$  одночасно. Тому рівняння (20) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}
 \delta_0 - \frac{A_5^2}{4\delta_u} = 0; \\
 A_4 - A_6 \omega^2 - \frac{A_6^2}{4\delta_u} + \delta_1 = 0; \\
 A_6 + \delta_2 - \frac{A_3^2}{\delta_u} = 0; \\
 2A_1 - \frac{A_6 A_5}{2\delta_u} - A_5 \omega^2 = 0; \\
 A_4 - \frac{A_3 A_5}{2\delta_u} = 0; \\
 2A_2 + A_5 - \frac{A_3 A_6}{2\delta_u} - A_3 \omega^2 = 0.
 \end{cases} \tag{21}$$

Використовуючи рівняння (13) та (18), запишемо:

$$u = - \frac{A_5 y_0 + A_6 y_1 + 2A_3 y_2}{2\delta_u}. \tag{22}$$

Отже нас цікавлять лише три коефіцієнта  $A_3$ ,  $A_5$ ,  $A_6$ . Для їх знаходження перейдемо до іншої системи з трьох рівнянь, яку можна отримати з системи (21), зробивши деякі перетворення:

$$\begin{cases}
 \delta_0 - \frac{A_5^2}{4\delta_u} = 0; \\
 A_6 + \delta_2 - \frac{A_3^2}{\delta_u} = 0; \\
 \frac{A_3 A_5}{\delta_u} - A_6 \omega^2 - \frac{A_6^2}{4\delta_u} + \delta_1 = 0.
 \end{cases} \tag{23}$$

Систему рівнянь (23) можна звести до одного алгебраїчного рівняння четвертої степені відносно  $A_3$ :

$$B_1 A_3^4 + B_2 A_3^2 + B_3 A_3 + B_4 = 0, \tag{24}$$

де  $B_1 = -\frac{1}{4\delta_u^3}$ ,  $B_2 = -\frac{\delta_2}{2\delta_u^2} - \frac{\omega^2}{\delta_u}$ ,  $B_3 = \pm \frac{2\delta_0}{\sqrt{\delta_0\delta_u}}$  (знак „+” відноситься до випадку, коли

$$A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}, \text{ а знак „-” до випадку, коли } A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}), B_4 = \delta_1 + \delta_2\omega^2 - \frac{\delta_2^2}{4\delta_u}.$$

За допомогою методу Декарта-Ейлера [24] отримали корені рівняння (24) – їх чотири. Оскільки вони значні за об’ємом то приведемо лише їх умовні позначення:  $A_{3(j)}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ).

Тепер можемо записати розв’язки системи рівнянь (23), яких буде вісім:

1.  $A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(1)}$ ;
2.  $A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(2)}$ ;
3.  $A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(3)}$ ;
4.  $A_5 = 2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(4)}$ ;
5.  $A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(1)}$ ;
6.  $A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(2)}$ ;
7.  $A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(3)}$ ;
8.  $A_5 = -2\sqrt{\delta_u\delta_0}$ ,  $A_6 = -\delta_2 + \frac{A_3^2}{\delta_u}$ ,  $A_{3(4)}$ .

Необхідно з цих восьми розв’язків обрати один. Для цього необхідно їх проаналізувати шляхом підстановки „реальних” значень параметрів руху візка з вантажем та значень вагових коефіцієнтів. Такий аналіз дає змогу встановити, що в усіх розв’язках, окрім випадків 2 і 7, присутні комплексні числа, що не дає змоги реалізувати таке керування. Отже необхідно з двох розв’язків обрати один. Для цього необхідно розв’язати систему диференціальних рівнянь при відомих керуваннях для випадків 2 і 7. Надалі необхідно проаналізувати як змінюються фазові координати у часі.

Систему диференціальних рівнянь (1) можна привести до одного диференціального рівняння четвертого порядку відносно невідомої функції переміщення вантажу  $x_2(t)$ :

$$x_2^{IV} + \omega^2 \ddot{x}_2 = u\omega_0^2, \quad (25)$$

де  $\omega_0$  – частота коливань вантажу відносно нерухомої точки підвісу,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .



Неоднорідне диференціальне рівняння (25) можна перетворити у однорідне. Справді, керування (22) залежить від фазових координат системи, які, як вже зазначалося, пропорційні кінематичним функціям руху вантажу:  $y_0 = \frac{l}{g} \dot{x}_2$ ,  $y_1 = \frac{l}{g} \ddot{x}_2$ ,  $y_2 = \frac{l}{g} \ddot{\ddot{x}}_2$  або  $y_0 = \dot{x}_2 \omega_0^{-2}$ ,  $y_1 = \ddot{x}_2 \omega_0^{-2}$ ,  $y_2 = \ddot{\ddot{x}}_2 \omega_0^{-2}$ . Тоді праву частину рівняння (25) можна записати таким чином:

$$u \omega_0^2 = - \frac{A_5 \dot{x}_2 + A_6 \ddot{x}_2 + 2A_3 \ddot{\ddot{x}}_2}{2\delta_u}. \quad (26)$$

Зробивши відповідні перетворення, можемо записати однорідне диференціальне рівняння, яке еквівалентне рівнянню (25):

$${}^{IV} x_2 + Q_1 \ddot{\ddot{x}}_2 + Q_2 \ddot{x}_2 + Q_3 \dot{x}_2 = 0, \quad (27)$$

де  $Q_1, Q_2, Q_3$  – деякі коефіцієнти ( $Q_1 = \frac{A_3}{\delta_u}$ ,  $Q_2 = \omega^2 + \frac{A_6}{2\delta_u}$ ,  $Q_3 = \frac{A_5}{2\delta_u}$ ).

Для розв'язування рівняння (26) складемо його характеристичне рівняння, яке є алгебраїчним рівнянням четвертої степені:

$$r^4 + Q_1 r^3 + Q_2 r^2 + Q_3 r = 0. \quad (28)$$

Не будемо зупинятись на методиці розв'язування цього рівняння, а лише запишемо його корені: один нульовий, один дійсний та два комплексно-спряжених:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = 0; \\ r_2 = \frac{1}{6} \left[ -2Q_1 + \frac{2^{\frac{4}{3}}(Q_1^2 - 3Q_2)}{(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 - 27Q_3 + 3^{\frac{3}{2}} \sqrt{-Q_1^2Q_2^2 + 4Q_2^3 + 4Q_1^3Q_3 - 18Q_1Q_2Q_3 + 27Q_3^2})^{-\frac{1}{3}}} \right]; \\ r_{3,4} = \left[ -\left(2^{\frac{4}{3}}Q_1^2 + 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}}Q_2 - \left(-4Q_1^3 + 18Q_1Q_2 - 54Q_3 + 6\sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1Q_3(2Q_1 - 9Q_2) + 81Q_3^3}\right)^{\frac{2}{3}} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4Q_1 \left(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 + 3\left(-9Q_3 + \sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \times \\ \times \left[ 12 \left(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 + 3\left(-9Q_3 + \sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}} \right]^{-1} \pm \\ \pm \left[ -2Q_1^2 + 6Q_2 + 2^{\frac{1}{3}} \left(-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 - 27Q_3 + 3\sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{2}{3}} \\ \left. \right] \frac{1}{2^{\frac{5}{3}} \sqrt{3} \left[-2Q_1^3 + 9Q_1Q_2 + 3\left(-9Q_3 + \sqrt{-3(Q_1^2 - 4Q_2)Q_2^2 + 6Q_1(2Q_1^2 - 9Q_2)Q_3 + 81Q_3^2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}}. \quad (29) \end{array} \right.$$

Тепер можемо записати розв'язок диференціального рівняння (26):

$$x_2 = C_1 + C_2 e^{p_2 t} + e^{t \operatorname{Re}[p_{3,4}]} [C_3 \operatorname{Sin}(\operatorname{Im}(p_{3,4})t) + C_4 \operatorname{Cos}(\operatorname{Im}(p_{3,4})t)], \quad (30)$$

де  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постійні інтегрування, які визначаються з початкових умов руху системи. Необхідно зазначити, що кількість початкових умов (8) не відповідає кількості постійних інтегрування. Не вистачає однієї початкової умови, яку неважко знайти (це третя похідна функції переміщення вантажу за часом). Отже запишемо систему рівнянь, яка дає змогу знайти невідомі постійні інтегрування:

$$\begin{cases} x_2(0) = x_{20}; \\ \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}; \\ \ddot{x}_2(0) = \ddot{x}_{20}; \\ \dddot{x}_2(0) = \dddot{x}_{20}. \end{cases} \quad (31)$$

Знайдемо розв'язок системи рівнянь (31):

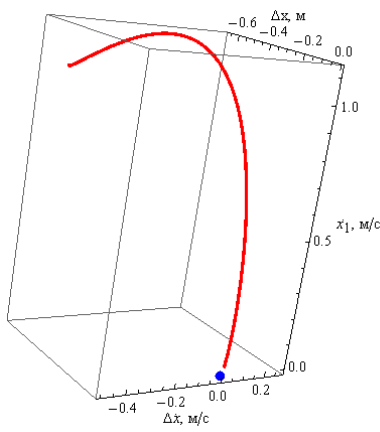
$$\begin{cases} C_1 = -\frac{\ddot{x}_{20} - \dot{x}_{20}(p_2 + 2\operatorname{Re}(p_{3,4})) + \dot{x}_{20}(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + 2p_2 \operatorname{Re}(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))}{p_2(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))} + x_{20}; \\ C_2 = \frac{\ddot{x}_{20} - 2\dot{x}_{20} \operatorname{Re}(p_{3,4}) + \dot{x}_{20}(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))}{p_2(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + (p_2 - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})))}; \\ C_3 = \frac{\ddot{x}_{20}(p_2 - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})) - 2\dot{x}_{20}(p_2 - \operatorname{Im}^2(p_{3,4}) - 3\operatorname{Re}^2(p_{3,4})) + \dot{x}_{20}p_2(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + 2p_2 \operatorname{Re}^2(p_{3,4}) - 3\operatorname{Re}^2(p_{3,4}))}{(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4}))(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + (p_2 - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})))}; \\ C_4 = \left[ \ddot{x}_{20}(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}(p_{3,4})(p_2 - \operatorname{Re}(p_{3,4}))) + \dot{x}_{20} \operatorname{Re}(p_{3,4})(p_2^2 + 3\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) - \operatorname{Re}^2(p_{3,4})) + \dot{x}_{20}p_2 \times \right. \\ \left. \times (-3\operatorname{Im}^2(p_{3,4})\operatorname{Re}(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^3(p_{3,4}) + p_2(\operatorname{Im}(p_{3,4}) - \operatorname{Re}(p_{3,4}))(\operatorname{Im}(p_{3,4}) + \operatorname{Re}(p_{3,4}))) \right] \times \\ \left[ \operatorname{Im}(p_{3,4})(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + (p_2 - \operatorname{Re}(p_{3,4}))^2)(\operatorname{Im}^2(p_{3,4}) + \operatorname{Re}^2(p_{3,4})) \right]. \end{cases} \quad (32)$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у рівняння (30), отримаємо шукану функцію переміщення вантажу у часі.

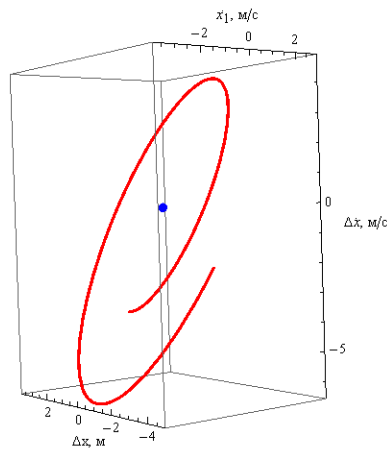
Однак відкритим залишається питання, який з варіантів розв'язку системи рівняння (23) (2-й чи 7-й) використати. Для вирішення цього питання необхідно проаналізувати графіки функцій (30) для обох випадків. Побудуємо фазові портрети системи „візок-вантаж” для таких фазових координат:  $\Delta x$ ,  $\Delta \dot{x}$  та  $\dot{x}_1$  (рис. 2.). Фазові портрети побудовані при таких параметрах системи:  $T = 5 \text{ с}$ ,  $m_1 = 1000 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 1000 \text{ кг}$ ,  $l = 10 \text{ м}$ ,  $\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = 0,33$ ,  $x_{20} = -0,5 \text{ м}$ ,  $\dot{x}_{20} = 1,5 \text{ м/с}$ ,  $\ddot{x}_{20} = -0,5 \text{ м/с}^2$ ,  $\dddot{x}_{20} = -0,5 \text{ м/с}^3$ .

На рис. 2 точкою відмічено початок координат (точка у якій візок має нульову швидкість а коливання вантажу затухають). З рис. 2 видно, що траєкторія руху фазової точки для коефіцієнтів у функції керування (22) для випадку 2 з полином часу наближається до початку координат. Інша ситуація з коефіцієнтами керування для випадку 7 – з полином часу фазова точка віддаляється від початку координат, що свідчить про нестійкість системи. Тому випадок 7 відкидаємо і надалі працюємо лише з випадком 2.

Загалом, з рис. 2(а) видно, що отримано оптимальне керування, яке переводить фазову точку у початок координат (точніше у його достатньо малий окіл), при цьому коливання вантажу практично зникають і візок зупиняється.



а) фазовий портрет руху системи для випадку 2



б) фазовий портрет руху системи для випадку 7

**Рис. 2** – Фазові портрети системи „візок-вантаж” для різних варіантів коефіцієнтів керування (22)

На початку дослідження ми використали припущення, що нерівність (б) не враховується. Якщо привод візка обладнаний потужним двигуном, то таке припущення реально відображає можливості керування системою. Однак, як правило, це припущення невірне і тому необхідно його враховувати обмеженням на керування. Способом, який дозволяє врахувати ці та інші обмеження присвячена друга частина статті.

### Висновки

Використання динамічного програмування дозволяє знайти оптимальне керування рухом візка у формі зворотного зв'язку. Крім того, встановлено, що для усунення коливань вантажу можна використовувати три фазові координати, які у кінці руху візка рівні нулю. Це дало змогу полегшити розв'язування поставленої задачі. Використання синтезованого у дослідженні оптимального керування дає змогу оптимізувати увесь процес руху крана.

### Список використаних джерел:

1. Crane Control and Automation Global Solutions. [Electronic Resource]. – Mode of access : URL:[http://www.tmeic-ge.com/upload/library\\_docs/english/TMG-1424\\_Crane\\_Control\\_Industry-LowRes\\_1249656112.pdf](http://www.tmeic-ge.com/upload/library_docs/english/TMG-1424_Crane_Control_Industry-LowRes_1249656112.pdf) – Title from the screen.
2. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / М. С. Комаров. – М. : Машиностроение, 1969. – 206 с.
3. Казак С. А. Динамика мостовых кранов / С. А. Казак. – М. : Машиностроение, 1968. – 331 с.
4. Мисюра В. П. Уменьшение колебаний груза при автоматизированном режиме работы кранов-перегрузателей / В. П. Мисюра, И. Н. Васильченко // Механизация и автоматизация производства. – 1985. – № 11. – С. 22–24.
5. Свиргун В. П. Разработка оптимальных законов управления мостовым грейферным краном и применение микропроцессорной системы для их реализации : автореф дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.05.05 „Подъемно-транспортные машины” / В. П. Свиргун. – Х., 1989. – 15 с.
6. Смехов А. А. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами / А. А. Смехов, Н. И. Ерофеев. – М. : Машиностроение, 1975. – 239 с.
7. Сохадзе А. Г. Мехатронная система грузоподъемного крана для автоматической стабилизации положения груза и управления его движением : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.05 / Александр Георгиевич Сохадзе. – Новочеркасск, 2006. – 218 с.

8. Терехов В. М. Системы управления электроприводов : учеб. / В. М. Терехов, О. И. Осипов ; под ред. В. М. Терехова. – Саратов : Академия, 2005. – 300 с.
9. Бушер В. В. Асинхронный электропривод подъемно-транспортных механизмов с микропроцессорным управлением : автореф. дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.09.03 „Электрические комплексы и системы, включая их управление и регулирование” / В. В. Бушер. – Одесса, 1993. – 16 с.
10. Мельникова Л. В. Автоматизация технологического процесса перемещения механизма с подвешенным грузом средствами микропроцессорного управления : дис. ... канд техн. наук : 05.09.03 / Любовь Васильевна Мельникова. – Одесса, 2000. – 116 с.
11. Преобразователь частоты Altivar 71 от Schneider Electric – оптимальное решение для применения в системах управления подъемно-транспортным оборудованием [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [http://www.schneider-electric.ua/ukraine/ua/products-services/offer-updates/news-viewer.page?c\\_filepath=/templatedata/Content/News/data/ua/local/automation\\_control/general\\_information/2009/07/20090722\\_altivar\\_71\\_schneider\\_electric\\_.xml](http://www.schneider-electric.ua/ukraine/ua/products-services/offer-updates/news-viewer.page?c_filepath=/templatedata/Content/News/data/ua/local/automation_control/general_information/2009/07/20090722_altivar_71_schneider_electric_.xml). – Название с экрана.
12. Ловейкин В. С. Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительной машины / В. С. Ловейкин. – К. : УМК ВО, 1990. – 168 с.
13. Тараненко В. Т. Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета / В. Т. Тараненко, В. Г. Момоджи. – М. : Машиностроение, 1986. – 127 с.
14. Хитрик В. Э. Методы динамической оптимизации механизмов машин-автоматов / В. Э. Хитрик. – Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1974. – 116 с.
15. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 424 с.
16. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Физматгиз, 1961. – 392 с.
17. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус ; пер. с англ. Н. М. Митрофановой, А. А. Первозванского, А. П. Хусу, О. В. Шалаевского. – М. : Наука, 1965. – 460 с.
18. Ловейкін В. С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / В. С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич. – К.; Ніжин : Видавець ПП Лисенко М. М., 2010. – 184 с.
19. Герасимьяк Р. П. Анализ и синтез крановых электромеханических систем / Р. П. Герасимьяк, В. А. Лещёв. – Одесса : СМІЛ, 2008. – 192 с.
20. Базил Ш. Управление электроприводом циклически работающих механизмов горизонтального перемещения : дис. ... канд. техн. наук : 05.09.03 / Шафик Базил. – Одесса, 1993. – 186 с.
21. Григоров О. В. Вантажопідйомні машини : навч. посіб. / О. В. Григоров, Н. О. Петренко. – Х. : НТУ ХП, 2006. – 304 с.
22. Черноусько Ф. Л. Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – М. : Наука, 1980. – 384 с.
23. Летов А. М. Динамика полета и управление / А. М. Летов. – М. : Наука, 1969. – 360 с.

24. Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.

*Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О.* «Синтез оптимального керування рухом кранового візка. Частина І».

Виконано постановку задачі оптимального керування рухом крана із вантажем на гнучкому підвісі. Знайдено функціональне рівняння Беллмана, як необхідна умова оптимізації. Задачу знаходження оптимального керування зведено до розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Шляхом аналізу руху точки у фазовому просторі системи встановлено розв'язок, який відповідає стійкості руху динамічної системи „кран-вантаж”. Оптимальне керування знайдено у відкритій області керувань.

**Ключові слова:** крановий візок, оптимальне керування, гнучкий підвіс, динамічна система.

*Ловейкин В.С., Ромасевич Ю.А.* «Синтез оптимального управления движением крановой тележки. Часть I».

Поставлена задача оптимального управления движением крана с грузом на гибком подвесе. Найдено функциональное уравнение Беллмана, как необходимое условие оптимизации. Задача нахождения оптимального управления сведена к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Путем анализа движения точки в фазовом пространстве системы установлено решение, которое отвечает устойчивости движения динамической системы „кран-груз”. Оптимальное управление найдено в открытой области управлений.

**Ключевые слова:** крановая тележка, оптимальное управление, гибкий подвес, динамическая система.

*Loveykin V.S., Romasevichy Y.O.* “Crane carriage movement optimal control. Part I”.

The optimal control of crane movement with load at flexible suspension has been stated. Bellman's functional equation, such as requirement of optimization, has been find. Optimal control problem has been restricted by solving of non-linear algebraic equation system. Solution has been stated by mean of analysis, witch response stability of motion of dynamical system „crane-load”. Optimal control has been find in open area of control's.

**Key words:** crane carriage, optimal control, flexible suspension, dynamical system.

Стаття надійшла до редакції 22 квітня 2013 р.