

©Нестеренко В.В.

## **ВИЗНАЧЕННЯ КОМПОНЕНТ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАРАБАНА, ЩО МАЄ ПІДКРІПЛЮЮЧІ КІЛЬЦЯ**

### **1. Постановка проблеми**

Одним з головних напрямів модернізації існуючих та проектування нових моделей піднімально-транспортних машин є зменшення ваги підйомних пристроїв. Для цього необхідно розробити нові методики розрахунку окремих конструкцій та вузлів крана, правильно призначити запаси міцності та стійкості і т.д.

Канатний барабан зустрічається в найрізноманітніших машинах – на кранах, у бурових верстатах, у шахтному підйомі, у тралових та якорних пристроях та інше. У залежності від типу машини, що використовується, різняться й конструкції барабанів. В одних випадках діаметр барабана є малим, а товщина стінки, яка обумовлена технологічними та конструктивними міркуваннями, відносно велика, при цьому не виникає побоювання втрати стійкості стінки. В інших випадках барабан має діаметр три–шість метрів і вимоги до міцності стінки доповнюються вимогами до її стійкості.

У багатьох випадках для підвищення стійкості стінки барабану застосовують поздовжні ребра або підкріплюючі кільця. Вибір оптимального варіанта потребує проведення наукового аналізу, що спирається на практичні дані про працездатність тих або інших конструкцій барабанів.

Розповсюджені при конструюванні приблизні розрахунки барабанів вантажопідйомних машин часто виявляються недостатніми або взагалі неприйнятними. Назріла необхідність уточнити уявлення про роботу барабанів, підкріплених кільцями, в умовах одношарової та багатошарової навивок каната.

### **2. Аналіз останніх досліджень та публікацій**

У практиці побудови кранів широко розповсюджені спрощені розрахунки елементів барабану. З деяким наближенням барабан вважають циліндричною оболонкою сталі товщини. Розрахунок канатного барабана засновано на рішенні Р. Мізеса, яке було згодом повторене в роботах П. Ф. Папковича [10], С. П. Тимошенка [13], А. Н. Дінніка [4] та інших спеціалістів в області теорії пружності. У випадках, коли виникають сумніви в стійкості стінки канатного барабана, його підсилюють ребрами та кільцями жорсткості. Це не тільки підвищує металоемність барабана і ускладнює технологію його виготовлення, але й призводить до появи утомних тріщин та зупинки роботи механізму підйому.

Практика розрахунку канатних барабанів вантажопідйомних машин, як правило, передбачає розрахунок стінки барабану тільки на стискання. Напруження стискання в стінці барабану визначають за теорією напруженого стану кільця, навантаженого рівномірно

розподіленим по його зовнішній поверхні тиском. Найбільші напруження виникають на внутрішній поверхні кільця [7]. Але такий розрахунок не враховує ряд факторів, що впливають на величину напружень у стінці барабана і, як наслідок, не відображає дійсних умов роботи стінки у випадку, коли витки каната намотані тільки на частині барабана. Неповне заповнення барабана канатом створює напруження згину вздовж твірної, причому ці напруження можуть бути значними. Питання про їх урахування потребує спеціального аналізу.

### **3. Постановка мети та задач дослідження**

При розрахунках на стискання припускається, що натягіння в канаті зберігає сталі значення. Це не є очевидним, тому що натягіння у витках каната, навитого на барабан, під впливом зминання барабана при навиванні наступних витків каната зменшується. Крім того, рівень напруженого стану поблизу вварених в барабан кілець жорсткості значно вище, ніж той, який дають звичайні розрахунки на міцність. У результаті цього з'являються кільцеві тріщини в місці з'єднання кільця з обичайкою.

Розрахунок оболонки канатного барабана, який навантажений дією каната, базується на теорії пружності. Як правило, оболонка розраховується вільною від підсилюючих елементів, а кільця, якщо вони є, розглядаються окремо від стискаючого навантаження. Було поставлено задачу вирішення напруженого стану оболонки з урахуванням кілець жорсткості, тобто їх сумісної роботи при дії на оболонку змінного натягіння витків каната.

Таким чином, поставлена задача про сумісну роботу довгої тонкостінної циліндричної оболонки в загальному випадку навантаження і ряду циліндричних кілець, що її підкріплюють.

### **4. Виклад основного матеріалу**

Обмеження радіальних деформацій у зоні встановлення підкріплюючих кілець викликає в ній напруження згину, які можуть бути значними і перевищувати «номінальні» напруження стискання [7, 8]. Ці місцеві напруження можуть бути вирішальними вже просто тому, що для чавунних барабанів границя міцності на згин вдвічі менша за границю міцності на стискання.

Крім того стінка барабана підйомної машини працює в умовах змінних циклічних навантажень, тому необхідно проводити розрахунки на утомність для зони встановлення підкріплюючих кілець з точними значеннями компонент напружено-деформованого стану та з урахуванням впливу зварних швів з'єднання кілець – обичайка барабана.

Змінне по колу натягіння у витках каната (а, як наслідок, і по твірній оболонки) викликається силами тертя між канатом і стінкою барабана. В усіх випадках закон змінення натягіння приймається у формі залежності Ейлера.

У місці встановлення кілець виникає напружено-деформований стан, локалізований у зоні контуру плоского перерізу, яке ортогональне осі циліндра, – так званий узагальнений крайовий ефект. Точні рішення крайових задач для циліндричної оболонки, що виникають

при розгляді реальних конструкцій, надзвичайно складні, громіздкі і, головне, результати цих рішень у значній мірі знецінюються похибками формулювання задачі.

Для рішення поставленої задачі використано приблизні підходи, у яких прийняті спрощення розрахунку базуються на визначених властивостях тонких оболонок та чітко математично обґрунтовані.

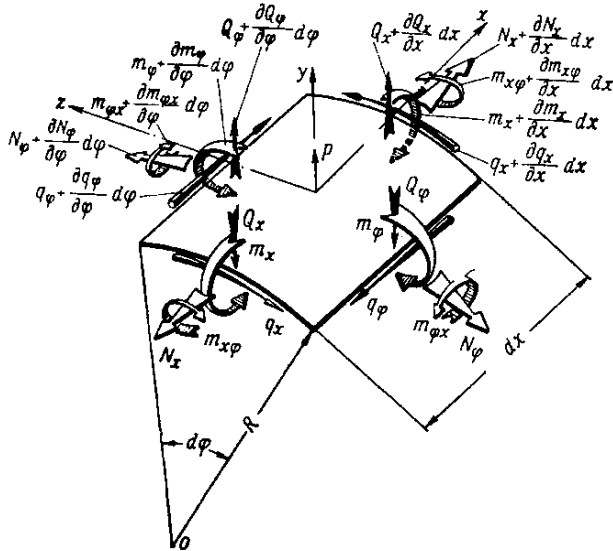


Рис. 1 – Схема зусиль, які діють на елемент оболонки

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_\phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}; \quad \chi_{x\phi} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi},$$

де  $u, v, w$  – переміщення в напрямках осей відповідно  $x, y(\phi), z$ ;  $a$  – радіус оболонки.

2. Співвідношення пружності для зусилля, що зсуває, необхідно приймати у вигляді

$$N_{x\phi} = -N_{\phi x} = \frac{Eh}{1 + \mu} \cdot \frac{\gamma_{x\phi}}{2},$$

де  $E$  – модуль пружності першого роду,  $h$  – товщина оболонки,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $N_{x\phi}, N_{\phi x}$  – зусилля, що зсувають у відповідних напрямках.

3. У другому рівнянні рівноваги необхідно вважати  $Q_\phi = 0$ .

Тоді вихідні рівняння для кругової циліндричної оболонки можна використовувати у вигляді:

<p>геометричні рівняння стану:</p> $\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_\phi &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - w \right); \\ \gamma_{x\phi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \chi_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \chi_\phi &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}; \\ \chi_{x\phi} &= \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi}; \end{aligned} \right\} (1)$	<p>рівняння рівноваги:</p> $\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\phi); \\ N_\phi &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_\phi + \mu \varepsilon_x); \\ N_{x\phi} &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \frac{\gamma_{x\phi}}{2}; \\ M_x &= -\frac{Eh^3}{12} (\chi_x + \mu \chi_\phi); \\ M_\phi &= -\frac{Eh^3}{12} (\chi_\phi + \mu \chi_x); \\ M_{x\phi} &= \frac{Eh^3}{12} \chi_{x\phi}; \end{aligned} \right\} (2)$	<p>співвідношення:</p> $\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} + aX &= 0; \\ a \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + aY &= 0; \\ N_\phi + a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + aZ &= 0; \\ a \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + aQ_\phi &= 0; \\ a \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial \phi} - aQ_\phi &= 0; \end{aligned} \right\} (3)$
---	--	--

де  $\varepsilon_x, \varepsilon_\varphi, \gamma_{x\varphi}$  – відносні деформації у відповідних напрямках,  $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}$  – мембранні зусилля,  $M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}$  – згинаючі моменти,  $X, Y, Z$  – складові зовнішнього навантаження.

Рівняння рівноваги в переміщеннях здобуті за допомогою (1), (2) мають вигляд:

Отримана система рівнянь теорії тонкостінних оболонок співпадає з системою рівнянь у формі Е. Рейснера, у якій опущені члени другого порядку малості  $c \frac{h^2}{12a^2}$  [1].

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\mu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} = - \frac{(-\mu^2)}{Eh} X; \\ \frac{1+\mu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = - \frac{(-\mu^2)}{Eh} Y; \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} - \frac{w}{a} \frac{ah^2}{12} \nabla^4 w = - \frac{(-\mu^2)}{Eh} Z; \end{cases} \quad (4)$$

де 
$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{a^2 \partial \varphi^2} \right)^2.$$

Для випадку тільки радіального навантаження  $Z$ , віднесеного до одиниці поверхні, система (4) може декількома операціями бути зведена до звичайного диференціального рівняння восьмого порядку та двом співвідношенням (відносно тільки  $w$ ):

$$\nabla^8 w + \frac{12(-\mu^2)}{a^2 h^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2} \left[ \frac{\partial^6 w}{a^6 \partial \varphi^6} + \mu \frac{\partial^6 w}{a^2 \partial x^4 \partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^6 w}{a^4 \partial x^2 \partial \varphi^4} \right] = \frac{1}{D} \nabla^4 Z; \quad (5)$$

$$\nabla^4 u = \frac{\mu}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{a^3 \partial x \partial \varphi^2}; \quad (6)$$

$$\nabla^4 v = \mu \frac{\partial^3 w}{a \partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{a^3 \partial \varphi^3}; \quad (7)$$

де  $D = \frac{Eh^3}{12(-\mu^2)}$  – циліндрична жорсткість оболонки.

Рішення рівняння (5) буде складатися з суми окремого розв'язку, що визначається поверхневими навантаженнями, та загального рішення однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (5). Окремий розв'язок рівняння (5), що містить тільки парні похідні  $w$ , можна здобути розкладанням прогину  $w$  та зовнішнього поверхневого навантаження  $Z$  в подвійний ряд Фур'є:

$$w = \sum_m \sum_n \left( w_{1mn} \cos m\varphi + w_{2mn} \sin m\varphi \right) \sin \frac{\lambda_n}{a} x; \quad (8)$$

$$Z = \sum_m \sum_n \left( Z_{1mn} \cos m\varphi + Z_{2mn} \sin m\varphi \right) \sin \frac{\lambda_m}{a} x; \quad (9)$$

де  $\lambda_n = n\pi a/l, m = 0,1,2,\dots, n = 1,2,3,\dots$

Після підстановки (8) та (9) в (5), знаходимо зв'язок між коефіцієнтами розкладання  $w_{jmn}$  та  $Z_{jmn}$  у вигляді

$$w_{jmn} = \frac{a^4 (n^2 + \lambda_n^2) Z_{jmn}}{D \left\{ (n^2 + \lambda_n^2) + \frac{12(-\mu^2) \lambda_n^4 a^2}{h^2} - 2m^2 [n^4 + (1 + \mu) \lambda_n^4 + (1 + \mu) m^2 \lambda_n^2] \right\}}. \quad (10)$$

Введемо позначення  $\alpha = l/a$ ,  $\gamma = a/h$ ,

$$\varphi_{mn} = \frac{(n^2 + \lambda_n^2)}{\alpha^4 \left\{ (n^2 + \lambda_n^2) + 12(-\mu^2) \lambda_n^4 \gamma^2 - 2m^2 [n^4 + (1 + \mu) \lambda_n^4 + (1 + \mu) m^2 \lambda_n^2] \right\}}, \text{ тоді (10) має вигляд}$$

$$w_{jmn} = \frac{l^4}{D} \varphi_{mn} Z_{jmn} \quad (j=1,2). \quad (11)$$

Після підстановки (11) в (8) маємо

$$w = \frac{l^4}{D} \sum_m \sum_n \varphi_{mn} [u_{1mn} \cos m\varphi + z_{2mn} \sin m\varphi] \sin \frac{\lambda_n}{a} x. \quad (12)$$

Переміщення  $u$  та  $v$  можуть бути визначені через  $w_{jmn}$ , якщо покласти

$$u = \sum_m \sum_n [u_{1mn} \cos m\varphi + u_{2mn} \sin m\varphi] \cos \frac{\lambda_n}{a} x; \quad (13)$$

$$v = \sum_m \sum_n [v_{1mn} \sin m\varphi + v_{2mn} \cos m\varphi] \sin \frac{\lambda_n}{a} x \quad (14)$$

та підставити ці вирази в рівняння (6), (7). Це дає

$$u_{jmn} = \frac{\lambda_n (n^2 - \mu \lambda_n^2)}{(n^2 + \lambda_n^2)} w_{jmn}, \quad (15)$$

$$v_{jmn} = \frac{[1 + \mu] \lambda_n^2 + m^2}{(n^2 + \lambda_n^2)} w_{jmn}. \quad (16)$$

З урахуванням (15), (16) та (11) здобуємо

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{l^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{\lambda_n (n^2 - \mu \lambda_n^2)}{(n^2 + \lambda_n^2)} \varphi_{mn} [u_{1mn} \cos m\varphi + z_{2mn} \sin m\varphi] \cos \frac{\lambda_n}{a} x; \\ v &= \frac{l^4}{D} \sum_m \sum_n \frac{m [1 + \mu] \lambda_n^2}{(n^2 + \lambda_n^2)} \varphi_{mn} [v_{1mn} \sin m\varphi + z_{2mn} \cos m\varphi] \sin \frac{\lambda_n}{a} x. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Рівняння (12.58) роботи [10] дають вираз для згинаючих моментів та мембранних зусиль (одиничних)

$$M_x = -\frac{D}{a^2} \left[ a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]; \quad M_\varphi = -\frac{D}{a^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right];$$

$$N_x = -\frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left( \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{a} \right) \right]; \quad N_\varphi = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{a} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

За допомогою (12) та (17) маємо

$$M_x = \alpha^2 l^2 \sum_m \sum_n \varphi_{mn} \left[ C_{1mn} \cos m\varphi + Z_{2mn} \sin m\varphi \right] \left( n^2 + \lambda_n^2 \right) \sin \frac{\lambda_n x}{a}; \quad (18)$$

$$M_\varphi = \alpha^2 l^2 \sum_m \sum_n \varphi_{mn} \left[ C_{1mn} \cos m\varphi + Z_{2mn} \sin m\varphi \right] \left( n^2 + \mu \lambda_n^2 \right) \sin \frac{\lambda_n x}{a}; \quad (19)$$

$$N_x = -12 \left( -\mu^2 \right) \alpha^4 \gamma^2 a \sum_m \sum_n \frac{m^2 \lambda_n^2}{\left( n^2 + \lambda_n^2 \right)^2} \varphi_{mn} \left[ C_{1mn} \cos m\varphi + Z_{2mn} \sin m\varphi \right] \sin \frac{\lambda_n x}{a}; \quad (20)$$

$$N_\varphi = -12 \left( -\mu^2 \right) \alpha^4 \gamma^2 a \sum_m \sum_n \frac{\lambda_n^4}{\left( n^2 + \lambda_n^2 \right)^2} \varphi_{mn} \left[ C_{1mn} \cos m\varphi + Z_{2mn} \sin m\varphi \right] \sin \frac{\lambda_n x}{a}. \quad (21)$$

Коефіцієнти розкладання навантаження в ряд Фур'є визначаються за допомогою формул обернення рівняння і мають вигляд:

$$Z_{1mn} = \frac{2\Delta}{\pi a l} \iint_{\sigma} Z \cos m\varphi \sin \frac{\lambda_n x}{a} d\sigma; \quad (22)$$

$$Z_{2mn} = \frac{2}{\pi a l} \iint_{\sigma} Z \sin m\varphi \sin \frac{\lambda_n x}{a} d\sigma, \quad (23)$$

де  $\sigma$  – область навантаження оболонки,  $\Delta = 1/2$  для  $m=0$  та  $\Delta=1$  для  $m \geq 1$ . Після загального рішення системи рівнянь (5)...(7), (вважаючи  $\xi = x/a$ ) отримуємо дійсні вирази для компонент напружено-деформованого стану оболонки, у вигляді (індекс  $m$  опущено):

$$F_1 = \left[ C_1 \cos \beta_{1\xi} + C_2 \sin \beta_{1\xi} \right] e^{\gamma_{1\xi}} + \left[ C_3 \cos \beta_{1\xi} + C_4 \sin \beta_{1\xi} \right] e^{-\gamma_{1\xi}} + \left[ C_5 \cos \beta_{2\xi} + C_6 \sin \beta_{2\xi} \right] e^{\gamma_{2\xi}} + \left[ C_7 \cos \beta_{2\xi} + C_8 \sin \beta_{2\xi} \right] e^{-\gamma_{2\xi}} \cos m\varphi \quad (24)$$

$$w_1 = \left\{ \left[ C_1 \left( \varphi_{w1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} + q_{w1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} \right) + C_2 \left( \varphi_{w1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} - q_{w1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} \right) \right] e^{\gamma_{1\xi}} + \left[ C_3 \left( \varphi_{w1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} - q_{w1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} \right) + C_4 \left( \varphi_{w1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} + q_{w1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} \right) \right] e^{-\gamma_{1\xi}} + \left[ C_5 \left( \varphi_{w1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} + q_{w1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} \right) + C_6 \left( \varphi_{w1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} - q_{w1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} \right) \right] e^{\gamma_{2\xi}} + \left[ C_7 \left( \varphi_{w1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} - q_{w1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} \right) + C_8 \left( \varphi_{w1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} + q_{w1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} \right) \right] e^{-\gamma_{2\xi}} \right\} \cos m\varphi \quad (25)$$

$$v_1 = \left\{ \left[ C_1 \left( \varphi_{v1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} + q_{v1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} \right) + C_2 \left( \varphi_{v1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} - q_{v1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} \right) \right] e^{\gamma_{1\xi}} + \left[ C_3 \left( \varphi_{v1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} - q_{v1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} \right) + C_4 \left( \varphi_{v1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} + q_{v1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} \right) \right] e^{-\gamma_{1\xi}} + \left[ C_5 \left( \varphi_{v1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} + q_{v1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} \right) + C_6 \left( \varphi_{v1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} - q_{v1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} \right) \right] e^{\gamma_{2\xi}} + \left[ C_7 \left( \varphi_{v1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} - q_{v1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} \right) + C_8 \left( \varphi_{v1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} + q_{v1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} \right) \right] e^{-\gamma_{2\xi}} \right\} \sin m\varphi \quad (26)$$

Тут  $C_j$  – нові довільні константи. Формули написано тільки для  $F_1, w_1, v_1$ ; інші формули ідентичні. Зауважимо, що множник  $\cos m\varphi$  повинен ставитись при величинах

$$u_1, w_1, N_{x1}, N_{\varphi 1}, M_{x1}, M_{\varphi 1}, Q_{x1}. \quad (27)$$

Множник  $\sin m\varphi$  – при величинах

$$v_1, N_{x\varphi 1}, M_{x\varphi 1}, M_{\varphi x 1}, Q_{\varphi 1}. \quad (28)$$

За формулами виду (26) будуються вирази для величин

$$w_1, N_{x1}, N_{\varphi 1}, M_{x1}, M_{\varphi 1}, Q_{\varphi 1}. \quad (29)$$

Формулами виду (24)–(26) визначається тільки частина однорідного напружено-деформованого стану. Інша частина може бути отримана, якщо в (24)–(26) множники  $\cos m\varphi$  та  $\sin m\varphi$  поміняти місцями: ставити  $\sin m\varphi$  при величинах (28) та  $\cos m\varphi$  при величинах (29). Це пов'язано з тим, що формулами виду (24)–(26) визначається симетричний (відносно твірної  $\varphi = 0$ ) напружено-деформований стан кругової циліндричної оболонки, а взаємна заміна множників  $\cos m\varphi$  та  $\sin m\varphi$  відповідає переходу до зворотно-симетричного напружено-деформованого стану.

Вище мова йшла про інтеграли однорідних рівнянь. Це означає, що поверхневі сили відсутні і формулами виду (26) визначається стан, що виникає в результаті впливу на оболонку деякої системи крайових зусиль, прикладених до торця замкненої оболонки. Будемо вважати, що формулами (26) задається напружено-деформований стан оболонки, викликаний зусиллями, прикладеними до краю  $\xi = 0$  та оболонка має настільки велику довжину, що її можна вважати напівбезконечною. Аналогічний підхід застосовуємо до жорсткого підкріплюючого кільця, що встановлюємо. Тоді прогини, переміщення, зусилля, моменти на нескінченно віддаленому кінці дорівнюють 0 та, як наслідок,  $C_1 = C_2 = C_7 = C_8 = 0$ . Тоді (26) буде мати вигляд (нумерація  $C_j$  змінена):

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_m \{ [C_1 \mathfrak{P}_{w1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} - q_{w1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi}] + C_2 [\mathfrak{P}_{w1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} + q_{w1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi}] \} e^{-\gamma_1 \xi} + \\
 &+ \{ [C_3 \mathfrak{P}_{w1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} + q_{w1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi}] + C_4 [\mathfrak{P}_{w1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} - q_{w1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi}] \} e^{\gamma_2 \xi} \} \cos m\varphi, \\
 F &= [C_1 \cos \beta_{1\xi} + C_2 \sin \beta_{1\xi}] e^{-\gamma_1 \xi} + [C_3 \cos \beta_{2\xi} + C_4 \sin \beta_{2\xi}] e^{\gamma_2 \xi} \} \cos m\varphi, \\
 v &= \{ [C_1 \mathfrak{P}_{v1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi} - q_{v1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi}] + C_2 [\mathfrak{P}_{v1}^{(1)} \sin \beta_{1\xi} + q_{v1}^{(1)} \cos \beta_{1\xi}] \} e^{-\gamma_1 \xi} + \\
 &+ \{ [C_3 \mathfrak{P}_{v1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi} + q_{v1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi}] + C_4 [\mathfrak{P}_{v1}^{(2)} \sin \beta_{2\xi} - q_{v1}^{(2)} \cos \beta_{2\xi}] \} e^{\gamma_2 \xi} \} \sin m\varphi.
 \end{aligned}$$

Граничні умови можна вважати як аналітичний вираз того факту, що кожен край оболонки з'єднано з прилеглою до нього конструкцією, яку називають опорою (вільний край при цьому вважають прилеглим до опори нульової жорсткості). Характер з'єднання краю з опорою можна врахувати, якщо надати останній деякі умовні властивості. Наприклад, для шарнірного з'єднання необхідно вважати, що опора не має жорсткості по відношенню до повороту відносно осі шарніру і т.д.

У реальних конструкціях зустрічаються опори, які мають дуже різноманітні пружні властивості. Тому розрахунки оболонки можуть полягати в сумісному інтегруванні диференціальних рівнянь оболонки та диференціальних рівнянь опори (або опор). Останню можна вважати як деяке пружне тіло, наприклад, як криволінійний стержень, і вимагати дотримання умов зчленування оболонки з опорою (у тому числі і з встановленими проміжними підкріплюючими елементами).

При розрахунках приймають деякі спрощуючі припущення відносно пружних властивостей опор та підкріплюючих елементів. Зокрема, якщо жорсткість опори відносно будь-якого узагальненого переміщення невелика порівняно з жорсткістю стінки (краю) оболонки, то часто жорсткість опори вважають рівною нулю. Якщо вона достатньо велика

(як у випадку встановлення жорстких діафрагм), то її вважають рівній нескінченності. Граничні умови, що відповідають такому припущенню, називають ідеалізованими граничними умовами. Припускають, що в тій самій точці жорсткість опори може дорівнювати нулю в одному напрямку і нескінченності – в іншому.

Нехай край, який вивчається, жорстко защемлений, тобто опора така, що напрямок будь-якого узагальненого переміщення можна вважати як напрямок її нескінченної жорсткості. Тоді, вочевидь, необхідні умови, які описують такі властивості опори, будуть полягати в чотирьох рівностях:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при } \xi = 0. \quad (30)$$

При цьому буде виконуватись умова єдиного рішення (формула 5.33, 5.34 в [3]):

$$\int_0^{2\pi} \left[ N_x u + \left( N_{x\varphi} - \frac{M_{x\varphi}}{a} \right) v + \left( Q_x + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} \right) w + M_x \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] a d\varphi \leq 0,$$

тому що в ньому ліва частина рівності обертається в нуль. Це означає, що рішення рівнянь теорії оболонок, що підкоряється граничним умовам (30), буде єдиним.

Роздивимося випадок, коли в напрямку усіх узагальнених переміщень опора має нульову жорсткість (вільний край). Зі структури умови єдиного рішення витікає, що для його виконання досить чотирьох рівностей:

$$N_x = 0; \quad M_x = 0; \quad S_x = N_{x\varphi} - \frac{M_{x\varphi}}{a} = 0; \quad T_x = Q_x + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} = 0.$$

Під  $S_x$  та  $T_x$  розуміють приведену мембранну та приведену перерізуючу сили відповідно.

Загалом, приймається, що при накладанні граничних умов, необхідно оперувати не з дійсними, а з приведеними крайовими умовами (зусиллями).

## Висновки

1. Описано напружено-деформований стан, що виникає в місці встановлення підкріплюючих кілець, так званий крайовий ефект.
2. Визначено залежності для обчислення компонент напружено-деформованого стану.
3. Отримано рівняння для обчислення переміщень, моментів та мембранних зусиль, що виникають в оболонці, для випадку радіального навантаження.
4. При визначенні переміщень, моментів та мембранних зусиль, що виникають в оболонці, враховано характер з'єднання краю оболонки з опорою.
5. Враховано силу тертя між канатом та поверхнею барабана, тобто навантаження вважаємо змінним по колу та довжині оболонки.
6. Враховано наявність підкріплюючого кільця.

## Список використаних джерел:



1. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки / А. С. Вольмир. – М. : Гостехиздат, 1948. – 396 с.
2. Гаркуша Н. Г. Экспериментальное исследование действительных усилий в шахтных подъемных канатах / Н. Г. Гаркуша, Н. А. Черныш, Л. В. Колосов [и др.] // Стальные канаты : сб. науч. тр. – К. : Техника, 1967. – № 4. – С. 26–29.
3. Давыдов Б. Л. Применение теории балок, лежащих на упругом основании, к расчету барабанов грузоподъемных машин / Б. Л. Давыдов // Вестник инженеров и техников. – М., 1949. – 300 с.
4. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем / А. Н. Динник. – М. : ОНТИ, 1935. – 183 с.
5. Донелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Донелл. – М. : Наука, 1982. – 568 с.
6. Жулиев А. Л. Устойчивость барабанов шахтных подъемных машин / А. Л. Жулиев // Гірнична електромеханіка та автоматика : наук.-техн. зб., присвячений пам'яті професора В. О. Мурзіна. – Дніпропетровськ : Національна гірнична академія України, 1999. – Спец. вип. 2(61). – С. 77–80.
7. Ковальский Б. С. Напряжение в стенке канатного барабана / Б. С. Ковальский // Научные записки ХАИ. – Х., 1940. – Т.4, Вып. 10. – С. 63–72.
8. Ковальский Б. С. Барабаны грузоподъемных машин / Б. С. Ковальский, С. В. Кожин. – Х. : ХВКИУ, 1969. – 164 с.
9. Моссаковский В. И. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев // Исследования по упругости и пластичности. – Л. : Изд-во ЛГУ. – 1963. – Вып. 2.
10. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля : в 4 т. / П. Ф. Папкович. – Л. : Судостроение, 1962–1963. – Т. 4: Устойчивость стержней, перекрытий и пластин. – 1963. – 552 с.
11. Писаренко Г. С. Уравнение и краевые задачи теории пластичности и ползучести : справ. пособие / Г. С. Писаренко, И. С. Можаровский. – К. : Наукова думка, 1981. – 496 с.
12. Писаренко Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – К. : Наукова думка, 1976. – 416 с.
13. Тимошенко С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко, ред. Э. И. Григолюка. – К. : Наукова думка. – 1972. – 508 с.
14. Nash W.A. Buckling of Multi – day Ringrein for tic Pressure / W. A. Nash // Journal Applied Mech. – 1953. – Vol. 20, no.4, Dec. – P. 469–474.

**Нестеренко В.В.** «Визначення компонент напружено-деформованого стану барабана, що має підкріплюючі кільця».

Робота присвячена визначенню компонент напружено-деформованого стану барабана піднімально-транспортних машин, який має підкріплювальні кільця та навантажений неповним числом витків канату. При цьому в розрахунках були враховані сили тертя між канатом і барабаном, пружні властивості канату та барабана, площа перерізу та місця установки кілець

жорсткості. За допомогою метода кінцевих елементів визначені напруження в циліндричній оболонці барабана та деформації.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, підкріплюючі кільця, концентрація напружень, деформації, оболонка, барабан, стійкість, прогин.

**Нестеренко В.В.** «Определение компонент напряженно-деформированного состояния барабана, имеющего подкрепляющие кольца».

Работа посвящена определению компонент напряженно-деформированного состояния барабана подъемно-транспортных машин, имеющего подкрепляющие кольца, и нагруженного неполным числом витков каната. При этом в расчетах были учтены сила трения между канатом и барабаном, упругие свойства каната и барабана, площадь сечения и места установки колец жесткости. При помощи метода конечных элементов определены напряжения в цилиндрической оболочке барабана и деформации.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, подкрепляющие кольца, концентрация напряжений, деформации, оболочка, барабан, стойкость, прогиб.

**Nesterenko V. V.** “Determination of constituents of the tensely-deformed state of drum, having supporting rings”.

Work is sanctified to determination of constituents of the tensely-deformed state of drum of lifting-transport machines, having supporting rings, and loaded with the incomplete number of coils of rope. Thus in calculations were taken into account force of friction between a rope and drum, resilient properties of rope and drum, area of section and place of setting of rings of inflexibility. Through the method of eventual elements tensions are certain in the cylindrical shell of drum and deformation.

**Key words:** mode of deformation, reinforcing ring, stress concentration, deformations, methods, means, case, drum, stability, deflection.

Стаття надійшла до редакції 29 квітня 2013 р.