

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КАНАТАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕЙ

1. Анализ публикаций по теме исследования

Вопрос об определении усилий в подъемных канатах, о постановке методов решения тесно связан с задачей о продольных колебаниях упругих стержней и стальных канатов. В работах [1, 2] ограничились шахтными канатами постоянной длины и постоянного сечения. В статье [1] рассматриваются различные специальные условия: сообщение начальной скорости только подвешенному к канату грузу, внезапная нагрузка нижнего конца каната, внезапная остановка верхнего конца каната, и, наконец, равнопеременное движение верхнего конца каната. Заметим, что в первых трех случаях вдоль каната будет распространяться сильный разрыв непрерывности. Рассматриваются канаты постоянного сечения, но переменной длины, учитывая массу и вес каната при больших высотах подъема. Металлической канат как гибкий элемент, способный нести высшую растягивающую нагрузку, обширно применяется в современной подъемно-транспортной технике. Работа каната и связанных с ним устройств почти во всем находится в зависимости от корректности его конструктивного использования согласно с критериями эксплуатации и точности расчета на упругость и крепкость. В силовом расчете каната вырисовываются две органически связанные, но очень разнящиеся по собственной постановке и способам исследовательских работ задачи. Появляется ряд вопросов, связанных с определением общих усилий в канате как едином агрегате под действием наружных воздействий статического либо динамического усилий. Наружная форма железного каната дает подсказку в данном случае идею его расчета как гибкой нити. Потому такие задачки решаются интерпретацией каната некой эквивалентной по наружным свойствам нитью и в общем могут быть рассчитаны с помощью динамики движения продольных колебаний, так как крутильные колебания будут незначительными для шахтных подъемных систем.

2. Постановка проблемы

Данная статья посвящена исследованию динамического поля перемещений и напряжений в стальных канатах переменной длины шахтных подъемных механизмах; канаты являются уравнивающими, и главный канат переносит сосредоточенное напряжение, которое до начала движения системы находилось на нижнем конце главного каната [3]. Но задачи наружной механики каната еще не определяют фактического его напряженного состояния. Для этого нужно иметь сведения о рассредоточении общих усилий между отдельными элементами в канате. Решение этого вопроса просит исследования силового взаимодействия отдельных частей в канате и построения таким образом математической

модели перемещения волновых процессов в каждый момент времени как аналитическую функцию, а не дискретной разницей.

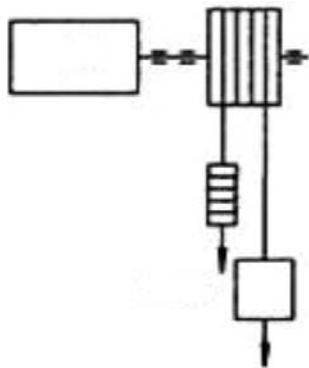


Рис. 1 – Кинематическая схема

В настоящее время на шахтах и рудниках эксплуатируется большое число подъемных установок, кинематические схемы которых могут быть представлены в следующем виде (рис. 1): кинематическая схема подъемной установки со шкивом трения и противовесом, однодвигательная.

Из оценки динамических усилий в идеально упругих нитях переменных длин следует, что только при подъеме нитей без концевых грузов при неинтегрируемых граничных условиях усилия в них не возрастают. Во всех остальных случаях усилия при подъеме возрастают (обратно пропорционально той или иной степени из длины нити) [4]. Однако на практике при умеренных скоростях подъема это явление не наблюдается ввиду того, что наряду с возрастанием амплитуд динамических усилий вследствие уменьшения длины происходит одновременное уменьшение амплитуд их колебаний.

3. Математическая модель динамики шахтной канатной установки

В области $0 < x < l + v(t)$, $t > 0$, найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где a – скорость звука в стальном канате;
удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h(x,t)u \right) \right|_{x=l+v(t)} = \theta(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

В данной задаче рассматривается интервал, имеющий при $t = 0$ длину l , и при $t > 0$ правый конец этого интервала (точка соприкосновения каната с барабаном) движется по закону $x = l + v(t)$, причем $v(0) = 0$.

Решение задачи ищем в стандартном виде

$$u(x,t) = \chi(x - at) + \chi(x + at).$$

Выполняется условие не вырождения среды

$$l + v(t) > 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

Так, как нижний конец каната в относительной системе координат находится в состоянии покоя, то

$$u(x,t) = \chi(x + at) \quad (5)$$

Используем модифицированный метод продолжения для области с подвижной границей, продолжим функцию $\theta(t)$ на всю ось t :

$$\tilde{\theta}(t) = \begin{cases} \theta(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

и подставляя форму решения (5) в продолжение (6) на всю ось t второе краевое условие (3), с учетом условия (4), получим

$$\chi'(l+v(t)+at) + h(l+v(t),t) \cdot \chi(l+v(t)+at) = \tilde{\theta}(t). \quad (7)$$

Введем преобразование независимой переменной в уравнение (7)

$$g(t) = l + v(t) + at. \quad (8)$$

Если уравнение (8) неразрешимо относительно t , то рассматриваемая задача не имеет решения. То есть, остается рассмотреть лишь случай разрешимости уравнения (8) относительно t . Функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$.

Должно выполняться условие

$$|v'| < a, \quad t > 0, \quad (9)$$

где a – скорость звука в стальном канате.

Обратная к (8) функция $t_0(g)$ существует тогда и только тогда, когда функция $v(t)+at$ является строго монотонной. И благодаря условию (9), функция $t_0(g)$ является строго-монотонно возрастающей и непрерывно дифференцируемой. Таким образом, продолженная на всю ось g функция $t_0(g)$ обладает следующими свойствами:

$$t_0(g) : \begin{cases} > 0, & g > l, \\ = 0, & g = l, \\ < 0, & g < l. \end{cases} \quad (10)$$

Учитывая свойства (10), уравнение (7) можно представить в виде

$$\chi'(g) + H(g)\chi(g) = \tilde{\theta}(t_0(g)), \quad (11)$$

тогда общее решение уравнения (1) может быть представлено в форме

$$\chi(g) = \frac{C + \int_l^g \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy}{E(g)}, \quad (12)$$

где $H(g) = h(l+v(t_0(g)), t_0(g))$; $E(g) = e^{\int H(g)dg}$, C – произвольная константа.

Решение задачи для начального интервала времени:

$$u(x,t) = \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy, \quad (13)$$

так как из первого начального условия следует, что $C = 0$.

Учитывая, что $E'(g) = H(g)E(g)$, для функции (13) имеем

$$u_x(x,t) + h(x,t)u(x,t) = -H(x+at) \cdot \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy + \tilde{\theta}(t_0(x+at)) +$$

$$+ \frac{h(x,t)}{E(x+at)} \cdot \int_l^{x+at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy.$$

Функция (13) удовлетворяет начальным условиям, второму краевому условию (3), а также уравнению (1) при $t > 0$; но первому краевому условию функция (13) удовлетворяет только при $t < \frac{l}{a}$. Поэтому, модифицированным методом продолжения решается

дополнительная задача: в области $0 < x < l + v(t)$, $t > \frac{l}{a}$, найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\rho(x, \frac{l}{a}) = 0, \quad \rho_t(x, \frac{l}{a}) = 0, \quad 0 < x < l + \rho(\frac{l}{a}) \quad (14)$$

и краевому условию

$$\begin{aligned} \rho_x(0,t) + h(0,t) \cdot \rho(0,t) &= (H(a \cdot t) - h(0,t)) \cdot \frac{1}{E(a \cdot t)} \int_l^{at} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y) - \tilde{\theta}(t_0(a \cdot t)) = \\ &= \varphi_0(t), \quad t > \frac{l}{a} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varphi_0(t) = 0 \quad \text{при } t < \frac{l}{a}.$$

Из начальных условий (14) следует, что

$$\rho(x,t) = -E_1(at-x) \cdot \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}.$$

Тогда решением основной задачи будет функция

$$\psi(x,t) = u(x,t) + \rho(x,t) = \frac{1}{E(x+at)} \int_l^{at+x} \tilde{\theta}(t_0(y))E(y)dy - E_1(at-x) \int_l^{at-x} \varphi_0\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{E_1(y)}.$$

Применительно к наматыванию каната на барабан эту задачу можно математически интерпретировать следующим образом. В области:

$0 < x < l + v(t)$, $t > 0$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Cu(x,t) = 0, \quad (16)$$

где A, B, C, D – коэффициенты телеграфного уравнения;

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0, \quad x > 0 \quad (17)$$

и краевым условиям

$$u(l+v(t),t) = \mu(t); \quad u(0,t) = 0, \quad t > 0. \quad (18)$$

Функция $v(t)$ описывает изменение длины каната на барабане. Точка свисающей части каната с барабаном имеет координату $x = l + v(t)$. Упругое перемещение в точке $x = 0$ $u(0,t) = 0$.

Введем преобразование переменной t :

$$\tau = t + \frac{v(t) + l}{a}, \quad (19)$$

и учтем, что $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$, тогда $\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{v'(t)}{a} > 0$.

Продолжим функцию $v(t)$ на всю ось t , потребовав выполнения на всей оси t условия (19) и существования производной этого продолжения на всей оси t . Обозначим это продолжение через $\tilde{v}(t)$. Тогда на всей оси t будет определена функция

$$K(t) = \begin{cases} v(t), & t > 0; \\ \tilde{v}(t), & t < 0. \end{cases}$$

Пусть $T(t)$ – продолженная на всю ось t функция:

$$T(t) = t + \frac{K(t) + l}{a}.$$

Функция $T(t)$ является строго монотонной при всех t и для нее существует обратная функция $Z(T)$:

$$Z(t) = \begin{cases} z(\tau) > 0, & T > \frac{l}{a}; \\ 0, & T = \frac{l}{a}; \\ < 0, & T < \frac{l}{a}. \end{cases}$$

Так как в краевом условии (18) функция $\mu(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t :

$$M(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Учитывая, что волны в среде возбуждаются на правом конце отрезка и распространяются в среду в направлении отрицательных x , решение задачи отыскивается в виде функции:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2M_{2n}\left(t + \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{(Da+B)x}{2}} + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^a \left(\frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[2e^{\frac{(Da-B)x}{2}} \left(-M_{2n+1}\left(t - \frac{x}{a}\right) + M_{2n}\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^a \left(\frac{B}{2} J_0(\sigma) - c_1 \frac{x}{\sigma} J_1(\sigma) \right) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} (M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)) d\eta \right] \quad (20)$$

где $J_0(\sigma), J_1(\sigma)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно;

$$\sigma = \sqrt{c_1(x^2 - a^2(t-\eta)^2)}; \quad c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}.$$

Принимая во внимание, что первое краевое условие (18) продолжается на всю ось t :
 $u(l + v(t), t) = M(t)$.

4. Практическая реализация результатов моделирования

Специфика работы, условия, в которых осуществляются транспортные операции по перемещению грузов, людей, механизмов, запасного и ремонтного оборудования, наличие большого числа ШПМ, работающих в разных климатических зонах и осуществляющих подъем (опускание) как с глубины нескольких сот метров, так и с глубин около двух километров способствовали выделению электропривода ШПМ в отдельное направление, которое до настоящего времени прошло несколько этапов развития.

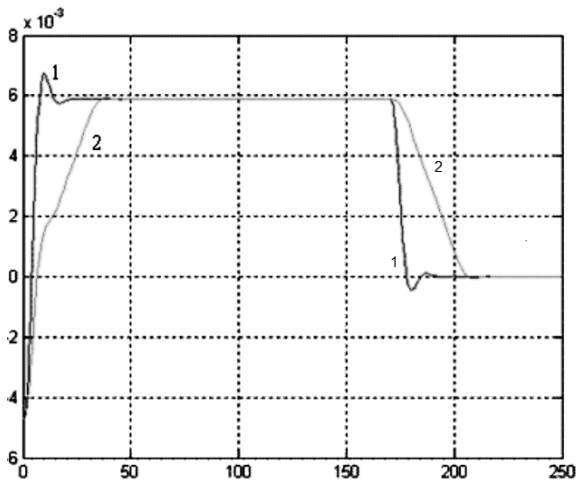


Рис. 2. – Переходной процесс

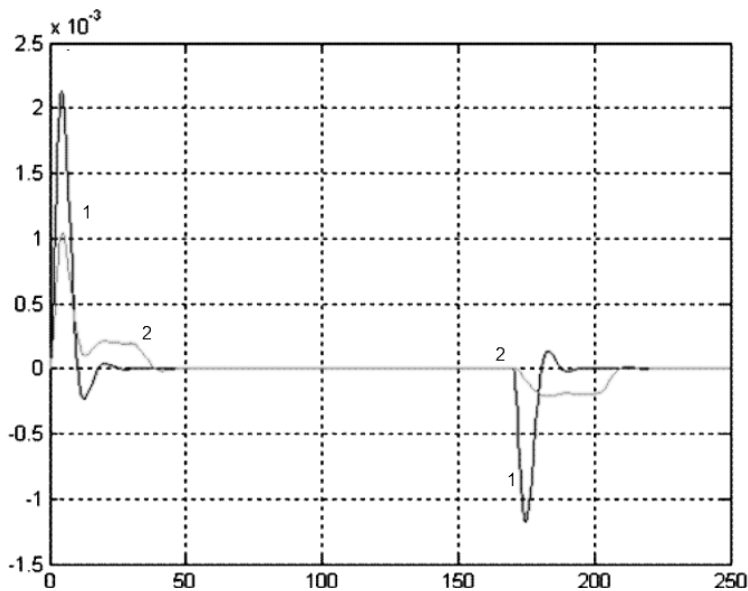


Рис. 3 – Рывок барабана при нагрузке на головной канат

Учитывая полученное решение для функции (20), найдем для каждого момента времени работы подъемной канатной установки соответствующие показатели переходных процессов без нагрузки, в точке касания каната с барабаном, и зафиксированной точке свисающей части каната (рис. 2).

В итоге, благодаря применению экспериментальных промышленных данных и вычислению полей перемещений и напряжений, мы можем спрогнозировать поведения рывка при пуске нагруженной системы на главном канате (рис. 3).

Выводы

Проведены исследования динамической задачи, связанной с продольными колебаниями стальных канатов шахтных систем. Сформулирована задача о динамике подъемной установки с точки зрения напряжений в сечениях главных стальных

канатов (упругого стержня) во времени. Установлены закономерности влияния характера отраженных волн от подвижного и неподвижного концов упругой нити, необходимые для оптимальной работы подъемной системы.

Список использованных источников:

1. Селиванов В. Механика разрушения деформируемого тела / В. Селиванов. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
2. Бежок В. Шахтный подъем / В. Бежок, В. Дворников. – Донецк: ООО “Юго-Восток”, 2007.
3. Лексина С. В. Система волновых уравнений с граничным управлением на двух концах / С. В. Бежок, А. А. Андреев // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 8/1(67). – С. 21–34.
4. Смоланов С. Н. Аварийно-спасательная передвижная установка / С. Н. Смоланов, О. А. Колесов // Уголь Украины. – 2008. – № 1. – С. 43–45.
5. Ильин С. Р. Влияние параметров скорости подъема и эксцентриситета груза на динамику системы “сосуд-армировка” шахтных стволов / С. Р. Ильин // Сб. науч. тр. ИГТМ НАН Украины. – 2012. – Вып. 98. – С. 322–348.

Зеленская Т.С., Данилина Г.В. «Переходные процессы в канатах с переменной верхней границей».

Построена математическая модель продольных колебаний, возникающих в главных канатах грузоподъемных механизмов, отображающая поле динамических перемещений и напряжений в произвольном сечении каната, который наматывается на барабан. Рассмотрена постановка краевой задачи для стального каната постоянного сечения.

Ключевые слова: волновое и телеграфное уравнения, область с подвижной границей.

Зеленська Т.С., Даниліна Г.В. «Перехідні процеси в канатах зі змінною верхньою границею».

Побудовано математичну модель поздовжніх коливань, які виникають в головних канатах вантажопідйомних механізмів, що відображають поле динамічних переміщень та напружень в довільному перерізі каната, котрий намотується на барабан. Розглянуто постановку крайової задачі для стального каната постійного перерізу.

Ключові слова: волнове та телеграфне рівняння, область з рухомою границею.

Zelenskaya T.S., Danilina G. V. “Transient processes in the ropes with a variable upper boundary”.

The mathematical model of longitudinal vibrations arising in the main ropes for load-lifting mechanisms, showing the dynamic field of displacements and stresses in the random section of the rope, which is wound on a drum. A formulation of the boundary value problem for steel rope with a constant cross section.

Key words: wave and telegraph equations, area with moving boundary.

Стаття надійшла до редакції 10 жовтня 2013 р.