УДК 539.3:517.2

ДОСЛІДЖЕННЯ КОРЕКТНОСТІ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ПРИ ЗМІННИХ ПРОЦЕСАХ В ВЕРТИКАЛЬНИХ СОСУДАХ

©Зеленська Т. С, Сясєв А. В.

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара

Інформація про авторів:

Зеленська Тетяна Сергіївна: ORCID: 0000-0001-8434-5329; tanyazese@yandex.ru; аспірант кафедри диференціальних рівнянь; Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара; пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна.

Сясєв Андрій Валеріойвич: ORCID: 0000-0002-0003-1857; savmmf@yandex.ru; кандидат фізико-математичних наук; доцент кафедри диференціальних рівнянь; Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара; пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна.

Метою роботи є порівняння динамічних показників хвильових процесів у поздовжніх переміщеннях канатів за допомогою виробничих та чисельних розрахунків, а також отримання рівняння стану каната як на шківі намотування так і поза ним.

Задача про пружні переміщення у вертикальних сосудах, була зведена до крайової задачі зі змінною структурою для гіперболічного рівняння, причому границя між різними структурами є рухомою. Аналітичний розв'язок та подальша його чисельна реалізація отримана в квадратурах у вигляді поздовжніх хвиль, що розповсюджуються в канаті.

Аналіз розв'язку задачі показує, що розподіл контактних напружень на поверхні канату (на сталій відстані від області локалізації зовнішнього навантаження) практично не залежить від закону розподілу нормального навантаження в області локалізації, якщо тільки її ширина менша від товщини канату, що намотаний на шків. Значний вплив на динамічні напруження у вертикальних канатах мають поздовжні переміщення, що відображаються від рухомої області.

Ключові слова: динамічне напруження; гіперболічне рівняння; локальні навантаження; канат; хвильові процеси.

Зеленская Т. С., Сясев А. В. "Исследование корректности приближенного решения смешанной задачи для гиперболических уравнений при переменных процессах в вертикальных сосудах".

Целью работы является сравнение динамических показателей волновых процессов в продольных перемещениях канатов с помощью производственных и численных расчетов, а также получения уравнения состояния каната, как на шкиве намотки, так и вне шкива.

Задача об упругих перемещениях в вертикальных сосудах, была сведена к краевой задаче с переменной структурой для гиперболического уравнения, причем граница между различными структурами является подвижной. Аналитическое решение и дальнейшая его численная реализация получена в квадратурах в виде продольных волн, распространяющихся в канате.

Анализ решения задачи показывает, что распределение контактных напряжений на поверхности каната (на постоянном расстоянии от области локализации внешней нагрузки), практически не зависит от закона распределения нормальной нагрузки в области локализации, если только ее ширина меньше толщины каната, намотанной на шкив. Значительное влияние на динамические напряжения в вертикальных канатах имеют продольные перемещения, отражающиеся от движущейся области.

Ключевые слова: динамическое напряжение; гиперболическое уравнение; локальные нагрузки; канат; волновые процессы.

Zelenskaya T., Siasiev A. "Investigation of the accuracy of the approximate solution of the mixed problem for hyperbolic equations on metabolic processes in vertical vessels".

The aim of this work is to compare the dynamic performance of wave processes in longitudinal movement of the rope through the production and numerical calculations, and obtain the equation of state of the rope on the pulley winding and outside of the pulley.

The problem of elastic displacements in vertical vessels, was reduced to a boundary value problem with variable structure for hyperbolic equations, and the boundary between the different structures is movable. Analytical solution and its numerical realization is obtained in quadratures in the form of longitudinal waves propagating in the rope.

Analysis of the solution of the problem shows that the distribution of the contact stresses on the surface of the rope (at a constant distance from the region of localization of the external load) practically does not depend on the distribution of the normal load in the area of localization only if its width is less than the thickness of the rope wound on the pulley. A significant influence on the dynamic tension in the vertical ropes have longitudinal movement, reflected from the moving region.

Keywords: dynamic voltage; hyperbolic equation; local loads; rope; wave processes.

1. Постановка проблеми та аналіз публікацій

Розв'язки задач про дію зусиль, зосереджених вздовж вертикальних канатів та на шківах намотки підйомних шахтних та ліфтових механізмів, є основою для інтегрального подання складніших задач механіки суцільного середовища та числових методів їх розв'язування. При формулюванні задач такого типу важливим є вибір вихідних математичних моделей (навантаження форми тіла та взаємодії тіла з зовнішнім середовищем). Надмірне спрощення вихідних моделей (моделювання локальної дії зосередженими у точках зусиллями та моделювання взаємодії з середовищем, як з абсолютно твердим тілом) може призвести до невідповідності розв'язків реальному стану тіл.

Визначення напружено-деформованого стану динамічно навантажених пружних тіл (шків намотки, стальний вертикальний канат) за використання гіперболічних рівнянь ускладнюється тим, що відповідні крайові задачі є недостатньо обумовлені, і до того ж, вплив границь змінних областей впливають на характер динамічних показників. Особливість задач, пов'язаних з дослідженням напружено-деформованого стану в канатах підйомних механізмів полягає у наступному. По-перше, це велика різноманітність навантажень, що діють на канат. Тому істотне спрощення в постановці, і особливо, у вирішенні таких завдань досягається шляхом використання принципу суперпозиції з поділом основної задачі на ряд допоміжних. По-друге, – зміна довжини каната в процесі підйому або опускання вантажу, що потребує розробки методів вирішення таких завдань.

2. Основна частина. Розв'язання задачі

Розглянемо шків намотування, що перебуває під дією локального поверхневого навантаження і взаємодіє з абсолютно жорсткою основою за умов ідеального контакту (щільного прилягання стального канату до поверхні шківа). Напружено-деформований стан поверхні шківа описуємо у системі координат α_1, α_2.

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$\sigma_{ii} = 2G\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}\right),$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = G\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}\right) \quad (i, j = 1,2,3, i \neq j).$$

Шків має сталу товщину намотування $2h$ і $\mathrm{X} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : 0 < \alpha_i < l\}\,(i = 1,2)$ – його серединна поверхня. Поверхневі нормальні напруження локалізовані у квадраті $\mathrm{X}_0 = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_i - \alpha_i^0| < \varepsilon\}$ $\left(\varepsilon \leq \frac{l}{2}, i = 1,2\right)$ і описуються фінітною функцією

$$\sigma^+(\alpha_1, \alpha_2) = \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon),$$

де $$\delta(\alpha_i, \alpha_i^0, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} g\left(\frac{|\alpha_i - \alpha_i^0|}{\varepsilon}\right), & |\alpha_i - \alpha_i^0| \leq \varepsilon, \\ 0, & |\alpha_i - \alpha_i^0| > \varepsilon; \end{cases}$$

$$g(t) = 1 + \cos(\pi t).$$

Задача полягає у визначенні напружено-деформованого стану шківа. Рівняння пружних переміщень в частині каната, що розташований на шківі намотування, буде представлено одним з телеграфних рівнянь [1, 2]. Рівняння пружних переміщень в частині каната, звисаючого зі шківа, буде представлено хвильовим рівнянням, яке буде розглянуто нижче. Тобто, пружні переміщення каната в двох його різних частинах описуються різними диференціальними рівнянням у частинних похідних. В якості поділу цих двох частин каната виступає точка початкового контакту каната зі шківом.

Знайдемо наближений розв’язок сформульованої задачі про локальне навантаження на стальний канат, що намотується на шків. Розглянемо крайову задачу про рух пружних хвиль в канаті змінної довжини в області $0 < x < 2h + l$, де l – це початкова довжина звисаючої частини канату, тобто точка дотику рухається за законом $s(t)$, $s(t) < x < l$.

Поздовжні переміщення будуть описуватись хвильовим рівнянням з відповідними початково-крайовими умовами:

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u_{ji}(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x);\; u_t(x,0) = \phi(x),\, 0 < x < l + 2h; \tag{2}$$

$$u(s(t),t) = 0,\; u_x(l,t) = 0,\; t > 0. \tag{3}$$

Введемо додаткову змінну $\tilde{s} = s(t) - at$, і продовжимо функцію $s(t)$ на всю вісь t:

$$\Omega(t) = \begin{cases} s(t),\, t > 0; \\ 0, \quad t < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Тоді, продовження функції $\tilde{s}(t)$ на всю вісь t буде відповідно таким: $\tilde{S}(t) = \Omega(t) - at$, і при $t > 0$ $\tilde{S}(t) = \tilde{s}(t)$. Так, як функція $\tilde{S}(t)$ є строго монотонною, то для неї існує обернена функція $\tilde{T}(\tilde{S})$, і при $\tilde{S} \le 0$ $\tilde{T}(\tilde{S}) = \tilde{t}(\tilde{s})$. Залучаючи допоміжну функцію, отримаємо

$$\varpi(\xi) = 2l - \left(\Omega\left(\tilde{T}(\xi)\right) - a\tilde{T}(\xi)\right),$$

та розіб'ємо додатну піввісь на частинні інтервали, на кожному з яких виконується одна з нерівностей

$$s'(t) < a, \tag{5}$$

$$s'(t) \ge a. \tag{6}$$

На інтервалах $[t_{i-1}, t_i]$ виконується нерівність (5) та умова (4), а на інтервалах $[t_i, t_{i+1}]$ – нерівність (6). В силу нерівності (5) на кожному з інтервалів $[t_{i-1}, t_i]$ $i = 1,3,5,...$ буде існувати строго монотонно спадна функція і неперервно диференційовна обернена до $\tilde{s}(t)$ функція $\tilde{t}(s)$, тоді аналітичним розв'язком задачі про поздовжні переміщення на звисаючій ділянці головного стального каната буде функція

$$u(x,t) = \mathrm{M}\left(\tilde{T}(x - at)\right) + M\left(\tilde{T}(2l - (x + at))\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} (-1)^n M\left(\tilde{T}(\varpi(\varpi(...(\varpi(x - at)))))\right) + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n M(\tilde{T}(\varpi(\varpi(...(\varpi(2l - (x + at)))))),$$

де, $M(t) = u(s(t), t)$.

Під знаком суми функція $\varpi(\xi)$ використовується n раз, а число N визначає остаточну кількість відображених хвиль від рухомого кінця до повної зупинки каната.

Остання функція є аналітичним розв'язком початково-крайової задачі (1)–(3). Знайдемо чисельно контактні зусилля для вертикального сосуду (головного стального канату), і відобразимо отримані результати на рис. 1.

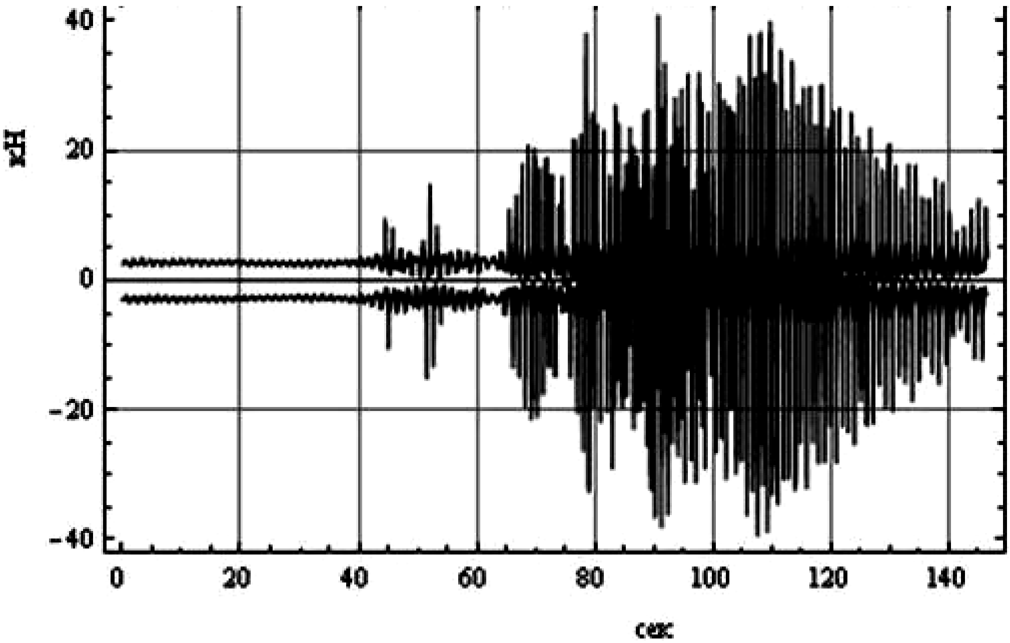

Рис. 1 – Графік зміни контактних зусиль в точці дотику каната зі шківом намотки

Отже, знайдений розв'язок крайової задачі (1)-(3) для хвильового рівняння функція $u(x,t)$ та отриманні результати розрахунків в роботах [1–2] використовуємо для чисельного розрахунку динамічних показників в підйомній установці. Порівнюємо отримані дані з виробничими показниками. З таблиці 1 бачимо, що враховуючи природу та вплив поздовжніх хвиль на напруження в канаті, маємо більш точну картину розповсюдження динамічних процесів, що дає змогу більш точно розраховувати показники переміщень та напружень для діючих виробничих установок.

Таблиця 1

Тип та Конструкція канату	Діаметр канату, мм	Розрахункова площа перерізів всіх проволок каната, мм^2	Сумарне розривне зусилля всіх проволок в канаті, Н	
			Паспортні дані	Експериментальні показники
ЛК-РО К 5х4-16К; серійний номер 780207	22,54	187,033	317 500	317 350
	24,11	214,8601	365 000	364 800
	25,57	244,615	415 500	415 400
	29,01	276,319	469 000	468 900
	32,58	309,9302	526 500	526 320
	35,51	380,4901	646 550	645 980
	37,99	460,9822	928 500	928 200
	42,14	546,3109	1 095 000	1 070 000

Висновки

За допомогою отриманих результатів обґрунтовано особливості відбиття хвиль в рухомих середовищах (трансформація однорідної хвилі в неоднорідну, взаємне «гасіння» відбитої і падаючої хвиль) і знайдено розв'язок крайової задачі для вертикальних сосудів при змінній верхній області інтегрування.

На границі межування шківа зі звисаючим канатом будуть виникати як відображені, так і заломлені хвилі, що в цілому впливають на динамічне навантаження головних канатів.

Окрім того, поставлена таким чином крайова задача може буди використана для визначення напружень в канатах підйомних пристроїв у випадках, коли інерційні навантаження є домінуючими. В результаті застосування методу відображених хвиль для розв'язку початково-крайових задач зі змінними областями, враховується поглинання відбитих поздовжніх переміщень канатом, що набігає на шків в момент зупинки підйомного пристрою.

Список використаних джерел:

1. Зеленська Т. С. Динаміка пружних переміщень поздовжніх коливань в канатах та стержнях з рухомими границями / Т. С. Зеленська, А. В. Сясєв // Машинобудування: зб. наук. пр. / Укр. інж.-пед. акад. – Харків, 2012. – Вип. 10. – С. 74–84.
2. Зеленская Т. С. Переходные процессы в канатах с переменной верхней границей / Т. С. Зеленская, Г. В. Данилина // Машинобудування: зб. наук. пр. / Укр. інж.-пед. акад. –Харків, 2013. – Вип. 12. – С. 6–12.
3. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М. : Наука, 1988. – 386 с.
4. Ostapenko V. A. Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length / V. A. Ostapenko // Archive of Applied Mechanics. – 2007 – Vol. 77, iss. 5. – P. 313–324. doi:10.1007/s00419-006-0103-z.

References

1. Zelenskaya, T & Siasiev, A 2012 'Dynamics of elastic displacements of longitudinal oscillations in ropes and cores with mobile borders', *Mashynobuduvannia*, iss. 10, pp. 74-84.
2. Zelenskaya, T & Danilina, G 2013, 'Transient processes in the ropes with a variable upper boundary', *Mashynobuduvannia*, iss. 12, pp. 6-12.
3. Ladyzhenskaya, O 1988, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki*, Nauka, Moskva.
4. Ostapenko, V 2007, 'Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length', *Archive of Applied Mechanics*, vol. 77, iss. 5, pp. 313-324, doi:10.1007/s00419-006-0103-z.

Стаття надійшла до редакції 22 квітня 2015 р.