

DOI 10.32820/2079-1747-2019-24-17-23

УДК 620.863

## ВИЗНАЧЕННЯ МІЦНОСТІ ТРЬОХШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

©Фідровська Н.М.<sup>1</sup>, Слепужніков Є.Д.<sup>2</sup>, Перевозник І.А.<sup>3</sup>*Харківський національний автомобільно-дорожній університет<sup>1</sup>**Національний університет цивільного захисту України<sup>2</sup>**Харківський державний автомобільно-дорожній коледж<sup>3</sup>*

### Інформація про авторів:

**Фідровська Наталія Миколаївна:** ORCID: 0000-0002-5248-273X; [nfidovsraya@ukr.net](mailto:nfidovsraya@ukr.net); доктор технічних наук; професор кафедри дорожніх і будівельних машин; Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, 61002, Україна

**Слепужніков Євген Дмитрович:** ORCID: 0000-0002-5449-3512; [slepuzhnikov@nuczu.edu.ua](mailto:slepuzhnikov@nuczu.edu.ua), кандидат технічних наук, доцент кафедри спеціальної хімії та хімічної технології; Національний університет цивільного захисту України, вул. Чернишевська, 94, м. Харків, 61023, Україна

**Перевозник Ігор Анатолійович:** ORCID: 0000-0002-4278-523X; [igorperevozyk1970@gmail.com](mailto:igorperevozyk1970@gmail.com); аспірант, завідувач навчальної лабораторії технічних засобів навчання; Харківський державний автомобільно-дорожній коледж; вул. Котельниківська, 3, м. Харків, 61051, Україна

В статті розглянутий напружений стан трьохшарової циліндричної конструкції з урахуванням енергії зсуву заповнювача. В трьохшаровій конструкції два зовнішні шари з'єднані за допомогою заповнювача, який має меншу міцність у порівнянні до зовнішніх шарів. Заповнювач забезпечує пружні властивості оболонці і працює на передачу зовнішнього тиску на зовнішні шари і поперечних зусиль зсуву.

Жорсткість у трьохшарових конструкціях значно вища, ніж у суцільних металевих конструкціях. Крім того, вони витримують і більші навантаження, які виникають при прикладенні зовнішніх навантажень.

В залежності від модулю пружності заповнювача у поперечному напрямку в трьохшарових конструкціях можуть виникати і поперечні деформації.

В статті було розглянуто рівняння змінення кривизни окремого кільця у випадку, коли навантаження на оболонку розподілено впродовж однієї твірної і визначені нормальні напруження в площі симетрії при  $x = 0$ .

При проведенні розрахунків були використані гіпотези про відсутність розтягнення кільця відносних деформацій в окружному напрямку та відсутності зсуву серединної поверхні.

Був складений вираз для потенціальної енергії і за допомогою рівняння Ейлера варіаційної задачі отримано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння четвертого ступеню. Після вирішення цього рівняння аналітичним методом було отримана залежність для радіальних переміщень, що дає змогу визначати окружні і нормальні напруження в циліндричній оболонці.

Отримане в науковому дослідженні рішення задачі міцності трьохшарової циліндричної конструкції дозволяє визначити напруження в оболонці в залежності не тільки від геометричних її параметрів, але і модулю зсуву заповнювача, що покращує достовірність проектування і експлуатацію таких конструкцій, що дає певні рекомендації по її використанню.

**Ключові слова:** циліндрична оболонка, напруження, міцність, енергія зсуву, заповнювач, кривизна.

**Фидровская, Н.Н., Слепужников Е.Д., Перевозник И.А.** «Определение прочности трехслойной цилиндрической оболочки».

В статье рассмотрено напряженное состояние трехслойной цилиндрической конструкции с учетом энергии сдвига заполнителя. В трехслойной конструкции два внешних слоя соединены с помощью заполнителя, который имеет меньшую прочность в сравнении с внешними слоями. Заполнитель обеспечивает упругие свойства оболочке и работает на передачу внешнего давления на внешние слои и поперечных усилий сдвига.

Жесткость трехслойной оболочки значительно выше, чем в сплошных металлических конструкциях. Кроме того, они выдерживают и большие нагрузки, которые возникают при действии внешних сил.

В зависимости от модуля упругости заполнителя в поперечном направлении в трехслойных конструкциях могут возникать и поперечные деформации.

В статье было рассмотрено уравнение изменение кривизны отдельного кольца в случае, когда нагрузка на оболочку распределена вдоль одной направляющей и определены нормальные напряжения в плоскости симметрии при  $x = 0$ .

При проведении расчетов были использованы гипотезы про отсутствие растяжения колец относительных деформаций в окружном направлении и отсутствия сдвига серединой поверхности.

Было составлено выражение для потенциальной энергии и с помощью уравнения Эйлера вариационной задачи получено линейное неоднородное дифференциальное уравнение четвертой степени. После решения этого уравнения аналитическим методом была получена зависимость для радиальных перемещений, что дает возможность получить окружные и нормальные напряжения в цилиндрической оболочке.

Полученные в научном исследовании решения задачи прочности трехслойной цилиндрической конструкции позволяет определить напряжения в оболочке не только в зависимости от геометрических ее параметров, но и модуля сдвига заполнителя, что повышает достоверность проектирования и эксплуатацию таких конструкций и дает определенные рекомендации по ее использованию.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка; напряжения; прочность; энергия сдвига; заполнитель; кривизна.

**Fidrovskaya N., Slepuzhnikov E., Perevoznik I.** «Definition of durability of cylinder three layer design».

In the article consideration strained condition of three layer cylinder design with calculation of energy displacement fill in. In three layer design two outward layer united with help fill in, which have lesser durability as compared with outward layer. Full in securing elastic property of cylinder and work on transmission outward pressure on outward layer and cross-section effort of displacement. Hardness three layer design considerable higher than in unbroken metallic design. Besides that they stand and large loading, which arise in the time of action outward forces.

In dependent on modulus elasticity of full in diametrical direction in three layer design can be arise and diametrical strains.

In the article consideration the equation change of crookedness separate ring in case when loading on cylinder distribute along one direction and define normal strain in the plan symmetry by  $x = 0$ .

In the time of conduct calculations use hypothesis of absence stretching of rings relative strains in district direction and absence of displacement the middle plan.

Was composite expression for potential energy and with help the equation Eyler of the variation problem receive long inhomogeneous differential equation forth power. After decision this equation of analyst method was receive dependence for radial transference, what let possibility to receive district and normal strains in cylinder.

Acknowledge the receipt in scientific research decision equation of durability three layer design allow to receive strains in cylinder not only in dependence from geometrical its parameters but and of modulus displacement outward layer, what rise reliable project and exploitation so design and give definite recommendations for use.

**Keywords:** cylinder casing; strain; durability; energy of displacement; outward layer; crookedness.

### **Вступ.**

У різних галузях техніки, таких як авіабудування, судобудування будівництво та інші знаходять застосування багатошарові конструкції, в основному трьохшарові пластини та оболонки. Трьохшарова конструкція складається з двох міцних зовнішніх шарів, які з'єднані за допомогою заповнювача. Заповнювачем являється матеріал, який має меншу міцність, ніж зовнішні шари, але забезпечує пружні властивості оболонці або пластинці. Розвиток хімічної промисловості дозволяє в якості матеріалів зовнішніх шарів і заповнювача використовувати склопластики і епоксидні смоли.

### **Огляд рішень, які мають місце.**

Трьохшаровими оболонками займалися багато відомих вчених, таких як С.А.Амбарцюмян [1], К.З.Галімов [2], Е.І. Григолюк [3], П.М.Огібалов [4], С.Н.Кан [5], І. Солвей [6], Л.Донелл [7]. При будівництві рівнянь для зовнішніх шарів використовують гіпотези Кірхгофа-Лява, для середнього шару – заповнювача – гіпотеза про заповнювача трьохшарові оболонки можуть бути з легким і жорстким заповнювачем. Для легкого заповнювача відношення модуля пружності зовнішнього шару до модуля пружності заповнювача складає  $10^2 - 10^4$ . Зовнішні шари беруть на себе все навантаження на стиск-розтягнення. Заповнювач працює на передачу нормального тиску на зовнішні шари і поперечних зусиль зсуву. В залежності від модулю пружності заповнювача у поперечному напрямку в трьохшарових конструкціях можуть виникати і поперечні деформації.

### **Постановка проблеми**

Трьохшарові оболонки мають якості, які відсутні у суцільних металевих конструкціях. Вони мають високу жорсткість і можуть витримувати більші питомі навантаження.

**Мета** – провести аналітичні дослідження, які визначать дійсні навантаження і трьохшарових циліндричних оболонках.

### **Виклад основного матеріалу**

Якщо оболонка має декілька шарів, то при її розрахунку треба обов'язково враховувати енергію зсуву заповнювача.

Сумарні моменти згину будемо розглядати у вигляді [5]

$$m_{\phi} = m_{\phi_0} + m_{\phi_{\text{дод}}} = \xi(x) \beta(\phi), \quad (1)$$

де задані  $m_{\phi_0} = \xi_0(x) \beta(\phi)$ ,

$\xi(x)$  – статично невизначена функція, яка змінна вповдовж оболонки.

В цьому випадку змінюється залежність (при  $\mu = 0$ )

$$m_\phi = -\frac{D_t}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial \phi^2} + w_n \right) \quad (2),$$

де  $w_n$  – загальні значення радіальних переміщень

$$w_n = w_0 + w_{\text{dod}} = \xi(x) \beta(\phi)$$

Це пояснюється тим, що у випадку трьохшарової оболонки кривизна оболонки  $\chi_\phi$  проходить не тільки за рахунок дії моментів згину  $m_\phi$ , але і внаслідок впливу поперечних сил  $Q_\phi$ , які викликають дотичні напруження заповнювача

$$\tau = \frac{Q_\phi}{F},$$

де  $F = h$  – товщина заповнювача.

Рівняння змінення кривизни окремого кільця представимо у вигляді

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial \phi^2} + w_n \right) = - \left( \frac{m_\phi}{D_t} + \frac{p_0}{G_{\text{zap}} F} \right). \quad (3)$$

де  $p_0 = -\frac{1}{R} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi}$  – інтенсивність радіального навантаження,

$\frac{p_0}{G_{\text{zap}} F}$  – зміна кривизни кільця в наслідок зсуву заповнювача.

Розглянемо випадок коли навантаження на оболонку розподілене вповдовж однієї твірної при  $\phi = 0$ . В площині симетрії при  $x = 0$  нормальні напруження визначаються за формулою

$$\sigma_{x_0} = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{pL^2}{8\pi R^3 \delta} R \cos \phi = 0,04 \frac{p}{\delta} \left( \frac{L}{R} \right)^2 \cos \phi \quad (4)$$

Момент згину в довільному перетині кільця одиничної ширини від дії навантаження  $p$  і дотичних сил

$$m_{\phi_0} = \frac{pR}{2\pi} [1 + 0,5 \cos \phi - (\pi - \phi) \sin \phi] \quad (5)$$

З урахуванням залежності (5) рівняння (3) приймає вигляд

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + w \right) = \xi(x) \left[ \frac{1,5 \cos \phi + (\pi - \phi) \sin \phi}{G_{\text{zap}} R^2 F} - \frac{1 + 0,5 \cos \phi - (\pi - \phi) \sin \phi}{D_t} \right], \quad (6)$$

Після вирішення рівняння (6) отримаємо вираз для радіальних переміщень

$$w_n = R^2 \xi(x) \left\{ \frac{1}{D_t} [\phi (0,5\pi \cos \phi - 0,75 \sin \phi + 0,25\phi \cos \phi) - 1] + \frac{1}{G_{\text{zap}} R^2 F} [\phi (0,25\phi \cos \phi + 0,25 \sin \phi - 0,5\pi \cos \phi)] \right\} \quad (7)$$

На основі гіпотези про відсутність розтягнення кілець відносних деформацій в окружному напрямку дає змогу знайти переміщення  $v_n$  по дотичній до дуги  $S$

$$\varepsilon_\phi = \frac{w_n}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_n}{\partial \phi} = 0$$

$$v_n = -R^2 \xi(x) \left\{ \frac{1}{D_t} \left[ \sin \phi (0,25\phi^3 + 0,5\pi\phi^2 - 0,5\phi - 2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi \cos \phi (1,25\phi + 0,5\pi) - \phi \right] + \frac{1}{G_{zap} R^2 F} \left[ \phi^2 \cos \phi + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,25 \sin \phi (\phi^3 - 2\pi\phi^2 + \phi - 2) \right] \right\}. \quad (8)$$

Гіпотеза відсутності зсуву серединної поверхні дає можливість знайти зв'язок між переміщеннями  $u_n$  по осі  $x$  і переміщеннями  $v_n$  по дотичній до дуги  $S$

$$\frac{\partial u_n}{R \partial \phi} + \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0$$

$$u_n = R^3 \frac{\partial \xi}{\partial x} \left\{ \frac{1}{G_{zap} R^2 F} \left[ \sin \phi (\phi^3 - 2,82\phi - 1) + 0,25 \cos \phi (\phi^4 - 11\phi^2 - 2\pi\phi + 2) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{D_t} \left[ 0,5\phi^2 + \sin \phi (2\phi^3 + 0,5\pi\phi^2 - 0,68\phi + 1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \phi (0,25\phi^4 + 1,32\phi^2 - 0,5\pi\phi - 0,5) \right] \right\} \quad (9)$$

Змінення кривизни серединної поверхні в напрямку твірної

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2},$$

$$\chi_x = -R \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{D_t} \left[ \phi \cos \phi (0,5\pi + \phi) - 0,75\phi \sin \phi - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{0,25}{G_{zap} R^2 F} \left[ \phi \cos \phi (2\pi + \phi) + \phi \sin \phi \right] \right\}.$$

Змінення кривизни серединної поверхні в окружному напрямку

$$\chi_\phi = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial \phi^2} + w_n \right),$$

$$\chi_\phi = -\xi(x) \left\{ \frac{1}{G_{zap} R^2 F} \left[ \cos \phi + \sin \phi (\pi - \phi) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{D_t} \left[ \cos \phi + \sin \phi (\pi + \phi) + 1 \right] \right\}.$$

Додаткові нормальні напруження

$$\sigma_{x\text{дод}} = E \frac{\partial u_n}{\partial x} = ER^3 \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} \left\{ \frac{1}{G_{zap} R^2 F} \left[ \sin \phi (\phi^3 - 2,82\phi - 1) + \right. \right.$$

$$+0,25 \cos \phi \left( \phi^4 - 11\phi^2 - 2\pi\phi + 2 \right) \left] - \frac{1}{D_t} \left[ \sin \phi \left( 2\phi^3 + 0,5\pi\phi^2 - 0,68\phi + 1 \right) + \right. \\ \left. + 0,5\phi^2 - \cos \phi \left( 0,25\phi^4 + 1,32\phi^2 - 0,5\pi\phi - 0,5 \right) \right] \}$$

Складаємо вираз для потенціальної енергії

$$\Gamma = \oint \left[ \frac{1}{2} m_{\phi} \chi_{\phi} + \frac{\delta_{n.cp}}{2} \sigma_{x\phi} \varepsilon_x - m_{\phi 0} \chi_{\phi} \right] R d\phi \quad (10)$$

Підставляємо відповідні вирази і отримаємо

$$\Gamma = E \left( \frac{\partial^2 \xi(x)}{\partial x^2} \right)^2 \left[ \frac{33266,89}{G_{zap}^2 R^4 F^2} - \frac{58923}{D_t^2} \right] - \frac{\xi^2(x)}{R} \left( \frac{33,43}{D_t} - \frac{2,28}{G_{zap} R^2 F} \right) - \\ - \frac{p}{2\pi R} \left( \frac{103,2}{D_t} - \frac{39,71}{G_{zap} R^2 F} \right).$$

Рівняння Ейлера варіаційної задачі

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi(x)} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi'(x)} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi''(x)} \right) = 0$$

Це приведе до лінійного неоднорідного диференційного рівняння четвертого ступеню відносно функції  $\xi(x)$

$$\frac{\partial^4 \xi(x)}{\partial x^4} + 4k_n^4 \xi(x) = kp(x) \quad (11)$$

де  $k_n = \frac{\left( \frac{2,28}{G_{zap} R^2 F} - \frac{33,44}{D_t} \right)}{RE \left( \frac{33266,89}{G_{zap}^2 R^4 F^2} - \frac{58923}{D_t^2} \right)}$ .

$$k = \frac{\left( \frac{103,2}{D_t} - \frac{39,71}{G_{zap} R^2 F} \right)}{2\pi R^2 E \left( \frac{33266,89}{G_{zap}^2 R^4 F^2} - \frac{58923}{D_t^2} \right)}$$

Рішенням рівняння (11) буде вираз

$$\xi(x) = e^{-k_n x} (C_1 \sin k_n x + C_2 \cos k_n x) + e^{k_n x} (C_3 \sin k_n x + C_4 \cos k_n x) + \xi_{hast} \quad (12)$$

### Висновки

Отримане рішення задачі міцності трьохшарової циліндричної конструкції дозволяє визначити напруження в оболонці в залежності не тільки геометричних її параметрів, але і модулю зсуву заповнювача, що покращує достовірність проектування і експлуатацію таких конструкцій.

**Список використаних джерел:**

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин / С. А. Амбарцумян // М. : Физматгиз, 1967. – 266 с.
2. Галимов К. З. О работах казанских ученых по теориям пластин и оболочек / К. З. Галимов, Р. Г. Суркин // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1967. – № 5. – С. 3-55.
3. Григолюк Э. И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем / Э. И. Григолюк // Изв. АН СССР, ОТН. – №1. – 1957. – С. 77-84.
4. Огибалов П. М. Оболочки и пластины / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. – М. : МГУ, 1969. – 696 с.
5. Solvey I. Bibliography and summaries of sandwich construction (1939-1954) / Aeronaut/ Res. Lab., Melbourne, Austral, AR/ SM 2, 1953.
6. Кан С. Н. Строительная механика оболочек / С. Н. Кан. – М. : Машиностроение, 1966. – 508 с.
7. Донелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Донелл. – М. : Наука, 1982. – 568 с.

**References**

1. Ambarcumjan, SA 1967, Teorija anizotropnyh plastin, Fizmatgiz, Moskva.
2. Galimov, KZ & Surkin, RG 1967, 'O rabotah kazanskih uchenyh po teorijam plastin i obolochek', Issledovanija po teorii plastin i obolochek, no. 5, pp. 3-55.
3. Grigoljuk, JeI 1957, 'Uravenenija trehslojnyh obolochek s legkim zapolnitelem', Izvestija Akademii nauk SSSR. Otdelenie tehniceskikh nauk, no. 1, pp. 77-84.
4. Ogibalov, PM & Koltunov, MA 1969, Obolochki i plastiny, Moskovskij gosudarstvennyj universitet, Moskva.
5. Solvey, I 1953, 'Bibliography and summaries of sandwich construction (1939-1954)', Aeronaut, Melbourne, AR/ SM 2.
6. Kan, SN 1966, Stroitel'naja mehanika obolochek, Mashinostroenie, Moskva.
7. Donell, LG 1982, Balki, plastiny i obolochki, Nauka, Moskva.

Стаття надійшла до редакції 7 жовтня 2019 р.