УДК 517.52

В. Ю. Слюсарчук

ІНТЕГРАЛЬНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ОПЕРАТОРНИХ РЯДІВ

V. Yu. Slyusarchuk. *Integral and differential test for convergence of operator series*, Mat. Stud. **39** (2013), 178–189.

We obtain the integral and differential conditions for convergence of operator series.

В. Е. Слюсарчук. *Интегральный и дифференциальный признаки сходимости операторных рядов* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №2. – С.178–189.

Получены интегральные и дифференциальные условия сходимости операторных рядов.

Множина всіх лінійних неперервних операторів, що діють з одного банахового простору в інший, не наділена властивостями впорядкованої множини. Тому дослідження збіжності операторних рядів здійснюється складніше, ніж числових рядів, і методи дослідження операторних рядів істотно відрізняються від методів дослідження числових рядів. Це, наприклад, підтверджується проведеними в [1]–[5] дослідженнями. У цій статті ми дослідимо збіжність операторних рядів з використанням теорії конусів та напівупорядкованих просторів.

1. Основний об'єкт досліджень. Для подальшого важливими є такі твердження про збіжність числових рядів та невласних інтегралів.

Теорема 1 (Інтегральна ознака Маклорена–Коші, [6])**.** *Нехай:*

1) $a_n \in (0, +\infty)$, $n \geqslant 1$;

2) $f\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *— неперервна монотонно незростаюча функція і* $f(n) = a_n$, $n \geqslant 1$.

Тоді числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Теорема 2 (Диференціальна ознака, [7, 8])**.** *Нехай:*

1) $f\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *— неперервно диференційовна монотонно незростаюча функція;*

2) $g\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *— неперервно диференційовна функція;*

3) a_n, $n \geqslant 1$, *— додатні числа, для яких* $f(n) = a_n$, $n \geqslant 1$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41-06, 47A11.
Keywords: operator series; integral test; differential test.

Якщо

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\left(g(t)\frac{f'(t)}{f(t)}+g'(t)\right)<0,$$

то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ *збігаються; якщо невласний інтеграл* $\int_1^{\infty}\frac{dt}{g(t)}$ *розбігається і* $g(t)\frac{f'(t)}{f(t)}+g'(t)\geqslant 0$ *для всіх досить великих* $t\geqslant 1$, *то числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ *розбігаються.*

Диференціальною ознакою зазвичай користуватися зручніше (особливо наступним твердженням), ніж інтегральною ознакою. Розглянемо функції

$$S_1(t)=-t\frac{f'(t)}{f(t)},\ S_{n+1}(t)=(S_n(t)-1)l_n(t)\ (n\geqslant 1),\ \text{де } l_n(t)=\begin{cases}\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n\ \text{разів}}t, & \text{якщо } n\in\mathbb{N},\\ t, & \text{якщо } n=0.\end{cases}$$

Вважаючи, що у теоремі 2 функція $g(t)$ збігається з функцією $\Pi_p(t)=\prod_{n=0}^{p}l_n(t)$, $p\geqslant 0$, за цією теоремою з рівностей

$$g(t)\frac{f'(t)}{f(t)}+g'(t)=\left(\frac{f'(t)}{f(t)}+\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{\Pi_m(t)}\right)\Pi_p(t)+1=1-S_{p+1}(t)$$

випливає така теорема.

Теорема 3 ([7, 8]). *Нехай виконуються перша та третя умови теореми 2. Якщо* $\varliminf_{t\to+\infty}S_p(t)>1$ *для деякого* $p\in\mathbb{N}$, *то числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ *збігаються; якщо* $S_p(t)\leqslant 1$ *для деякого* $p\in\mathbb{N}$ *і всіх досить великих* t, *то числовий ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ *розбігаються.*

Метою статті є отримання операторних аналогів наведених теорем. Цієї мети ми досягнемо за допомогою допоміжних результатів, які ми наведемо у наступному підрозділі.

2. Конуси, додатні оператори й ознака порівняння для операторних рядів. Нехай E — дійсний банахів простір. Опуклу замкнену множину $K\subset E$ називають *конусом*, якщо $x+y$, $\alpha x\in K$ для всіх $x,y\in K$ і $\alpha\geqslant 0$, і $K\cap(-K)=\{0\}$. Покладемо $x\leqslant y$, якщо $y-x\in K$. Очевидно, що $x\leqslant x$ і з $x\leqslant y$, $y\leqslant z$ випливає нерівність $x\leqslant z$. Тому, кожний конус визначає в E деяку напівупорядкованість. Ця напівупорядкованість узгоджена з лінійністю простору E в тому сенсі, що з $x\leqslant y$ випливає $tx\leqslant ty$ при $t\geqslant 0$ і випливає $tx\geqslant ty$ при $t\leqslant 0$, а з $x_1\leqslant y_1$ і $x_2\leqslant y_2$ випливає $x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$. З $x\leqslant y$ і $y\leqslant x$ випливає рівність $x=y$.

Далі вважатимемо, що банахів простір E напівупорядкований конусом K.

Конус K називають *тілесним*, якщо він містить кулю ненульового радіуса, і *відтворювальним*, якщо кожний елемент $x\in E$ подається у вигляді

$$x=u-v,\tag{1}$$

де $u,v\in K$.

Конус K називають *несплющеним*, якщо існує таке число $c>0$, що кожний елемент $x\in E$ має зображення (1), в якому

$$\|u\|_E\leqslant c\|x\|_E \text{ і } \|v\|_E\leqslant c\|x\|_E.\tag{2}$$

Зазначимо, що *кожний тілесний конус є відтворювальним, а кожний відтворювальний конус в банаховому просторі є несплющеним* ([9]).

Норму в E називають *монотонною*, якщо з $0 \leqslant x \leqslant y$ випливає $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Якщо з $0 \leqslant x \leqslant y$ випливає

$$\|x\|_E \leqslant b\|y\|_E, \tag{3}$$

де b — універсальна стала, то норму називають *напівмонотонною.*

Конус K називають *гострим*, якщо норма в E монотонна, і *нормальним*, якщо норма напівмонотонна.

Послідовність $(x_n)_{n\geqslant 1}$ називають *монотонно зростаючою*, якщо $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$. Цю послідовність називають *обмеженою* (*зверху*), якщо $x_n \leqslant z$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, для деякого елемента $z \in E$. Подібно визначається *монотонно спадна* і *обмежена* (*знизу*) послідовність. Послідовність $(x_n)_{n\geqslant 1}$ називають *обмеженою за нормою*, якщо $\|x_n\|_E \leqslant M$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, для деякого числа $M \in (0, +\infty)$.

Конус K називають *правильним*, якщо кожна обмежена монотонна послідовність збігається за нормою. Конус K називають *цілком правильним*, якщо кожна обмежена за нормою монотонна послідовність збігається за нормою.

Зазначимо, що *кожний цілком правильний конус правильний*, а *кожний правильний конус нормальний* ([9]).

Нехай оператор A діє з дійсного банахового простору E_i з клином K_i в дійсний банахів простір E_j з клином K_j, де $i, j \in \{1, 2\}$. Оператор A називають *додатним*, якщо $AK_i \subset K_j$, тобто з $x \geqslant 0$ випливає $Ax \geqslant 0$.

Оператор A називають *монотонним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає $Ax \leqslant Ay$. Очевидно, що лінійний додатний оператор $A\colon E_i \to E_j$ є монотонним.

Лінійний неперервний оператор B, що діє з банахового простору E_i з клином K_i у банахів простір E_j з клином K_j, називають *додатно оборотним*, якщо цей оператор має неперервний обернений B^{-1} і $B^{-1}K_j \subset K_i$. Загальні теореми про додатну оборотність операторів наведено в [9].

Якщо для операторів $A, B \in L(E_i, E_j)$ оператор $A - B$ є додатним, то будемо записувати $A \geqslant B$. Очевидно, що множина всіх додатних операторів $A \in L(E_i, E_j)$ є конусом у просторі $L(E_i, E_j)$. Цей конус позначатимемо через $K(E_i, E_j)$. Також очевидно, що $K(E_j, E_s)K(E_i, E_j) \subset K(E_i, E_s)$, $s \in \{1, 2\}$.

Важливими для подальшого є такі два твердження.

Теорема 4. *Нехай банахів простір E_1 напівупорядкований відтворювальним конусом K_1, а банахів простір E_2 напівупорядкований нормальним конусом K_2. Якщо для операторів $A, B \in L(E_1, E_2)$ виконується співвідношення*

$$O \leqslant A \leqslant B, \tag{4}$$

то $\|A\|_{L(E_1,E_2)} \leqslant M\|B\|_{L(E_1,E_2)}$ для деякої незалежної від A і B сталої $M > 0$.

Доведення. Оскільки конус K_1 відтворювальний, а кожний відтворювальний конус є несплющеним, то з (1) і (2) маємо

$$\|A\|_{L(E_1,E_2)} = \sup_{\|x\|_{E_1}=1} \|Ax\|_{E_2} \leqslant$$
$$\le \sup\{\|A(u-v)\|_{E_2} :\ u, v \in K_1,\ \|u-v\|_{E_1} = 1,\ \|u\|_{E_1} \leqslant c,\ \|u\|_{E_1} \leqslant c\} \leqslant$$
$$\le \sup\{\|A(u-v)\|_{E_2} :\ u, v \in K_1,\ \|u\|_{E_1} \leqslant c,\ \|v\|_{E_1} \leqslant c\} \le$$

$$\leqslant 2 \cdot \sup\{\|Au\|_{E_2} : u \in K_1,\ \|u\|_{E_1} \leqslant c\} = 2 \cdot \sup\{\|Au\|_{E_2} : u \in K_1,\ \|u\|_{E_1} = c\} = \\ = 2c \cdot \sup\{\|Au\|_{E_2} : u \in K_1,\ \|u\|_{E_1} = 1\}. \tag{5}$$

Оскільки конус K_2 нормальний, то на підставі (3) і (4)

$$\sup_{u \in K_1,\ \|u\|_{E_1}=1} \|Au\|_{E_2} \leqslant b \sup_{u \in K_1,\ \|u\|_{E_1}=1} \|Bu\|_{E_2} \leqslant b \sup_{x \in E_1,\ \|x\|_{E_1}=1} \|Bx\|_{E_2} = b\|B\|_{L(E_1,E_2)}.$$

Звідси та (5) випливає твердження теореми, де $M = 2bc$. □

Теорема 5 (Ознака порівняння, [5]). *Нехай:*

1) *банахів простір E_1 напівупорядкований відтворювальним конусом K_1, а банахів простір E_2 напівупорядкований правильним конусом K_2;*
2) *лінійні неперервні оператори $A_n\colon E_1 \to E_2$ і $B_n\colon E_1 \to E_2$, $n \geqslant 1$, є додатними;*
3) *$A_n \leqslant B_n$ для всіх $n \geqslant 1$.*

Тоді зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$.

3. Операторний аналог інтегральної ознаки Маклорена–Коші. Розглянемо операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{6}$$

де $A_n \in L(E_1, E_2)$, $n \geqslant 1$, збіжність якого будемо досліджувати. Банахові простори E_1 і E_2 тут і в подальшому вважаються дійсними.

Справджується наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай:*

1) *банахів простір E_1 напівупорядкований відтворювальним конусом K_1, а банахів простір E_2 напівупорядкований правильним конусом K_2;*
2) *значення неперервної функції $F\colon [1, +\infty) \to L(E_1, E_2)$ є додатними операторами і $F(t_1) \geqslant F(t_2)$, якщо $1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < +\infty$;*
3) *$F(n) = A_n$ для кожного $n \geqslant 1$.*

Тоді операторний ряд (6) і невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} F(t)\,dt \tag{7}$$

одночасно збігаються або розбігаються.

Доведення. Розглянемо операторний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n, \tag{8}$$

де $B_n = \int_n^{n+1} F(t)\,dt,\ n \geqslant 1$. Оскільки

$$\int_n^{n+1} F(t)\,dt = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} F\left(n + \frac{k}{m}\right)$$

і на підставі другої умови теореми

$$F(n) \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} F\left(n + \frac{k}{m}\right) \geqslant F(n+1)$$

для всіх $m, n \in \mathbb{N}$, то з третьої умови теореми та замкненості конусів K_1 і K_2 маємо $A_n \geqslant B_n \geqslant A_{n+1},\ n \geqslant 1$.

З цього співвідношення та теореми 5 випливає, що ряди (6) і (8) одночасно збігаються або розбігаються.

Доведемо далі, що ряд (8) і невласний інтеграл (7) одночасно збігаються або розбігаються. Якщо невласний інтеграл (7) збігається, то існує границя

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b F(t)\, dt \in L(E_1, E_2)$$

(тут $b \in [1, +\infty)$) і, отже, існує границя

$$\lim_{m \to +\infty} \int_1^m F(t)\, dt \in L(E_1, E_2)$$

(тут $m \in \mathbb{N}$). Звідси випливає, що збігається ряд (8), оскільки $\int_1^m F(t)\, dt = \sum_{k=1}^{m-1} B_k$ для $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Якщо збігається операторний ряд (8), то існує границя

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} B_k \in L(E_1, E_2).$$

Оскільки $\sum_{k=1}^{m} B_k = \int_1^{m+1} F(t)\, dt$ для кожного $m \in \mathbb{N}$, то для довільного числа $\gamma > 2$

$$\int_1^{\gamma} F(t)\, dt = \sum_{k=1}^{[\gamma]-1} B_k + \int_{[\gamma]}^{\gamma} F(t)\, dt, \tag{9}$$

де $[\gamma]$ — ціла частина числа γ. Далі використаємо співвідношення $B_{[\gamma]} \geqslant \int_{[\gamma]}^{\gamma} F(t)dt \geqslant 0$, що випливає з другої та третьої умов теореми. Звідси, з теореми 4 та з того, що правильний конус нормальний, випливає, що для деякого числа $M > 0$ виконується нерівність

$$M \left\| B_{[\gamma]} \right\|_{L(E_1,E_2)} \geqslant \left\| \int_{[\gamma]}^{\gamma} F(t)dt \right\|_{L(E_1,E_2)}.$$

Оскільки зі збіжності ряду (8) випливає, що $\lim_{\gamma \to +\infty} \left\| B_{[\gamma]} \right\|_{L(E_1,E_2)} = 0$, то

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \left\| \int_{[\gamma]}^{\gamma} F(t)dt \right\|_{L(E_1,E_2)} = 0,$$

тому, з (9) отримаємо

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \int_1^{\gamma} F(t)dt = \lim_{\gamma \to +\infty} \sum_{k=1}^{[\gamma]-1} B_k.$$

Звідси та зі збіжності операторного ряду (8) випливає існування границі

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \int_1^{\gamma} F(t)dt \in L(E_1, E_2).$$

Отже, операторний ряд (8) і невласний інтеграл (7) одночасно збігаються або розбігаються. □

4. Ознака порівняння для невласних інтегралів. Для невласних інтегралів наведемо аналог теореми 5. Цей аналог використовуватимемо при встановленні диференціальної ознаки збіжності операторних рядів.

Розглянемо невласні інтеграли

$$\int_1^{\infty} A(t)dt, \tag{10}$$

$$\int_1^{\infty} B(t)dt, \tag{11}$$

де $A(t)$ і $B(t)$ — визначені на $[1, +\infty)$ функції зі значеннями у просторі $L(E_1, E_2)$.

Справджується таке твердження.

Теорема 7 (Ознака порівняння)**.** *Нехай:*

1) *банахів простір E_1 напівупорядкований відтворювальним конусом K_1, а банахів простір E_2 напівупорядкований правильним конусом K_2;*
2) *$A\colon [1, +\infty) \to L(E_1, E_2)$ і $B\colon [1, +\infty) \to L(E_1, E_2)$ — неперервні функції і їх значення є додатними операторами;*
3) *$A(t) \geqslant B(t)$ для кожного $t \geqslant 1$.*

Тоді зі збіжності інтеграла (10) *випливає збіжність інтеграла* (11), *а з розбіжності інтеграла* (11) *випливає розбіжність інтеграла* (10).

Доведення. Використаємо операторні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n, \tag{13}$$

де

$$A_n = \int_n^{n+1} A(t)dt, \ B_n = \int_n^{n+1} B(t)dt. \tag{14}$$

Припустимо, що інтеграл (10) збігається. Тоді існує оператор $C \in L(E_1, E_2)$, для якого

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \int_1^{\gamma} A(t)dt = C,$$

і, отже,

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \int_1^{[\gamma]} A(t)dt = C,$$

де $[\gamma]$ — ціла частина числа γ, та

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\left\|\int_{[\gamma]}^{\gamma} A(t)dt\right\|_{L(E_1,E_2)} = 0. \tag{15}$$

Оскільки, з рівностей (14) та властивостей інтегралів для кожного $\gamma \geqslant 2$ виконується

$$\int_1^{[\gamma]} A(t)dt = \sum_{n=1}^{[\gamma]-1} A_n,$$

то існує границя

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\sum_{n=1}^{[\gamma]-1} A_n$$

і ця границя збігається з оператором C. Тому операторний ряд (12) є збіжним. За другою і третьою умовами теореми $A_n \geqslant B_n,\ n \geqslant 1$. Тому, за теоремою 5, ряд (13) є збіжним, тобто існує оператор $D \in L(E_1, E_2)$, для якого

$$D = \lim_{\gamma\to+\infty}\sum_{n=1}^{[\gamma]-1} B_n = \lim_{\gamma\to+\infty}\int_1^{[\gamma]} B(t)dt. \tag{16}$$

Доведемо, що існує границя

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\int_1^{\gamma} B(t)dt \tag{17}$$

і ця границя збігається з оператором D. Використаємо очевидні рівності

$$\int_1^{\gamma} B(t)dt = \int_1^{[\gamma]} B(t)dt + \int_{[\gamma]}^{\gamma} B(t)dt = \sum_{n=1}^{[\gamma]-1} B_n + \int_{[\gamma]}^{\gamma} B(t)dt, \tag{18}$$

що виконуються для кожного $\gamma \geqslant 2$. За умовами теореми, для кожного $\gamma \geqslant 2$

$$0 \leqslant \int_{[\gamma]}^{\gamma} B(t)dt \leqslant \int_{[\gamma]}^{\gamma} A(t)dt.$$

Тому за теоремою 4 з того, що правильний конус нормальний випливає, що для деякого числа $M > 0$ і всіх $\gamma \geqslant 2$ виконується нерівність

$$\left\|\int_{[\gamma]}^{\gamma} B(t)dt\right\|_{L(E_1,E_2)} \leqslant M\left\|\int_{[\gamma]}^{\gamma} A(t)dt\right\|_{L(E_1,E_2)}.$$

Звідси і (15) випливає, що

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\left\|\int_{[\gamma]}^{\gamma} B(t)dt\right\|_{L(E_1,E_2)} = 0.$$

Отже, з (16) і (18) маємо, що існує границя (17), яка збігається з оператором D.

Отже, доведено, що зі збіжності невласного інтеграла (10) випливає збіжність невласного інтеграла (11).

Друга частина твердження очевидна. Справді, у випадку розбіжного невласного інтеграла (11), як випливає з проведених вище міркувань, невласний інтеграл (10) не може збігатися. □

5. Операторні аналоги диференціальної ознаки. Для операторного ряду (6) та невласного інтеграла (7) маємо таке твердження.

Теорема 8. *Нехай:*

1) *банахів простір E_1 напівупорядкований відтворювальним конусом K_1, а банахів простір E_2 напівупорядкований правильним конусом K_2;*
2) *$F\colon [1,+\infty) \to L(E_1, E_2)$ — неперервно диференційовна функція, значення якої є додатними і додатно оборотними операторами;*
3) *$F(t_1) \geqslant F(t_2)$ для $t_1 \leqslant t_2$, $t_1, t_2 \in [1, +\infty)$;*
4) *$F(n) = A_n$ для кожного $n \geqslant 1$;*
5) *$G\colon [1,+\infty) \to L(E_2, E_2)$ — неперервно диференційовна функція, значення якої є додатними операторами.*

Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_2, E_2)$ виконується співвідношення

$$G(t)F'(t)F^{-1}(t) + G'(t) \leqslant -D \tag{19}$$

для всіх досить великих t і конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) збігаються; якщо значення функції $G\colon [1,+\infty) \to L(E_2, E_2)$ є додатно оборотними операторами, розбігається невласний інтеграл

$$\int_1^\infty G^{-1}(t)dt \tag{20}$$

і виконується співвідношення

$$G(t)F'(t)F^{-1}(t) + G'(t) \geqslant 0 \tag{21}$$

для всіх досить великих t, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) розбігаються.

Доведення. Розглянемо спочатку першу частину твердження теореми. Якщо виконується співвідношення (19) для всіх $t \geqslant a$, де a — деяке додатне число, то за другою умовою теореми $G(t)F'(t) + G'(t)F(t) \leqslant -DF(t),\ t \geqslant a$. Тому

$$(G(t)F(t))' \leqslant -DF(t), \quad G(t)F(t) - G(a)F(a) \leqslant -D\int_a^t F(s)ds, \quad t \geqslant a.$$

Звідси та з того, що $G(t)F(t) \geqslant 0$ і $D\int_a^t F(s)ds \geqslant 0$ для всіх $t \geqslant a$ (тут використано другу та четверту умови теореми), випливає, що

$$0 \leqslant D\int_a^t F(s)ds \leqslant G(a)F(a), \quad t \geqslant a.$$

З цього співвідношення та з того, що, за другою умовою теореми, операторна величина $D\int_a^t F(s)ds$ є монотонно зростаючою, а конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, випливає, що $D\int_a^t F(s)ds$ збігається за нормою при $t \to +\infty$. Оскільки оператор D має обернений неперервний оператор, то невласний інтеграл (7) збігається, а, отже, збігається і операторний ряд (6) (виапливає з перших чотирьох умов теореми та з твердження теореми 6).

Тепер доведемо другу частину твердження теореми.

Якщо виконується співвідношення (21) для всіх $t \geqslant b$, де b — деяке додатне число, то за другою умовою теореми $G(t)F'(t)+G'(t)F(t) \geqslant 0, \quad t \geqslant b$. Тому $(G(t)F(t))' \geqslant 0, \ t \geqslant b$, і, отже, $G(t)F(t) \geqslant G(b)F(b), \ t \geqslant b$. Звідси випливає, що $F(t) \geqslant G^{-1}(t)G(b)F(b), \ t \geqslant b$. Оскільки невласний інтеграл (20) розбігається, то з оборотності операторів $G(b)$ і $F(b)$ маємо, що невласний інтеграл $\int_b^{+\infty} G^{-1}(t)G(b)F(b)dt$ розбігається. Тому за теоремою 7 невласний інтеграл $\int_b^{+\infty} F(t)dt$ також розбігається. Звідси випливає розбіжність невласного інтеграла (7). □

Подібно можна довести таку теорему.

Теорема 9. *Нехай:*

1) *виконуються перші чотири умови теореми 8;*
2) $G\colon [1,+\infty) \to L(E_1,E_1)$ *— неперервно диференційовна функція, значення якої є додатними операторами.*

Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E_1,E_1)$ виконується співвідношення $F^{-1}(t)F'(t)G(t)+G'(t) \leqslant -D$ для всіх досить великих t і конус $K(E_1,E_2)$ є правильним, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) збігаються; якщо значення функції $G\colon [1,+\infty) \to L(E_1,E_1)$ є додатно оборотними операторами, розбігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} G^{-1}(t)dt$ і виконується співвідношення $F^{-1}(t)F'(t)G(t)+G'(t) \geqslant 0$ для всіх досить великих t, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) розбігаються.

6. Операторні аналоги теореми 3. Використовуватимемо функції

$$S_{n+1}^{+}(t) = l_n(t)\left(S_n^{+}(t) - I^{+}\right), \quad S_{n+1}^{-}(t) = l_n(t)\left(S_n^{-}(t) - I^{-}\right), \quad n \geqslant 1,$$

де $S_1^{+}(t) = -tF'(t)F^{-1}(t), \ S_1^{-}(t) = -tF^{-1}(t)F'(t)$ і I^{+} та I^{-} — одиничні елементи просторів $L(E_2,E_2)$ та $L(E_1,E_1)$ відповідно.

Також використовуватимемо функції $G^{+}(t) = \Pi_p(t)I^{+}$, і $G^{-}(t) = \Pi_p(t)I^{-}, \ p \geqslant 0$.

Оскільки

$$G^{+}(t)F'(t)F^{-1}(t) + (G^{+})'(t) = \Pi_p(t)F'(t)F^{-1}(t) + (\Pi_p(t))'\, I^{+} = \Pi_p(t)F'(t)F^{-1}(t)+$$
$$+\Pi_p(t)\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{\Pi_m(t)}I^{+} = \Pi_p(t)\left(F'(t)F^{-1}(t) + \sum_{m=0}^{p}\frac{1}{\Pi_m(t)}I^{+}\right) = I^{+} - S_{p+1}^{+}(t),$$
$$F^{-1}(t)F'(t)G^{-}(t) + (G^{-})'(t) = \Pi_p(t)F^{-1}(t)F'(t) + (\Pi_p(t))'\, I^{-} = \Pi_p(t)F^{-1}(t)F'(t)+$$
$$+\Pi_p(t)\sum_{m=0}^{p}\frac{1}{\Pi_m(t)}I^{-} = \Pi_p(t)\left(F^{-1}(t)F'(t) + \sum_{m=0}^{p}\frac{1}{\Pi_m(t)}I^{-}\right) = I^{-} - S_{p+1}^{-}(t),$$

то з теорем 8 і 9, відповідно, випливають такі два твердження.

Теорема 10. *Нехай виконуються перші чотири умови теореми 8. Якщо для деяких $p \in \mathbb{N}$ та додатного і оборотного оператора $D \in L(E_2,E_2)$ виконується співвідношення $S_p^{+}(t) \geqslant I^{+} + D$ для всіх досить великих t і конус $K(E_1,E_2)$ є правильним, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) збігаються; якщо для деякого $p \in \mathbb{N}$ виконується співвідношення $S_p^{+}(t) \leqslant I^{+}$ для всіх досить великих t, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) розбігаються.*

Теорема 11. *Нехай виконуються перші чотири умови теореми 8. Якщо для деяких $p \in \mathbb{N}$ та додатного і оборотного оператора $D \in L(E_1, E_1)$ виконується співвідношення $S_p^-(t) \geqslant I^- + D$ для всіх досить великих t і конус $K(E_1, E_2)$ є правильним, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) збігаються; якщо для деякого $p \in \mathbb{N}$ виконується співвідношення $S_p^-(t) \leqslant I^-$ для всіх досить великих t, то операторний ряд (6) і невласний інтеграл (7) розбігаються.*

8. Приклад застосування теорем 6 і 8. Використаємо теореми 6 і 8 для дослідження збіжності невласного інтеграла

$$\int_1^{+\infty} t^{-A} dt \tag{22}$$

та операторного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}, \tag{23}$$

в яких оператор $A \in L(E, E)$ додатний.

Спочатку наведемо ряд допоміжних тверджень.

Теорема 12. *Для кожних оператора $A \in L(E, E)$ і числа $t \in \mathbb{R}$ справджується співвідношення*

$$e^{tA} = \lim_{n \to +\infty} \left(I + \frac{t}{n} A \right)^n. \tag{24}$$

Доведення. З рівності $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots$ отримуємо співвідношення

$$e^{tA} - \left(I + \frac{t}{n} A \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k} \right) t^k A^k, \; C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!} - \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!} \geqslant 0,$$

то

$$\left\| e^{tA} - \left(I + \frac{t}{n} A \right)^n \right\|_{L(E,E)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{k!} \right| \|tA\|_{L(E,E)}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{k!} \right) \|tA\|_{L(E,E)}^k =$$
$$= e^{\|tA\|_{L(E,E)}} - \left(1 + \frac{\|tA\|_{L(E,E)}}{n} \right)^n.$$

Остання величина прямує до 0 при $n \to +\infty$. Тому виконується співвідношення (24). □

Теорема 13. *Нехай дійсний банахів простір E напівупорядкований клином K і оператор $A \in L(E, E)$ додатний. Тоді:*

1) *оператор e^{tA} додатний для кожного $t \geqslant 0$ і співвідношення*

$$e^{t_1 A} \leqslant e^{t_2 A} \tag{25}$$

справджується для всіх $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$, для яких $t_1 \leqslant t_2$;

2) *якщо оператор $I - \tau A$ є додатним для всіх достатньо малих додатних τ, то оператор e^{tA} є додатним для кожного $t \leqslant 0$ і співвідношення (25) справджується для всіх $t_1, t_2 \in (-\infty, 0]$, для яких $t_1 \leqslant t_2$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $t \geqslant 0$. Оскільки оператор $I + \frac{t}{n}A$ додатний для кожних $t \geqslant 0$ і $n \in \mathbb{N}$, то таку ж властивість має оператор $\left(I + \frac{t}{n}A\right)^n$. Тому, з (24) випливає, що оператор e^{tA} також є додатним для всіх $t \geqslant 0$.

Доведемо, що виконується співвідношення (25). Якщо $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$, то з додатності оператора A маємо $\frac{t_1}{n}A \leqslant \frac{t_2}{n}A$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $\left(I + \frac{t_1}{n}A\right)^n \leqslant \left(I + \frac{t_2}{n}A\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, з (24) випливає, що (25) справджується для всіх $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$, для яких $t_1 \leqslant t_2$.

Отже, першу частину твердження теореми доведено.

Далі зафіксуємо довільне $t \leqslant 0$. З додатності оператора $I - \tau A$ випливає, що для достатньо малого $\tau > 0$ оператор $I + \frac{t}{n}A$ є додатним для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$. Тому таку ж властивість має оператор $\left(I + \frac{t}{n}A\right)^n$. Отже, границя $\lim_{n\to+\infty}\left(I + \frac{t}{n}A\right)^n$ є додатним оператором для всіх $t \leqslant 0$.

Доведемо, що співвідношення (25) виконується, якщо $t_1 \leqslant t_2 \leqslant 0$. Оскільки $\frac{t_1}{n} \leqslant \frac{t_2}{n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і оператор A додатний, то $\frac{t_1}{n}A \leqslant \frac{t_2}{n}A$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $I + \frac{t_1}{n}A \leqslant I + \frac{t_2}{n}A$, $n \in \mathbb{N}$. З додатності оператора $I - \tau A$ маємо, що для всіх достатньо малих додатних τ оператори $I + \frac{t_1}{n}A$ і $I + \frac{t_2}{n}A$ додатні для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$. Тому, таку ж властивість мають оператори $\left(I + \frac{t_1}{n}A\right)^n$, $\left(I + \frac{t_2}{n}A\right)^n$ і $\left(I + \frac{t_1}{n}A\right)^n \leqslant \left(I + \frac{t_2}{n}A\right)^n$ для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$. Звідси з (24) отримуємо (25) у випадку $t_1 \leqslant t_2 \leqslant 0$. □

Оскільки для довільних оператора $A \in L(E,E)$ і числа $t > 0$ $t^{-A} = e^{-(\ln t)A}$, $t > 0$ і $\left(t^{-A}\right)^{-1} = t^A$, то з теореми 13 випливає таке твердження.

Теорема 14. *Нехай дійсний банахів простір E напівупорядкований клином K, оператор $A \in L(E,E)$ додатний і оператор $I - \tau A$ додатний для кожного достатньо малого $\tau > 0$. Тоді для кожного числа $t \geqslant 1$ оператори t^{-A} та t^A додатні і співвідношення $t_1^{-A} \geqslant t_2^{-A}$ справджується, якщо $1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < +\infty$.*

Зауважимо, що з додатності оператора $A \in L(E,E)$ не випливає додатність оператора $I - \tau A$ для достатньо малого $\tau > 0$. Це підтверджується таким прикладом.

Приклад. Розглянемо простір $\mathbb{R}^2$, що напівупорядкований конусом

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}.$$

Визначимо додатний оператор $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ рівністю $A(x,y) = (y,x)$. Оператор $I - \tau A$ для кожного $\tau > 0$ не належить до множини додатних операторів, оскільки $(I - \tau A)(1,0) = (1, -\tau) \notin K$.

З теорем 6 і 14 випливає таке твердження про збіжність невласного інтеграла (22) та операторного ряду (23).

Теорема 15. *Нехай:*

1) *банахів простір E напівупорядкований відтворювальним і правильним конусом K;*
2) *оператор $A \in L(E,E)$ додатний;*
3) *оператор $I - \tau A$ додатний для кожного достатньо малого числа $\tau \geqslant 0$.*

Тоді невласний інтеграл (22) і операторний ряд (23) одночасно збігаються або розбігаються.

Далі використаємо теорему 10.

Очевидно, що у випадку невласного інтеграла (22) і операторного ряду (23) функція $F(t)$, що використовується в теоремах 6, 8 і 10, має вигляд $F(t) = t^{-A}$. Тому $F'(t) = -At^{-A}$ і $F^{-1}(t) = t^{A}$. Розглянемо функцію $S_1(t) = -tF'(t)F^{-1}(t)$. З попередніх рівностей маємо $S_1(t) = A$. Тому, за теоремами 6, 8, 10, 14 і 15 отримуємо таке твердження про умови збіжності та розбіжності невласного інтеграла (22) і операторного ряду (23).

Теорема 16. *Нехай виконуються умови теореми 13. Якщо для деякого додатного і оборотного оператора $D \in L(E,E)$ виконується співвідношення $A \geqslant I + D$ і конус $K(E,E)$ є правильним, то операторний ряд* (23) *і невласний інтеграл* (22) *збігаються; якщо виконується співвідношення $A \leqslant I$, то операторний ряд* (23) *і невласний інтеграл* (22) *розбігаються.*

Зазначимо, що у випадку довільного оператора $A \in L(E,E)$ збіжність ряду (23) досліджено в [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Slyusarchuk V.Yu. *Conditions of converging operator series* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-A}$// Nauk. Visnik of Chernivtsi University. – 2009. – V.485. – P. 113–117. (in Ukrainian)
2. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of D'Alembert's test*// Mathematics today '09. – Kiev: Izdat. "Osvita Ukraine". – 2009. – V.15. – P. 101–115. (in Russian)
3. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Cauchy's test*// Mat. Stud. – 2010. – V.33, №1. – P. 97–100. (in Ukrainian)
4. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Bertrand's test*// Mat. Stud. – 2011. – V.35, №2. – P. 181–195. (in Ukrainian)
5. Slyusarchuk V.Yu. *Operator analogue of Kummer's test*// Mat. Stud. – 2011. – V.36, №2. – P. 188–196. (in Ukrainian)
6. Fichtengolz G.M. Differential and integral calculus. – V.2, Moskow: Nauka, 1966, 800 p. (in Russian)
7. Slyusarchuk V.E. *Some conditions for convergence of numerical series*// Mathematics today '90. – Kiev: Vishcha shkola. – 1990. – P. 94–105. (in Russian)
8. Slyusarchuk V.Yu. General theorems of converging numerical series. – Rivne: Rivne State Technical University Publishing House, 2001, 240 p. (in Ukrainian)
9. Krasnosel'skii M.A., Lifshic E.A., Sobolev A.V. Positive linear systems: method of positive operators. – Moskow: Nauka, 1985, 256 p. (in Russian)

Національний університет водного
господарства та природокористування
V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Надійшло 2.03.2013