УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен

РОЗВ'ЯЗКИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ СІМЕЙСТВ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ, ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ

S. D. Ivasyshen. *Solutions of parabolic equations from families of Banach spaces depending on time*, Mat. Stud. **40** (2013), 172–181.

The aim of the paper is to describe the essentially of the approach which was proposed by S. D. Eidelman and the author. According to this approach the evolution in time of solutions for parabolic equations is characterized by their affiliation to a family of Banach spaces depending on time. Such approach allows one to receive sharp results on a correct solvability and on an integral representation of solutions for the Cauchy problem and boundary-value problems for parabolic equations of various structures. A brief survey of results which are obtained by using this approach are presented. These results are due to the author and his disciples.

С. Д. Ивасишен. *Решения параболических уравнений из семейств банаховых пространств, зависящих от времени* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №2. – С.172–181.

Описана суть предложенного С. Д. Ейдельманом и автором подхода, согласно которому эволюция по времени решений параболических уравнений характеризуется их принадлежностью к семействам банаховых пространств, зависящих от времени. Такой подход даёт возможность получить точные результаты о корректной разрешимости и интегральном представлении решений задачи Коши и краевых задач для параболических уравнений различной структуры. Сделан краткий обзор работ автора и его учеников, в которых реализуется указанный подход.

1. Вступ. Ще в середині минулого століття С.Д. Ейдельман у працях [1–3] з теорії параболічних за Петровським систем запропонував підхід, згідно з яким еволюція по часу t розв'язків задачі Коші характеризується їх належністю до сімейства банахових просторів (при кожному t до свого простору). Виявилось, що такий підхід дає можливість одержати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та зображення розв'язків, визначених у відкритому шарі $(0,T]\times\mathbb{R}^n$, через їх граничні значення на гіперплощині $\{t=0\}$ для параболічних рівнянь різної структури.

Запропонований С. Д. Ейдельманом підхід далі розвивався і багатократно реалізовувався автором та його учнями (далі цей підхід називатимемо „підходом Е-І").

Зауважимо, що вказаний підхід у свій час сподобався М. Г. Крейну, який зацікавлено його обговорював із С. Д. Ейдельманом на конференції з функціонального аналізу (1958 р., Одеса), а його брат С. Г. Крейн, який виступав офіційним опонентом на захисті докторської дисертації С. Д. Ейдельмана (1959 р., Московський університет) пророчив хороше майбутнє цьому підходу. Передбачення видатного математика справдилося.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K30, 35K35, 35K46, 35K70.
Keywords: parabolic equation; degenerate parabolic equation; Cauchy problem; boundary-value problem; weight space of functions and generalized measures; families of Banach spaces depending on time; correct solvability; integral representation; set of initial values.

Мета статті — викласти суть підходу Е-І і зробити короткий огляд відповідних результатів, одержаних автором та його учнями.

У статті розглядаються і характеризуються досить широкі класи U розв'язків параболічних рівнянь. Розв'язки з цих класів визначені в областях $\Pi_T := (0,T\,] \times \mathbb{R}^n$ і $Q_T := (0,T\,] \times \Omega$, де $T > 0$, Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$, і як функції просторової змінної x мають при $|x| \to \infty$ експоненціальний ріст максимально можливого порядку із залежним від t типом.

При реалізації підходу Е-І для класу U вирішуються такі питання:

1) за яких умов існує і є єдиним розв'язок із класу U;
2) якими є множини початкових значень (при $t = 0$) розв'язку і в якому сенсі розв'язок задовольняє початкову умову;
3) за яких умов є правильним інтегральне зображення розв'язку через його початкові значення.

Підхід Е-І реалізується для тих параболічних рівнянь, для яких відома детальна інформація про фундаментальний розв'язок задачі Коші (якщо розв'язки визначені в шарі Π_T) або матрицю Гріна крайової задачі (якщо розв'язки визначені в циліндричній області Q_T).

2. Схема підходу Е-І та загальні результати. Розглянемо параболічне (поки що не уточнюємо в якому сенсі) рівняння

$$(\partial_t - A(t,x,\partial_x))u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = \varphi. \tag{2}$$

Позначимо через Φ простір початкових даних таких, що для кожного $\varphi \in \Phi$ існує єдиний класичний розв'язок u рівняння (1), який належить певному класу U та задовольняє початкову умову (2) у залежному від вибору Φ сенсі.

У працях [1–3] С. Д. Ейдельман для параболічних за Петровським рівнянь (1) виявив, що якщо Φ — простір експоненціально зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій, то відповідний простір U складається із функцій, які для кожного фіксованого $t \in (0,T]$ як функції x експоненціально зростають при $|x| \to \infty$. Тип зростання при цьому, взагалі кажучи, залежить від t. Це означає, що розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_T$, як функція x при кожному фіксованому $t \in (0,T\,]$ належить до деякого банахового простору U_t. Отже, еволюція по часу розв'язків задачі (1), (2) може описуватися їх належністю до відповідних просторів U_t, $t \in (0,T\,]$. Автором у праці [4] доведено, що простір U можна означити як простір класичних розв'язків u рівняння (1), які мають такі властивості

$$\forall\, t \in (0,T]\colon u(t,\cdot) \in U_t; \ \sup_{t\in(0,T]} \|\, u(t,\cdot)\, \|_{U_t} < \infty.$$

Так означений простір U збігається з множиною значень оператора Пуассона P, визначеного на просторі Φ формулами

$$(P\varphi)(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi) \begin{cases} \varphi(\xi)\, d\xi, & \text{якщо}\ \varphi - \text{функція}, \\ d\varphi(\xi), & \text{якщо}\ \varphi - \text{узагальнена міра}, \end{cases} \quad (t,x) \in \Pi_T, \qquad \begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}$$

де Z — фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1). При цьому оператор $P\colon \Phi \to U$ є ізоморфізмом.

Отже, у випадку підходящого вибору простору Φ і знаходження сімейства банахових просторів U_t, $t \in (0, T]$, є правильними такі твердження (див. [5, 6]).

Метатеорема A. *Для будь-якого $\varphi \in \Phi$ існує єдиний класичний розв'язок u рівняння (1) із простору U, який задовольняє початкову умову (2). Цей розв'язок визначається формулою*

$$u = P\varphi\,, \tag{5}$$

а характер задоволення початкової умови (2) залежить від вибору простору Φ.

Метатеорема B. *Для будь-якого класичного розв'язку u рівняння (1) із простору U існує єдиний елемент $\varphi \in \Phi$ такий, що виконується (у відповідному сенсі) початкова умова (2). При цьому є правильним зображення (5).*

Отже, питання про правильність метатеорем A і B зводиться до вибору підходящих просторів Φ і знаходження відповідних сімейств банахових просторів U_t, $t \in (0, T]$.

Досить широкі сімейства просторів Φ і U_t, $t \in (0, T]$, описано в монографії С. Д. Ейдельмана ([3]) для параболічних за Петровським систем. Там же для таких систем доведена метатеорема A. У статті [4] автор поповнив розглянуті С. Д. Ейдельманом сімейства просторів (зокрема, в нього Φ може бути простором узагальнених мір), довів метатеорему B і поширив результати на ширший клас систем — $\overrightarrow{2b}$-параболічних (параболічних за Ейдельманом) систем, які означено та досить детально вивчено в працях [7, 8, 6].

Далі наведемо означення просторів Φ і U_t, $t \in (0, T]$, для різних класів параболічних рівнянь.

3. Параболічні за Петровським рівняння. Розглянемо рівняння вигляду

$$\Big(\partial_t - \sum_{|k|\le 2b} a_k(t,x)\partial_x^k\Big)u(t,x) = 0,\ \ (t,x) \in \Pi_T, \tag{6}$$

в припущенні, що

1) рівняння рівномірно параболічне за Петровським в $\overline{\Pi}_T$;
2) коефіцієнти a_k ($|k| \le 2b$) в $\overline{\Pi}_T$ обмежені, неперервні за t і задовольняють умову Гельдера за x рівномірно стосовно t;
3) існує рівняння, спряжене з рівнянням (6), і його коефіцієнти задовольняють умову 2).

Як відомо [3], за умов 1) і 2) для рівняння (6) існує ФРЗК Z і для Z справджуються оцінки

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-k_0-(n+|k|)/(2b)}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0 \le \tau < t \le T,\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ \ 2bk_0 + |k| \le 2b, \tag{7}$$

де $C > 0$, $c > 0$ і $\rho(t,x,\xi) := t^{1-q}|x-\xi|^q$, $\ q := 2b/(2b-1)$. Якщо ще виконується умова 3), то ФРЗК має властивість нормальності та для нього справджується формула згортки.

Щоб для рівняння (6) означити простори Φ і U_t, $t \in (0, T]$, наведемо такі міркування. Якщо припускати, що початкова функція φ задовольняє нерівність

$$|\varphi(x)| \leq C \exp\{a|x|^q\},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \text{ де }\ a \geq 0, \tag{8}$$

то для розв'язку u рівняння (6), який побудований за функцією φ за допомогою інтеграла Пуассона (3), взагалі кажучи, справджується оцінка $|u(t,x)| \leq C \exp\{k(t,a)|x|^q\}$, $(t,x) \in \Pi_T$.

Використовуючи формулу (3) та оцінки (7) і (8), отримуємо, що для знаходження функції k треба оцінити зверху функцію $f(\xi) := -c_0 t^{1-q}|x-\xi|^q + a|\xi|^q$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, для фіксованих $(t,x) \in \Pi_T$, $a \geq 0$ і $c_0 \in (0,c)$, де c — стала з оцінок (7). Оскільки $f(\xi) \leq -c_0 t^{1-q}||x| - |\xi||^q + a|\xi|^q$, то досить знайти максимум функції $f_0(r) := -c_0 t^{1-q}||x| - r|^q + ar^q$, $r \geq 0$.

Цей максимум дорівнює $k(t,a)|x|^q$, де

$$k(t,a) := c_0 a (c_0^{2b-1} - a^{2b-1} t)^{1-q},\ t \in [0,T], \tag{9}$$

якщо взяти a з проміжку $[0, c_0/T^{1/(2b-1)}]$.

Отже, справджується оцінка

$$-c_0 t^{1-q}|x-\xi|^q + a|\xi|^q \leq k(t,a)|x|^q,\ t \in (0,T],\ \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Зауважимо, що $k(0,a) = a$ і функція (9) має важливу півгрупову властивість

$$k(t-\tau, k(\tau,a)) = k(t,a),\ 0 \leq \tau \leq t \leq T. \tag{11}$$

Означимо вагові функції

$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu k(t,a)|x|^q\},\ (t,x) \in \overline{\Pi}_T, \nu \in \{-1,1\}, \tag{12}$$

якими описуватиметься поведінка при $|x| \to \infty$ функцій з означених нижче просторів.

За простори Φ братимемо простори Φ_p^a, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a < c_0/T^{1/(2b-1)}$, які означимо так.

При $1 < p \leq \infty$ простір Φ_p^a складається із вимірних за Лебегом функцій $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченною норма $\|\,\varphi\,\|_p^a := \|\,\varphi(\cdot)\Psi_{-1}(0,\cdot)\,\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$.

Простір Φ_1^a означимо як простір узагальнених борелевих мір в $\mathbb{R}^n$ φ (тобто зліченно адитивних функцій $\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, де $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевих множин простору $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$\|\,\varphi\,\|_1^a := \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{-1}(0,x)\, d|\varphi|(x) < \infty,$$

де $|\varphi|$ — повна варіація φ.

Просторами U_t, $t \in (0,T]$, які відповідають Φ_p^a, є простори $L_p^{k(t,a)}$ вимірних у сенсі Лебега функцій $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що є скінченною норма $\|\,v\,\|_p^{k(t,a)} := \|\,v(\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\,\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$.

Нехай P — відповідний рівнянню (6) оператор Пуассона, який на елементах $\varphi \in \Phi_p^a$ визначається формулою (3) для $p > 1$ і формулою (4) для $p = 1$.

Для формулювання основних результатів уведемо ще такі простори:

W_1^a — простір усіх вимірних за Лебегом функцій $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких

$$\|\,\eta(\cdot)\Psi_1(T,\cdot)\,\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \infty;$$

W_0^a — простір усіх неперервних функцій $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що $|\eta(x)|\,\Psi_1(T,x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Для рівняння (6), яке задовольняє умови 1)–3), метатеореми A і B мають такий конкретний вигляд.

Теорема 1. *Нехай* $\varphi \in \Phi_p^a$, *де* $1 \le p \le \infty$, $0 \le a < c_0/T^{1/(2b-1)}$. *Тоді існує єдиний класичний розв'язок* u *рівняння (6), який має такі властивості:*

$$\forall\, t \in (0,T]\colon u(t,\cdot) \in L_p^{k(t,a)}, \ \sup_{t\in(0,T]} \|\, u(t,\cdot)\,\|_p^{k(t,a)} < \infty,$$

і задовольняє початкову умову (2) так:

при $1 < p < \infty$ $\lim\limits_{t\to 0} \|\, u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\,\|_p^{k(t,a)} = 0;$

при $p=1$ $\forall\, \eta \in W_0^a\colon \lim\limits_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,d\varphi(x);$

при $p=\infty$ $\forall\, \eta \in W_1^a\colon \lim\limits_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\varphi(x)\,dx.$

Крім того, правильним є зображення (5) і оцінка $\sup_{t\in(0,T]} \|\, u(t,\cdot)\,\|_p^{k(t,a)} \le C \|\, \varphi\,\|_p^a$, *де* $C > 0$ — *стала, яка від* φ *не залежить.*

Теорема 2. *Нехай* u — *класичний розв'язок рівняння (6), який задовольняє умову*

$$\exists\, p \in [1,\infty]\ \exists\, a \in [0, c_0/T^{1/(2b-1)})\colon \ \sup_{t\in(0,T]} \|\, u(t,\cdot)\,\|_p^{k(t,a)} < \infty.$$

Тоді існує єдиний елемент $\varphi \in \Phi_p^a$ *такий, що виконується початкова умова (2) в тому сенсі, який вказаний у теоремі 1, та* u *зображується у вигляді (5).*

Зауваження 1. Наведені результати є правильними для параболічних за Петровським систем першого порядку за t ([4]). У праці [9] вони поширені на параболічні за Петровським системи рівнянь довільних рівних порядків.

4. $\overrightarrow{2b}$**-параболічні рівняння.** Нехай $b_1, \dots, b_n$ — задані натуральні числа, $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \dots, 2b_n)$, $\|\, k\,\| := \sum_{j=1}^n (k_j/(2b_j))$, якщо $k := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Розглянемо рівняння

$$\Big(\partial_t - \sum_{\|k\|\le 1} a_k(t,x)\partial_x^k\Big)u(t,x) = 0, \ (t,x) \in \Pi_T, \tag{13}$$

припускаючи, що воно є рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічним (параболічним за Ейдельманом) у $\overline{\Pi}_T$, тобто

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, \sigma \in \mathbb{R}^n\ \forall\, (t,x) \in \overline{\Pi}_T\colon \mathrm{Re} \sum_{\|k\|=1} a_k(t,x)(i\sigma)^k \le -\delta \sum_{j=1}^n \sigma_j^{2b_j},$$

і що його коефіцієнти задовольняють умови 2) і 3) з п.3.

Згідно з [8] для такого рівняння існує ФРЗК Z, який має потрібні властивості. Зокрема, справджуються оцінки типу (7), в яких

$$\rho(t,x,\xi) := \sum_{j=1}^n t^{1-q_j}|x_j - \xi_j|^{q_j}, \ q_j := 2b_j/(2b_j - 1).$$

Для рівняння (13) тип можливого зростання розв'язків за різними просторовими змінними, взагалі кажучи, різний. Отже, тут маємо справу з типом зростання, який є вектор-функцією $\overrightarrow{k}(t, \overrightarrow{a}) := (k_1(t,a_1), \dots, k_n(t,a_n))$, де $\overrightarrow{a} := (a_1, \dots, a_n)$,

$$k_j(t,a_j) := c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1} t)^{1-q_j}, \ j \in \{1, \dots, n\}. \tag{14}$$

Тут $c_0, a_1, \ldots, a_n$ — задані числа такі, що $c_0 \in (0, c)$, $a_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $T < \min_{j\in\{1,\ldots,n\}} (c_0/a_j)^{2b_j-1}$, де c — стала з оцінок типу (7) ФРЗК. Зауважимо, що для кожної з функцій (14) справджується рівність (11).

У працях [4, 6] доведено, що для рівняння (13) є правильними теореми 1 і 2, в яких Φ_p^a, $L_p^{k(t,a)}$, W_0^a і W_1^a замінено відповідно на простори $\Phi_p^{\vec{a}}$, $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $W_0^{\vec{a}}$ і $W_1^{\vec{a}}$. Ці простори означуються так само, як попередні, тільки в них роль вагових функцій (12) відіграють функції

$$\Psi_\nu(t, x) := \exp\Big\{\nu \sum_{j=1}^{n} k_j(t, a_j)|x_j|^{q_j}\Big\},\ (t, x) \in \overline{\Pi}_T.$$

Зауваження 2. Указані для рівняння (13) результати поширюються на $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи рівнянь першого порядку за t в [4, 6] та довільних рівних порядків у статті [10].

Зауваження 3. У праці [11] для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем наведено вказані для рівняння (13) теореми, в яких за $\Phi_p^{\vec{a}}$ і $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ беруться відповідні вагові простори Орлича.

5. Деякі класи параболічних рівнянь з виродженнями та особливостями. Наведемо класи рівнянь з певними виродженнями та особливостями, для яких установлено теореми, аналогічні теоремам 1 і 2.

5.1. Параболічні за Петровським рівняння з оператором Бесселя — це рівняння вигляду

$$\Big(\partial_t - \sum_{|k|+2j\,\leq\,2b} a_{kj}(t, x, y)\partial_x^k B_y^j\Big)u(t, x, y) = 0,\ (t, x, y) \in \Pi_T \times (0, \infty), \tag{15}$$

де $B_y := \partial_y^2 + ((2\nu + 1)/y)\partial_y$, в припущенні, що $\exists\,\delta > 0\ \forall\sigma \in \mathbb{R}^n\ \forall\eta \in \mathbb{R}\ \forall(t, x, y) \in \overline{\Pi}_T \times [0, \infty):$

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|+2j\,=\,2b} a_{kj}(t, x, y)(i\sigma)^k(-\eta^2)^j \leq -\delta(|\sigma|^{2b} + \eta^{2b}).$$

У статті [12] наведено результати типу теорем 1 і 2 для розв'язків рівняння (15) і систем таких рівнянь, які задовольняють умову

$$\partial_y u(t, x, y)|_{y=0} = 0,\ (t, x) \in \Pi_T. \tag{16}$$

При цьому функція k має вигляд (9).

5.2. Параболічні за Петровським рівняння зі слабким виродженням на початковій гіперплощині — це рівняння вигляду

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t) \sum_{0<|k|\leq 2b} a_k(t, x)\partial_x^k - a_0(t, x)\Big)u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T, \tag{17}$$

в припущенні, що вираз $\partial_t - \sum_{|k|\leq 2b} a_k(t, x)\partial_x^k$ рівномірно параболічний за Петровським у $\overline{\Pi}_T$, функції $\alpha, \beta\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ неперервні й такі, що $\alpha(0)\beta(0) = 0$, $\forall\, t \in (0, T]\colon \alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, β — монотонно неспадна і $\int_0^T d\theta/\alpha(\theta) < \infty$.

У працях [13, 14] доведено теореми, аналогічні теоремам 1 і 2, для рівняння (17) і систем таких рівнянь. При цьому функція k має вигляд

$$k(t,a) := c_0 a(c_0^{2b-1} - a^{2b-1}(T - B(T,t)))^{1-q}, \text{ де } B(T,t) := \int_t^T \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta, \ t \in [0,T].$$

5.3. Деякі параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами. У працях [15–18] знайдено в явному вигляді ФРЗК і доведено теореми, аналогічні теоремам 1 і 2, для таких рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та оператором Бесселя

1)

$$\partial_t u - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_{x_j} \partial_{x_k} u - b \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u) = 0, \tag{18}$$

де $(a_{jk})_{j,k=1}^n$ — додатно визначена матриця зі сталими дійсними елементами, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$k(t,a) := \frac{c_0 a\, e^{2bt}}{c_0 - a q(t)}, \text{ де } q(t) := \frac{1}{2b}(e^{2bt} - 1);$$

2)

$$\partial_t u - \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_{x_j} \partial_{x_k} u - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u) - B_y u = 0,$$

де a_{jk} такі, як у рівнянні (18); $\overrightarrow{k}(t, \overrightarrow{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2))$, $\overrightarrow{a} := (a_1, a_2)$,

$$k_1(t,a_1) := \frac{c_1 a_1 e^{2t}}{c_1 - a_1(e^{2t} - 1)}, \ k_2(t,a_2) := \frac{c_2 a_2}{c_2 - a_2 t},$$

$\Psi_\nu(t,x,y) := \exp\{\nu(k_1(t,a_1)|x|^2 + k_2(t,a_2)y^2)\}$.

У статті [19] наведено теорему типу теореми 1 для $\overrightarrow{2b}$-параболічних (у тому числі параболічних за Петровським) систем зі зростаючими коефіцієнтами за наявності слабких вироджень на початковій гіперплощині.

6. Класи вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. Наведемо класи вироджених параболічних рівнянь, які є природними узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією, до якого прийшов А. М. Колмогоров при вивченні броунівського руху.

Вважатимемо, що змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Відповідно мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_l := (k_{l1}, \ldots, k_{ln_l}) \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$.

Нехай

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}}, \ S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \Big(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 x_{1s} \Big) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \Big(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} \Big) \partial_{x_{3j}},$$

де b_{sj}^1 і b_{sj}^2 — дійсні числа такі, що $\det (b_{sj}^1)_{s,j=1}^{n_2} \ne 0$, $\det (b_{sj}^2)_{s,j=1}^{n_3} \ne 0$.

Розглянемо такі рівняння

$$\Big(S - \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t)\, \partial_{x_1}^{k_1} \Big)\, u \; = \; 0, \tag{19}$$

$$\Big(S - \sum_{\|k_1\|\le 1} a_{k_1}(t)\,\partial_{x_1}^{k_1}\Big)\,u \;=\; 0, \tag{20}$$

$$\Big(S - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\,\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\,\partial_{x_j} - a_0(t,x)\Big)u = 0, \tag{21}$$

$$\Big(S_B - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\,\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\,\partial_{x_j} - a_0(t,x)\Big)u = 0, \tag{22}$$

$$\bigg(\alpha(t)\,\partial_t - \beta(t)\Big(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\,\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\,\partial_{x_{3j}} + \sum_{0<\|k_1\|\le 1} a_{k_1}(t)\,\partial_{x_1}^{k_1}\Big) - a_0(t)\bigg)\,u \;=\; 0, \tag{23}$$

де $|k_1| := \sum_{j=1}^{n_1} k_{1j}$ і $\|k_1\| := \sum_{j=1}^{n_1}(k_{1j}/(2b_j))$ для $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $b, b_1, \ldots, b_{n_1}$ — задані натуральні числа, функції α і β такі, як у рівнянні (17).

Припускається, що $\exists\,\delta > 0\,\forall\,\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}\;\forall\,t \in [0,T]\;\forall\,(t,x) \in \overline{\Pi}_T$:

$$\mathrm{Re}\sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t)\,(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta|\sigma_1|^{2b},\;\; \mathrm{Re}\sum_{\|k_1\|=1} a_{k_1}(t)\,(i\sigma_1)^{k_1} \le -\delta\sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}^{2b_j},$$

$$\mathrm{Re}\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1s} \ge \delta|\sigma_1|^2.$$

Отже, рівняння (19)–(23) є виродженими (за двома групами змінних x_2 і x_3) параболічними рівняннями. Якщо є виродження тільки за однією групою змінних x_2, то відповідні рівняння формально одержуються із (19)–(23), якщо в них покласти $n_3 = 0$.

Теореми, подібні до теорем 1 і 2, встановлено для рівняння (19) у працях [20, 21, 6], рівняння (20) — у [22–24, 6], рівняння (21) — у [25, 6], рівняння (22) — у [26, 27] і рівняння (23) — у [28, 29].

7. Деякі параболічні крайові задачі. У статті [30] встановлено результати типу теорем 1 і 2 для розв'язків параболічних за Петровським систем, які визначені в необмеженій циліндричній області Q_T і на бічній поверхні цієї області задовольняють нормальні однорідні крайові умови.

Праця [31] містить аналогічні результати для розв'язків параболічних за Петровським систем в області Q_T, коефіцієнти яких мають розриви першого роду на внутрішніх гіперповерхнях (поверхнях спряження), а також параболічних систем з оператором Бесселя в області $Q_T \times (0,\infty)$. Розв'язки, які розглядаються, задовольняють нормальні однорідні крайові умови та умови спряження.

8. Розв'язки із просторів Гельдера зростаючих функцій. У великій серії праць автора та його учнів установлено точні результати про коректну розв'язність задачі Коші, початкових та крайових задач для параболічних за Петровським, Ейдельманом і Солонниковим систем у просторах Гельдера функцій, які за змінними x мають експоненціальний ріст максимального порядку, а тип росту $k(\cdot)$ залежить від змінної t (простори з функцією $k(\cdot)$). Точність указаних результатів виражається у точній залежності, в термінах належності до відповідних просторів з функцією $k(\cdot)$, гладкості та поведінки при $|x| \to \infty$ розв'язків від гладкості й такої ж поведінки правих частин відповідних задач.

Основними працями з вищевказаної серії, наведеними в хронологічному порядку, є праці [32, 33, 8, 34–38, 6, 39–42].

ЛІТЕРАТУРА

1. Eidelman S.D. *Fundamental matrices of solutions of general parabolic systems*// Dokl. AN SSSR. – 1958. – V.120, №5. – P. 980–983. (in Russian)
2. Eidelman S.D. *On fundamental solutions of parabolic systems. II*// Mat. Sbornik. – 1961. – V.53, №1. – P. 73–136. (in Russian)
3. Eidelman S.D. Parabolic systems. – Moscow: Nauka, 1964. – 443 p. (in Russian) English edition: North-Holland, Amsterdam, 1969.
4. Ivasyshen S.D. *Integral representation and initial values of solutions of $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems*// Ukr. Math. Zh. – 1990. – V.42, №4. – P. 500–506. (in Russian)
5. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D. *On solutions of parabolic equations from families of Banach spaces dependent on time*// Operator Theory: Adv. and Appl. – 2000. – V.117. – P. 111–125.
6. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*// Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – V.152. – 390 p.
7. Eidelman S.D. *On a class of parabolic systems*// Dokl. AN SSSR. – 1960. – V.133, №1. – P. 40–43. (in Russian)
8. Ivasyshen S.D., Eidelman S.D. *$\overrightarrow{2b}$-parabolic systems*// Trudy Sem. Funkt. Anal. – Kiev, Inst. Mat. AN Ukr. SSR. – 1968. – V.1. – P. 3–175, 271–273. (in Russian)
9. Ivasyshen S.D., Kondur O.S. *Properties of some class of solutions for the homogeneous parabolic by Peyrovski system of arbitrary order*// Dop. NAN Ukr. – 1996. – №11. – P. 12–15. (in Ukrainian)
10. Ivasyshen S.D., Kondur O.S. *On the Green matrix of the Cauchy problem and the characterization of certain classes of solutions for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems of an arbitrary order*// Mat. Stud. – 2000. – V.14, №1. – P. 73–84. (in Ukrainian)
11. Ivasyshen S.D., Dutchak T.V. *Integral representations and initial values of solutions for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems from weighting Orlich spaces*// Visnyk. Kyiv. Univer. Matematyka i mechanika. – 1989. – V.31. – P. 27–33. (in Ukrainian)
12. Ivasyshen S.D., Lavrenchuk V.P. *On a integral representation of solutions for the parabolic system of linear equations with Bessel operator*// Nelineinye granichnye zadachi: mezhved. sbornik nauch. tr. – 1992. – V.4. – P. 19–25. (in Russian)
13. Voznyak O.G., Ivasyshen S.D. *The Cauchy problem for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane*// Dop. AN Ukr. – 1994. – №6. – P. 7–11. (in Ukrainian)
14. Voznyak O.G. *On integral representations of solutions for parabolic systems with the degeneration on the initial hyperplane*// Materialy mizhnar. mat. conf., prysviach. pamiati Hansa Hana. – Chernivtsi: Ruta, 1995. – P. 42–60. (in Ukrainian)
15. Balabushenko T.M., Ivasyshen S. D., Lavrenchuk V.P., Melnychuk L.M. *The fundamental solutions of the Cauchy problem for some parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients*// Nauk. Visnyk Cherniver. Univer. – 2006. – V.288. – P. 5–11. (in Ukrainian)
16. Balabushenko T.M., Ivasyshen S. D., Lavrenchuk V.P., Melnychuk L.M. *The Cauchy problem for some parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients*// Nauk. Visnyk Cherniver. Univer. – 2006. – V. 314–315. – P. 7–16. (in Ukrainian)
17. Balabushenko T.M., Ivasyshen S. D., Lavrenchuk V.P., Melnychuk L.M. *The integral of solutions some parabolic equations with Bessel operator and increasing coefficients*// Nauk. Visnyk Cherniver. Univer. – 2007. – V.336–337. – P. 7–15. (in Ukrainian)
18. Ivasyshen S.D., Pasichnyk H.S. *Cauchy problem for the Fokker–Planck–Kolmogorov equation of multidimensional normal Markov process*// Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. – 2010. – V.53, №1. – P. 15–22. (in Ukrainian)
19. Ivasyshen S.D., Pasichnyk G.S. *On the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with increasing coefficients*// Ukr. Mat. Zh. – 2000. – V.52, №11. – P. 1484–1496. (in Ukrainian)
20. Ivasyshen S.D., Androsova L.N. *On integral representation and initial values of solutions of certain degenerate parabolic equations*// Dokl. AN Ukr. SSR. Ser. A. – 1989. – №1. – P. 16–19. (in Russian)
21. Ivasyshen S.D., Androsova L.N. *Integral representation of solutions of a class of degenerate parabolic Kolmogorov equations*// Diff. Uravn. – 1991. – V.27, №3. – P. 479–487. (in Russian)

22. Ivasyshen S.D., Eidelman S.D. *$\overrightarrow{2b}$-parabolic equations with degeneration in some of the variables*// Dokl. AN. – 1998. – V.360, №3. – P. 303–305. (in Russian)
23. Ivasyshen S.D., Eidelman S.D. *On the Cauchy problem for degenerate equations of Kolmogorov type with a $\overrightarrow{2b}$-parabolic part with respect to the main group of variables*// Diff. Uravn. – 2000. – V.36, №4. – P. 527–536. (in Russian)
24. Ivasyshen S.D., Eidelman S.D. *On the integral representation of solutions of Kolmogorov type degenerate equations with a $\overrightarrow{2b}$-parabolic part with respect to the main group of variables*// Diff. Uravn. – 2000. – V.36, №5. – P. 647–655. (in Russian)
25. Dron' V.S., Ivasyshen S.D. *On correct solvability of the Cauchy problem degenerate parabolic equations of Kolmogorov type*// Ukr. Mat. Visnyk. – 2004. – V.1, №1. – P. 61–68. (in Ukrainian)
26. Ivasyshen S.D., Lajuk V.V. *The Cauchy problem for some degenerate parabolic Kolmogorov type equations*// Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. – 2007. – V.50, №3. – P. 56–65. (in Ukrainian)
27. Ivasyshen S.D., Lajuk V.V. *Characterization solutions for some class ultraparabolic equations of Kolmogorov type*// Ukr. Mat. Visnyk. – 2010. – V.7, №1. – P. 1–38. (in Ukrainian)
28. Voznyak O.G. , Ivasyshen S.D. *Fundamental solutions of the Cauchy problem for a class of parabolic equations, and their applications*// Dop. NAN Ukr. – 1996. – №10. – P. 11–16. (in Ukrainian)
29. Ivasyshen S.D.,Voznyak O.G. *On fundamental solutions of the Cauchy problem for a class of degenerate parabolic equations*// Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. – 1998. – V.41, №2. – P. 13–19. (in Ukrainian)
30. Ivasyshen S.D., Kondur O.S. *On integral representations of solutions for normal parabolic boundary problems*// Integralni peretvorennia ta ich zastosuvannia do kraiovych zadach: zb. nauk. pr. – Keiv: Inst. Mat. AN Ukr. – 1993. – V.4. – P. 82–96. (in Ukrainian)
31. Kondur O.S. *Normal parabolic boundary problems with discontinuous coefficients*// Dop. AN Ukr. – 1994. – №12. – P. 18–22. (in Ukrainian)
32. Ivasyshen S.D. *A priory estimates of solutions for the $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems*// Dop. AN Ukr. RSR. – 1965. – №9. – P. 1121–1125. (in Ukrainian)
33. Ivasyshen S.D., Lavrenchuk V.P. *On solvobility for the Cauchy problem and boundary problems for general parabolic systems in a class of increasing functions*// Dop. AN Ukr. RSR. Ser. A. – 1967. – №4. – P. 299–303. (in Ukrainian)
34. Ivasyshen S.D. *Integral representations solutions for general parabolic boundary problems and correct solvability in spaces of increasing functions*// Dop. AN Ukr. RSR. Ser. A. – 1973. – №7. – P. 596–599. (in Ukrainian)
35. Ivasyshen S.D., Lavrenchuk V.P. *On correct solvability general boundary problems for parabolic system with increasing coefficients*// Ukr. Mat. Zh. – 1978. – V.30, №1. – P. 100–106. (in Russian)
36. Ivasyshen S.D. *On correct solvability parabolic boundary problems in spaces of increasing functions*// Ukr. Mat. Zh. – 1982. – V.34, №1. – P. 25–30. (in Russian)
37. Ivasyshen S.D. Green matrices of parabolic boundary value problems. – Kiev: Vyshcha shkola, 1990. – 200 p. (in Russian)
38. Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. *Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane*// Mat. Metody Fiz.-Mech. Polya. – 2003. – V.46, №3. – P. 15–24. (in Ukrainian)
39. Ivasyshen S.D., Medynsky I.P. *A priory estimates of solutions for $\overrightarrow{2b}$-parabolic system with the degeneration on the initial hyperplane*// Nelin. analiz: Pr. Ukr. Mat. Kongres-2001, Kyiv: Ins. Mat. NAN Ukr. – 2006. – P. 28–41. (in Ukrainian)
40. Ivasyshen S.D., Ivasyuk H.P. *Solonnikov parabolic systems with quasihomogeneous structure*// Ukr. Mat. Zh. – 2006. – V.58, №11. – P. 1501–1510. (in Ukrainian)
41. Ivasyshen S.D., Ivasyuk H.P. *Initial value problems for Solonnikov–Eidelman parabolic systems*// Dop. NAN. Ukr. – 2007. – №9. – P. 7–11. (in Ukrainian)
42. Ivasyshen S.D., Ivasyuk H.P. *Correct solvability Solonnikov–Eidelman initial value problems*// Ukr. Mat. Zh. – 2009. – V.61, №5. – P. 650–671. (in Ukrainian)

National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute"
ivasyshen_sd@mail.ru

Надійшло 29.06.2013