УДК 517.95

М. М. Бокало, Г. П. Доманська

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНО-ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

M. M. Bokalo, H. P. Domanska. *Initial-boundary-value problem for linear elliptic-parabolic-pseudoparabolic equations*, Mat. Stud. **40** (2013), 193–197.

Well-posedness of the initial-boundary-value problem for linear elliptic-parabolic-pseudoparabolic equations are proved. An estimate of the generalized solution of this problem are received.

М. М. Бокало, Г. П. Доманская. *Смешанная задача для линейных эллиптическо-параболическо-псевдопараболических уравнений* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №2. – С.193–197.

Доказана корректность смешанной задачи для линейных эллиптическо-параболическо-псевдопараболических уравнений. Также получена оценка обобщенного решения рассматриваемой задачи.

Псевдопараболічні рівняння широко використовуються при описі різноманітних процесів в природі (див., наприклад, роботи [1]–[3] і цитування там). Тут нас цікавлять вироджувані псевдопараболічні рівняння, а точніше, такі лінійні диференціальні рівняння, які на певних підмножинах їх областей визначення є псевдопараболічними, а на інших — параболічними або навіть еліптичними, тобто, так звані, еліптично-параболічно-псевдопараболічні рівняння. Ми досліджуємо коректність мішаної задачі для таких рівнянь. Умови коректності різних задач для вироджуваних псевдопараболічних рівнянь та властивості їх розв'язків були предметом вивчення в багатьох працях, серед яких [4]–[11]. Найбільш близькими до наших є результати, отримані в [4], [6], [7]. Але там основна увага звернута на абстрактні вироджувані еволюційні рівняння і нема чіткої конкретизації отриманих результатів на випадок диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, це стосується класів початкових даних. Тут ми розв'язуємо цю проблему відносно лінійних еліптично-параболічно-псевдопараболічних рівнянь. Крім того, використання нами для доведення існування узагальненого розв'язку мішаної задачі комбінації методів регуляризації і Гальоркіна дозволяє конструктивно будувати наближення цього розв'язку. Як нам відомо, такий підхід використовують тільки в [6], але там, на відміну від нашого випадку, розглядають рівняння, коефіцієнти яких не залежать від часової змінної.

1. Постановка задачі та формулювання основного результату. Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $T > 0$. Приймемо $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.
Keywords: elliptic-parabolic-pseudoparabolic equation; degenerated pseudoparabolic equation.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u\colon \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (у відповідному сенсі) рівняння

$$\Big(b_0(x)u - \sum_{i=1}^{n}(b_i(x)u_{x_i})_{x_i}\Big)_t - \sum_{i,j=1}^{n}\big(a_{ij}(x,t)u_{x_i}\big)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)u = f(x,t), \quad (1)$$

$(x,t) \in Q$, та крайову і початкову умови

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ при } x \in \Omega_0, \quad (2)$$

припускаючи, що f, u_0 — деякі функції (точніше про них буде сказано пізніше) та

(A) $a_0,\ a_i,\ a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j \in \{1,\dots,n\})$ — вимірні і обмежені на Q функції; існує стала $\lambda > 0$ така, що $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \lambda \sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $(\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$;

(B) для кожного $i \in \{0,1,\dots,n\}$ функція $b_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — вимірна, невід'ємна і обмежена, а множина $\Omega_i := \{x \in \Omega \,|\, b_i(x) > 0\}$ — відкрита (зокрема, порожня) і $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega'} b_i(x) > 0$ для будь-якої відкритої множини Ω', яка є строго внутрішньою в Ω, тобто $\overline{\Omega'} \subset \Omega$; крім того, $\Omega_i \subset \Omega_0$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Введемо потрібні нам далі функційні простори. Під $C_0^\infty(\Omega)$ розумітимемо простір нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм в Ω, а під $C_0^1(0,T)$ — простір неперервно-диференційовних функцій з компактним носієм в $(0,T)$. Нехай $L^p(G)$ і $H^1(G)$, де $p \in [1,\infty]$, G — область, яка співпадає з Ω або Q, — простори відповідно Лебега та Соболєва зі стандартними нормами. Замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $H^1(\Omega)$ позначатимемо через $H_0^1(\Omega)$. Якщо X — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$, то під $L^p\big(0,T;X\big)$ розумітимемо банахів простір вимірних функцій $v\colon (0;T) \to X$, для яких $\|v\|_{L^p(0,T;X)} = (\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt)^{1/p} < \infty$.

Нехай $\widetilde{b}_0(x) = b_0(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, і $\widetilde{b}_0(x) = 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Позначимо через $\widetilde{H}^b(\Omega)$ лінійний простір, складений з функцій w, які мають зображення $w = \widetilde{b}_0^{-1/2}v$, де функція $v \in L^2(\Omega)$ така, що для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$ звуження функції w на Ω_i має узагальнену похідну $w_{x_i} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega_i)$, причому $b_i^{1/2}w_{x_i} \in L^2(\Omega_i)$ (далі для спрощення записів будемо вважати, що $b_i^{1/2}w_{x_i} \in L^2(\Omega)$). Введемо на $\widetilde{H}^b(\Omega)$ півнорму за правилом $|\!|\!|w|\!|\!| := (\|b_0^{1/2}w\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\|b_i^{1/2}w_{x_i}\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$. Очевидно, що $\widetilde{H}^b(\Omega)$ є поповненням простору $H_0^1(\Omega)$ за півнормою $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$.

Введемо ще простір $C([0,T];\widetilde{H}^b(\Omega))$, складений з тих функцій $h\colon [0,T] \to \widetilde{H}^b(\Omega)$, для яких $b_0^{1/2}h \in C([0,T];L^2(\Omega))$ та $b_i^{1/2}h_{x_i} \in C([0,T];L^2(\Omega))$ $(i \in \{1,\dots,n\})$, і наділений півнормою $\|h\|_{C([0,T];\widetilde{H}^b(\Omega))} := \max\limits_{t\in[0,T]}\|b_0^{1/2}(\cdot)h(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}\max\limits_{t\in[0,T]}\|b_i^{1/2}(\cdot)h_{x_i}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$.

Приймемо $\mathbb{U} := L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];\widetilde{H}^b(\Omega))$ і введемо сім'ю білінійних форм $A(t;v,w) := \int_\Omega\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)v_{x_i}w_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)v_{x_i}w + a_0(x,t)vw\}dx$, $v,w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in (0,T)$, та білінійну форму $B(v,w) := \int_\Omega\{b_0(x)vw + \sum_{i=1}^{n}b_i(x)v_{x_i}w_{x_i}\}dx$, $v,w \in \widetilde{H}^b(\Omega)$. Очевидно, що $|\!|\!|w|\!|\!| := \big(B(w,w)\big)^{1/2}$.

Нехай $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in \widetilde{H}^b(\Omega)$. *Узагальненим розв'язком задачі* (1), (2) називатимемо функцію $u \in \mathbb{U}$, яка задовольняє початкову умову

$$|\!|\!|u(\cdot,0) - u_0(\cdot)|\!|\!| = 0 \quad (3)$$

та рівність

$$\int_0^T \big\{ -B\big(u(\cdot,t),v(\cdot)\big)\varphi'(t) + A\big(t;u(\cdot,t),v(\cdot)\big)\varphi(t)\big\}dt = \int_0^T \big(f(\cdot,t),v(\cdot)\big)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt \quad (4)$$

для будь-яких $v \in H_0^1(\Omega)$ та $\varphi \in C_0^1(0,T)$.

Основний результат нашої роботи сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема. *Нехай $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in \widetilde{H}^b(\Omega)$, виконуються умови (A), (B) і нерівність $\mu^2 < 4\lambda\varkappa$, де $\varkappa := \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q} a_0(x,t)$, $\mu := \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q}(\sum_{i=1}^n |a_i(x,t)|^2)^{1/2}$. Тоді задача (1), (2) має і тільки один узагальнений розв'язок. Крім того, правильна оцінка*

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t)\|^2 + \int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \le C_1\Big\{\|u_0(\cdot)\|^2 + \int_0^T \|f(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt\Big\}, \quad (5)$$

де $C_1 > 0$ — стала, яка не залежить від u, u_0, f.

2. Обґрунтування основного результату. Наведемо допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай виконується умова (B) і функція w з простору $L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ така, що для деяких функцій $g_j (j \in \{0,\dots,n\})$ з простору $L^2(Q)$ правильна тотожність*

$$-\int_0^T B\big(w(\cdot,t),v(\cdot)\big)\varphi'(t)\,dt + \int_0^T\int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n g_i v_{x_i} + g_0 v\Big)\varphi\,dxdt = 0,\ v \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \in C_0^1(0,T).$$

Тоді $w \in C\big([0,T];\widetilde{H}^b(\Omega)\big)$ і для будь-яких $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in H_0^1(\Omega)$ і $t_1,t_2 \in [0,T]$ $(t_1 < t_2)$ правильні такі рівності

$$B\big(w(\cdot,t_2),v(\cdot)\big)\theta(t_2) - B\big(w(\cdot,t_1),v(\cdot)\big)\theta(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} B\big(w(\cdot,t),v(\cdot)\big)\theta'(t)dt +$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Big\{g_0(x,t)v(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x,t)v_{x_i}(x)\Big\}\theta(t)dxdt = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2)\|w(\cdot,t_2)\|^2 - \frac{1}{2}\theta(t_1)\|w(\cdot,t_1)\|^2 - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|w(\cdot,t)\|^2\theta'(t)\,dt +$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Big\{g_0(x,t)w(x,t) + \sum_{i=1}^n g_i(x,t)w_{x_i}(x,t)\Big\}\theta(t)dxdt = 0. \quad (7)$$

Дане твердження доводиться аналогічно, як лема 1([12]).

Лема 2. *Нехай виконується умова теореми. Тоді існує стала $\alpha > 0$ така, що для м.в. $t \in (0,T)$ правильна нерівність $A(t;v,v) \ge \alpha\|v\|^2_{H^1(\Omega)}$, $v \in H_0^1(\Omega)$.*

Доведення теореми. Доведення проводиться безпосередньо, використовуючи умови леми та нерівність Коші. Нехай $\{w_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ — система лінійно незалежних функцій з $C_0^1(\overline{\Omega})$, яка є повною в $H_0^1(\Omega)$. Очевидно, що ця система буде повною і в $\widetilde{H}^b(\Omega)$. Покладемо $U_m := \big\{d_1w_1 + \dots + d_mw_m | d_1,\dots,d_m \in \mathbb{R}\big\}$, $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, що замикання $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$ за нормою $H^1(\Omega)$ співпадає з $H_0^1(\Omega)$, а за півнормою $\|\cdot\|$ — з $\widetilde{H}^b(\Omega)$.

Виберемо послідовність $\{u_{0,m}\}_{m=1}^\infty$ таку, що $u_{0,m} \in U_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ і $\|u_0 - u_{0,m}\| \to 0$ $(m \to +\infty)$.

Зауважимо, що для довільного $\eta \in (0,1]$ та м.в. $x \in \Omega$: $|b_j^{1/2}(x) - (b_j(x)+\eta)^{1/2}|^2 \times \times|\partial_j u_{0,m}(x)|^2 \le 4(b_j(x)+1)|\partial_j u_{0,m}(x)|^2$, $j \in \{0,\dots,n\}$, де тут і далі використано позначення: $\partial_0 v := v$, $\partial_i v := v_{x_i}$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Враховуючи це, на підставі теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла маємо $\|b_j^{1/2}\partial_j u_{0,m} - (b_j+\eta)^{1/2}\partial_j u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ $(\eta \to 0)$, $j \in \{0,\dots,n\}$.

Виберемо послідовності $\{\eta_{j,m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(j \in \{0,\dots,n\})$ такі, що $\eta_{j,m} \to 0+$ $(m \to +\infty)$, $(j \in \{0,\dots,n\})$ і

$$\|b_j^{1/2}\partial_j u_{0,m} - (b_j+\eta_{j,m})^{1/2}\partial_j u_{0,m}\|_{L^2(\Omega)} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ j \in \{0,\dots,n\}. \tag{8}$$

Нехай $b_{j,m}(x) := b_j(x) + \eta_{j,m}$, $x \in \Omega$, $j \in \{0,\dots,n\}$; $B_m(v,w) := \int_\Omega \{b_{0,m}vw + + \sum_{i=1}^n b_{i,m}v_{x_i}w_{x_i}\}dx$, $v,w \in H_0^1(\Omega)$. Очевидно, що білінійна форма $B_m(\cdot,\cdot)$ є додатно визначеною.

На підставі $|\!|\!| u_0 - u_{0,m} |\!|\!| \to 0$ $(m \to +\infty)$ і співвідношення (8) матимемо

$$\left\|b_j^{1/2}\partial_j u_0 - b_{j,m}^{1/2}\partial_j u_{0,m}\right\|_{L^2(\Omega)} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ j \in \{0,\dots,n\};\ B_m(u_{0,m},u_{0,m}) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} B(u_0,u_0). \tag{9}$$

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ визначимо $u_m(x,t) := \sum_{k=1}^m c_{m,k}(t)w_k(x)$, $(x,t) \in \overline{Q}$, так, щоб виконувались рівності

$$B_m\big(u_{m,t}(\cdot,t), w_l(\cdot)\big) + A\big(t; u_m(\cdot,t), w_l(\cdot)\big) = (f(\cdot,t), w_l(\cdot))_{L^2(\Omega)}, t \in (0,T), l \in \{1,\dots,m\}, \tag{10}$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0,m}. \tag{11}$$

Очевидно, що співвідношення (10), (11), з яких визначається u_m, є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь стосовно функцій $c_{m,1},\dots,c_{m,m}$. Цю систему можна записати в нормальній формі і до отриманої задачі Коші застосувати теорему Каратеодорі. Звідси випливає існування функції u_m, яка визначена на $[0,T]$ і задовольняє співвідношення (10), (11).

Для кожного $l \in \{1,\dots,m\}$ l-ту рівність системи (10) домножимо на c_l, отримані рівності підсумуємо та проінтегруємо по $[0,\tau] \subset [0,T]$. У результаті, використавши лему 2, здобудемо нерівність, з якої на підставі (9) отримаємо

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega \Big(\sum_{j=0}^n b_{j,m}(x)|\partial_j u_m(x,t)|^2\Big)dx + \iint_Q \Big(\sum_{j=0}^n |\partial_j u_m|^2\Big)dxdt \le C_2,$$

де $C_2 > 0$ — стала, яка не залежить від m. Звідси випливає

$$u_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{12}$$

$$b_{j,m}^{1/2}\partial_j u_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} b_j^{1/2}\partial_j u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\ \ j \in \{0,\dots,n\}. \tag{13}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2). Нехай l, m — які-небудь натуральні числа, причому $l \le m$. Домножимо l-ту рівність з (10) для вибраного m на функцію $\theta \in C^1\big([0,T]\big)$ таку, що $\theta(T) = 0$, та зінтегруємо цю рівність за $t \in [0,T]$. Спрямувавши в отриманій рівності m до нескінченності, на підставі (9), (12), (13) і того, що $b_{j,m}^{1/2} \to b_j^{1/2}(m \to +\infty)$ в $L^2(\Omega)$ $(j \in \{0,\dots,n\})$, матимемо рівність, з якої, в силу довільності l та того, що система $\{w_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ щільна в $H_0^1(\Omega)$, випливає рівність $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$-\theta(0)B(u_0(\cdot),v(\cdot)) - $$

$$-\int_0^T B\big(u(\cdot,t),v(\cdot)\big)\theta'(t)dt + \int_0^T \big\{A\big(t;u(\cdot,t),v(\cdot)\big) - (f(\cdot,t),v(\cdot))_{L^2(\Omega)}\big\}\theta(t)dt = 0. \tag{14}$$

Зауважимо, що з (14) та леми 1 випливає, що $u \in C\big([0,T]; \widetilde{H}^b(\Omega)\big)$ і

$$-\theta(0)B\Big(u(\cdot,0),v(\cdot)\Big) - \int_0^T B\big(u(\cdot,t),v(\cdot)\big)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \big\{A\big(t;u(\cdot,t),v(\cdot)\big)- \\ -\big(f(\cdot,t),v(\cdot)\big)_{L^2(\Omega)}\big\}\theta(t)\,dt = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\, \theta \in C^1([0,T]), \theta(T)=0. \tag{15}$$

З (14) та (15) отримаємо рівність $B(u(\cdot,0),v(\cdot)) = B(u_0(\cdot),v(\cdot))$ для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$, що доводить правильність рівності (3). Отже, з (3) та (15) випливає, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2).

Єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2) доводимо від супротивного. Нехай u_1 та u_2 — різні узагальнені розв'язки задачі (1), (2). Розглянемо різницю тотожностей, отриманих з (4) відповідно при $u = u_1$ та $u = u_2$. До отриманої тотожності, поклавши $w := u_1 - u_2$, застосуємо лему 1 при $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \tau \in (0,T]$. З отриманої рівності (див. (7)) на підставі леми 2 випливає, що $w = 0$ майже скрізь в Q, тобто $u_1 = u_2$. Отримали протиріччя, що доводить наше твердження. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Sobolev S.L. *Some new problems in mathematical physics*// Izv. Akad. nauk SSSR. Ser. mat. – 1954. – V.18. – P. 3–50.
2. Barenblatt G.I., Zheltov Iv.P., Kochina I.N. *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks*// Prykl. matem. i mehan. – 1960. – V.24, №5. – P. 58–73.
3. Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Thredimentional nonlinear evolution equations of pseudoparabolic type in problems of mathematical physics*// Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki. – 2003. – V.43, №12. – P. 1835–1869.
4. Showalter R.E. *Degenerate evolution equations and applications*// Indiana Univ. Math. J. – 1974. – V.23, №8. – P. 655–677.
5. Pao C.V. *Boundary-value problems of a degenerate Sobolev-type differential equation*// Can. Math. Bull. – 1977. – V.20, №2. – P. 221–228.
6. Kuttler K.L. *The Galerkin method and degenerate evolution equations*// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1985. – V.107. – P. 396–413.
7. Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Mathematical surveys and monographs, 49, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
8. Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. – New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1999.
9. Malovichko V.A. *On boundary value problems for degenerate pseudoparabolic and pseudohyperbolic systems*// Differents. uravnenija. – 1991. – V.27, №12. – P. 2120–2124.
10. Kozhanov A.I. *Degenerate equations of Sobolev type*// Neklassicheskije uravnenija matematicheskoj fiziki: III Sibirskij kongress po prikladnoj i industrialnij matematike, 1998. – P. 4–13. (in Russian)
11. Egorov I.E., Pjatkov S.G., Popov S.V. Nonclassical differential-operator equations. – Novosibirsk: Nauka, 2000. (in Russian)
12. Bokalo M.M., Pauchok I.B. *On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity*// Mat. Stud. – 2006. – V.24, №1. – P. 25–48. (in Ukrainian)

Ivan Franko National University of Lviv
mm.bokalo@gmail.com
h.domanska@gmx.net

Надійшло 27.05.2013
Після переробки 21.11.2013