УДК 517.124.4

В. В. Билет, А. А. Довгошей

ПРЕДКАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПО АЛЕКСАНДРОВУ КРИВИЗНОЙ

V. V. Bilet, O. A. Dovgoshey. *Pretangent spaces with nonpositive and nonnegative Aleksandrov curvature*, Mat. Stud. **40** (2013), 198–208.

We find conditions under which the pretangent spaces to general metric spaces have the nonpositive Aleksandrov curvature or nonnegative one. The infinitesimal structure of general metric spaces with Busemann convex pretangent spaces is also described.

В. В. Билет, А. А. Довгошей. *Предкасательные пространства с неположительной и неотрицательной по Александрову кривизной* // Мат. Студії. – 2013. – Т.40, №2. – C.198–208.

Мы находим условия, при которых предкасательные пространства к общим метрическим пространствам имеют неположительную или неотрицательную кривизну по Александрову. Также описана инфинитезимальная структура общих метрических пространств с выпуклыми по Буземану предкасательными пространствами.

1. Введение. Предкасательные и касательные пространства, используемые в настоящей работе, были введены в [8] (см. также [9]). Напомним необходимые определения.

Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Зафиксируем последовательность $\tilde{r}$ положительных вещественных чисел r_n, стремящихся к нулю. Назовём $\tilde{r}$ *нормирующей* последовательностью. Будем обозначать через $\tilde{X}$ множество всех последовательностей точек из X.

Определение 1. Две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *взаимностабильны относительно нормирующей последовательности* $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} := \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{1}$$

Семейство $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ *самостабильное*, если любые две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{F}$ взаимностабильны, $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ — *максимальное самостабильное*, если $\tilde{F}$ самостабильное и для произвольной $\tilde{z} \in \tilde{X} \setminus \tilde{F}$ существует $\tilde{x} \in \tilde{F}$ такая, что $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ не взаимностабильны. Из леммы Цорна легко следует, что для каждой нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует максимальное самостабильное семейство $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ такое, что постоянная последовательность $\tilde{p} = \{p, p, ...\} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54E35.
Keywords: pretangent space; CAT(0)-space; Aleksandrov curvature; Busemann convexity; infinitesimal geometry of metric spaces.

Рассмотрим функцию $\tilde{d}\colon \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \times \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \to \mathbb{R}$, где $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y})$ определена через (1). Очевидно, $\tilde{d}$ симметрична и неотрицательна. Кроме того, из неравенства треугольника для d имеем $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) \le \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z},\tilde{y})$ для всех $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. Следовательно $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$ — псевдометрическое пространство.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ как $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$. Обозначим через $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ множество всех классов эквивалентности на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$, порождённых отношением $\sim$. Для $\alpha,\beta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ положим $\rho(\alpha,\beta) = \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})$, где $\tilde{x} \in \alpha$ и $\tilde{y} \in \beta$, тогда ρ — метрика на $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$. Переход от псевдометрического пространства $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$ к метрическому пространству $(\Omega^X_{p,\tilde{r}}, \rho)$ будем называть *метрической идентификацией* $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$.

Определение 2. Пространство $(\Omega^X_{p,\tilde{r}}, \rho)$ называется *предкасательным к* X в точке p относительно нормирующей последовательности $\tilde{r}$.

Пусть $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — бесконечная, строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\tilde{r}'$ подпоследовательность $\{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и пусть $\tilde{x}' := \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ для каждой $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$. Ясно, что если $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ взаимностабильны относительно $\tilde{r}$, то $\tilde{x}'$ и $\tilde{y}'$ взаимостабильны относительно $\tilde{r}'$ и $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}'}(\tilde{x}',\tilde{y}')$. Если $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное относительно $\tilde{r}$ семейство, тогда, по лемме Цорна, существует максимальное самостабильное относительно $\tilde{r}'$ семейство $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$ такое, что $\{\tilde{x}'\colon \tilde{x} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}\} \subseteq \tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$.

Обозначим через $in_{\tilde{r}'}$ отображение из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ в $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$ с $in_{\tilde{r}'}(\tilde{x}) = \tilde{x}'$ для всех $\tilde{x} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. После метрической идентификации отображение $in_{\tilde{r}'}$ переходит в изометрическое вложение $em'\colon \Omega^X_{p,\tilde{r}} \to \Omega^X_{p,\tilde{r}'}$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_{p,\tilde{r}} & \xrightarrow{in_{\tilde{r}'}} & \tilde{X}_{p,\tilde{r}'} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ \Omega^X_{p,\tilde{r}} & \xrightarrow{em'} & \Omega^X_{p,\tilde{r}'} \end{array} \tag{2}$$

коммутативна. Здесь π,π' отображения проектирования на соответствующие фактор-пространства, $\pi(\tilde{x}) := \{\tilde{y} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}\colon \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0\}$ и $\pi'(\tilde{x}) := \{\tilde{y} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}'}\colon \tilde{d}_{\tilde{r}'}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0\}$.

Предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является *касательным*, если $em'\colon \Omega^X_{p,\tilde{r}} \to \Omega^X_{p,\tilde{r}'}$ биективно для каждого $\tilde{X}_{p,\tilde{r}'}$.

2. Постановка задачи. В настоящей работе исследуются условия на метрическое пространство X, при которых предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ имеют неотрицательную по Александрову кривизну и условия, при которых кривизна по Александрову пространств $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ неположительна, т.е. $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются CAT(0)-*пространствами.* Хорошо известные определения неотрицательности (неположительности) кривизны по Александрову даются для геодезических пространств с использованием так называемых треугольников сравнения (comparison triangles) см., например, в [6, гл. 4] и являются достаточно громоздкими. Поэтому прямое использование этих определений при исследовании предкасательных пространств к общим метрическим пространствам представляется затруднительным. Положение изменилось после того, как Берг и Николаев дали следующую характеристику CAT(0)-пространств.

Теорема 1 ([2]). *Пусть (X, d) — геодезическое пространство. X является CAT(0)-пространством тогда и только тогда, когда неравенство четырехугольника*

$$d^2(w, y) + d^2(x, z) \leq d^2(w, x) + d^2(x, y) + d^2(y, z) + d^2(z, w) \tag{3}$$

выполнено для любых точек $w, x, y, z \in X$.

Простое доказательство этой теоремы было найдено в [13]. После появления [2], Лебедева и Петрунин [11] получили аналогичную характеристику пространств с неотрицательной по Александрову кривизной.

Теорема 2 ([11]). *Пусть (X, d) — полное геодезическое пространство. X является пространством неотрицательной по Александрову кривизны тогда и только тогда, когда неравенство*

$$\frac{1}{3}(d^2(x, y) + d^2(y, z) + d^2(z, x)) \leq d^2(w, x) + d^2(w, y) + d^2(w, z) \tag{4}$$

выполнено для любых точек $w, x, y, z \in X$.

Таким образом, для описания структуры метрических пространств (X, d), предкасательные к которым принадлежат классу CAT(0) или имеют неотрицательную по Александрову кривизну, достаточно найти:

(i) инфинитезимальные аналоги неравенств (3) и (4);

(ii) условия геодезичности $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$;

(iii) условия полноты $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$.

Пункт (i) можно реализовать достаточно просто, если использовать так называемый “принцип переноса”, доказанный в [4].

2.1. Принцип переноса и его применение. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через X^n множество всех n-наборов $x = (x_1, ..., x_n)$ таких, что $x_i \in X$, $i \in \{1, ..., n\}$. Обозначим через M_n пространство вещественных $(n \times n)$-матриц t с топологией поточечной сходимости. Пусть $\mathfrak{M}$ — фиксированный класс непустых метрических пространств и пусть $\mathfrak{F}$ — фиксированное семейство непрерывных однородных функций $f \colon M_n \to \mathbb{R}, n = n(f)$ степени однородности $s = s(f) > 0$.

Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ определяется семейством $\mathfrak{F}$, если следующие два условия эквивалентны для всякого метрического пространства (X, d):

1) $(X, d) \in \mathfrak{M}$;

2) неравенство $f(m(x_1, ..., x_n)) \geq 0$ выполнено для каждой $f \in \mathfrak{F}$ и всех

$$m(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} d(x_1, x_1) & d(x_1, x_2) & ... & d(x_1, x_n) \\ d(x_2, x_1) & d(x_2, x_2) & ... & d(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(x_n, x_1) & d(x_n, x_2) & ... & d(x_n, x_n) \end{pmatrix}, (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n.$$

Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Полагаем

$$\delta_p(x_1, ..., x_n) := \max_{1 \leq i \leq n} d(x_i, p) \tag{5}$$

для $(x_1, ..., x_n) \in X^n$. Для $f \in \mathfrak{M}$ определим функцию $f^*\colon X^n \to \mathbb{R}$ правилом

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) := \begin{cases} f\left(\frac{m(x_1,x_2,...,x_n)}{\delta_p(x_1,x_2,...,x_n)}\right), & \text{если } (x_1, x_2, ..., x_n) \neq (p, p, ..., p); \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2, ..., x_n) = (p, p, ..., p). \end{cases}$$

Лемма 1 ([4])**.** *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p и пусть $\mathfrak{M}$ — семейство метрических пространств, определяемое некоторым семейством $\mathfrak{F}$. Следующие два утверждения эквивалентны:*

(i) каждое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ принадлежит $\mathfrak{M}$;

(ii) неравенство $\liminf\limits_{x_1,x_2,...,x_n \to p} f^*(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ выполняется для всякой $f \in \mathfrak{F}$.

Положим

$$A_1(w, x, y, z) := \frac{d^2(w, x) + d^2(x, y) + d^2(y, z) + d^2(z, w) - (d^2(w, y) + d^2(x, z))}{(\delta_p(w, x, y, z))^2}, \qquad (6)$$

$$A_2(w, x, y, z) := \frac{d^2(w, x) + d^2(w, y) + d^2(w, z) - \frac{1}{3}(d^2(x, y) + d^2(y, z) + d^2(z, x))}{(\delta_p(w, x, y, z))^2} \qquad (7)$$

при $(w, x, y, z) \neq (p, p, p, p)$ и $A_1(p, p, p, p) = A_2(p, p, p, p) = 0$.

Следующая лемма следует непосредственно из леммы 1 при $f^* = A_1$ и $f^* = A_2$.

Лемма 2. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Неравенство*

$$\rho^2(\alpha, \beta) + \rho^2(\gamma, \eta) \leq \rho^2(\alpha, \gamma) + \rho^2(\alpha, \eta) + \rho^2(\beta, \gamma) + \rho^2(\beta, \eta)$$

выполнено для любого предкасательного пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ и любых $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ тогда и только тогда, когда $\liminf\limits_{w,x,y,z \to p} A_1(w, x, y, z) \geq 0$. Неравенство

$$\frac{1}{3}(\rho^2(\alpha, \beta) + \rho^2(\beta, \gamma) + \rho^2(\gamma, \alpha)) \leq \rho^2(\alpha, \eta) + \rho^2(\beta, \eta) + \rho^2(\gamma, \eta)$$

выполнено для любого предкасательного пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ и любых $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ тогда и только тогда, когда $\liminf\limits_{w,x,y,z \to p} A_2(w, x, y, z) \geq 0$.

2.2. Геодезичность предкасательных пространств. Условия геодезичности предкасательных пространств к общему метрическому пространству исследовались в работе [3]. Для удобства читателя приведем необходимые для дальнейшего результаты этой работы.

Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Напомним, что точка $m \in X$ называется *срединной точкой* для $x, y \in X$, если $d(m, x) = d(m, y) = \frac{1}{2}d(x, y)$.

Определение 3. Будем говорить, что пространство X является *срединно выпуклым* в точке p, если для любых двух последовательностей $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$, сходящихся к p, найдется последовательность $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$, $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{x}, \tilde{y})$ такая, что

$$d(x_n, z_n) = \frac{1}{2}d(x_n, y_n) + o(\delta_p(x_n, y_n)) \quad \text{и} \quad d(y_n, z_n) = \frac{1}{2}d(x_n, y_n) + o(\delta_p(x_n, y_n)), \qquad (8)$$

где $\delta_p(x, y)$ определена формулой (5), а формулы (8) означают, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|d(x_n, z_n) - \frac{1}{2}d(x_n, y_n)\right|}{\delta_p(x_n, y_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|d(y_n, z_n) - \frac{1}{2}d(x_n, y_n)\right|}{\delta_p(x_n, y_n)} = 0. \qquad (9)$$

Последовательность $\tilde{z}$ в определении 3 будем называть *инфинитезимальной срединной точкой* для $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$.

Замечание 1. При $d(x_n, p) = d(y_n, p) = 0$ формула (9) не определена, но ее легко доопределить, считая, что выражения под знаком пределов равны нулю при $x_n = y_n = z_n = p$ и $+\infty$ при $x_n = y_n = p, z_n \neq p$. Таким образом, если $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{p}$, где $\tilde{p} = (p, p, p, ...)$ стационарная последовательность, а $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — инфинитезимальная срединная точка для $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, то $z_n = p$ для всех достаточно больших n.

Лемма 3 ([3]). *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если X является срединно выпуклым в точке p, то любое сепарабельное касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является геодезическим.*

Лемма 4 ([3]). *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если все предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются геодезическими, то X — срединно выпукло в точке p.*

2.3. Полнота предкасательных пространств. На сегодняшний день нет ни одного примера метрического пространства X с предкасательным пространством, не являющимся полным, однако полнота произвольного предкасательного пространства остается не доказанной. В случае касательных $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ справедлива следующая

Лемма 5 ([8]). *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Тогда любое касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является полным.*

3. Инфинитезимальные версии теорем Берга-Николаева и Лебедевой-Петрунина.

Теорема 3. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если X является срединно выпуклым в точке p и*

$$\liminf_{w,x,y,z\to p} A_1(w, x, y, z) \geq 0, \tag{10}$$

где функция $A_1(w, x, y, z)$ определена формулой (6), то любое сепарабельное касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является CAT(0)-пространством.

Доказательство. Пусть X — срединно выпукло в точке p и имеет место (10). Рассмотрим произвольное сепарабельное касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ с метрикой ρ. По лемме 3 пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является геодезическим, а по лемме 2 неравенство

$$\rho^2(\alpha, \beta) + \rho^2(\gamma, \eta) \leq \rho^2(\alpha, \gamma) + \rho^2(\alpha, \eta) + \rho^2(\beta, \gamma) + \rho^2(\beta, \eta) \tag{11}$$

имеет место для любых $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$. Следовательно, по теореме 1, $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является CAT(0)-пространством. $\square$

Теорема 4. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если все предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются CAT(0)-пространствами, то X — срединно выпукло в точке p и имеет место соотношение (10).*

Доказательство. Пусть все предкасательные пространства являются CAT(0)-пространствами. По определению, любое CAT(0)-пространство является геодезическим. Следовательно, все $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются геодезическими. По лемме 4, X — срединно выпукло в точке p. По теореме 1 из принадлежности $\Omega^X_{p,\tilde{r}} \in CAT(0)$ следует неравенство (11) для любых $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$. Значит (11) имеет место для всех $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ и всех $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$. Последнее, по лемме 2, равносильно выполнению (10). □

Теорема 5. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если X является срединно выпуклым в точке p и*

$$\liminf_{w,x,y,z \to p} A_2(w, x, y, z) \geq 0, \tag{12}$$

где функция $A_2(w, x, y, z)$ определена формулой (7), то любое сепарабельное касательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является пространством неотрицательной по Александрову кривизны.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3. Заметим только, что вместо теоермы 1 (Берга-Николаева) для произвольных геодезических пространств нужно использовать теорему 2 (Лебедевой-Петрунина), в которой предполагается полнота рассматриваемого геодезического пространства. Использование теоремы 2 возможно, так как лемма 5 гарантирует полноту касательных $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$.

Следующая теорема полностью аналогична теореме 4.

Теорема 6. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если все предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются полными геодезическими пространствами неотрицательной по Александрову кривизны, то X — срединно выпукло в точке p и имеет место соотношение (12).*

Из теорем 3–6 получаем следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Предположим, что любое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является сепарабельным и касательным. В этом случае:*

(i) X — срединно выпукло в точке p и выполнено (10) тогда и только тогда, когда все $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — геодезические пространства неположительной по Александрову кривизны.

(ii) X — срединно выпукло в точке p и выполнено (12) тогда и только тогда, когда все $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — геодезические пространства неотрицательной по Александрову кривизны.

4. Характеризация $CAT(0)$ предкасательных пространств через неравенство Птолемея и выпуклость по Буземану. Практически одновременно с работой [2] была опубликована статья T. Foertsch, A. Lytchak, V. Schroeder ([10]), в которой CAT(0)-пространства были охарактеризованы как птолемеевы геодезические пространства выпуклые по Буземану.

Напомним, что метрическое пространство (X, d) называется *птолемеевым*, если следующее *неравенство Птолемея*

$$d(x, y)d(u, v) \leq d(x, u)d(y, v) + d(x, v)d(y, u) \tag{13}$$

имеет место для всех $x, y, u, v \in X$.

Определение 4 ([12], с. 187)**.** Геодезическое пространство (X, d) называется *выпуклым по Буземану (пространством Буземана)*, если для любых двух аффинно параметризованных геодезических $\gamma\colon [a,b] \to X$ и $\gamma'\colon [a',b'] \to X$ отображение $D_{\gamma,\gamma'}\colon [a,b]\times[a',b'] \to \mathbb{R}$, определенное как $D_{\gamma,\gamma'}(t,t') = d(\gamma(t), \gamma(t'))$ является выпуклым.

Мы не даем полное описание всех терминов, входящих в определение 4, отсылая читателя к монографии [12].

Теорема 7 ([10])**.** *Метрическое пространство X является CAT(0)-пространством тогда и только тогда, когда X птолемеево и выпукло по Буземану.*

Целью настоящего раздела является построение инфинитезимального аналога теоремы 7.

Замечание 2. В работе [10] геодезическое пространство (X, d) называется выпуклым по Буземану, если для любых двух аффинно параметризованных геодезических $\beta\colon [a,b] \to X$ и $\gamma\colon [a,b] \to X$ отображение $t \mapsto d(\beta(t), \gamma(t))$ является выпуклым. Используя утверждение 8.12 из [12], легко показать, что такое определение эквивалентно определению 4.

4.1. Птолемеевость предкасательных. Условие птолемеевости предкасательных пространств было найдено в [5]. Его легко получить, используя неравенство Птолемея (13) и приведенный выше принцип переноса. Аналогично функциям A_1 и A_2 зададим для пространства (X, d, p) функцию A_3 как

$$A_3(w,x,y,z) = \frac{d(x,w)d(y,z) + d(x,z)d(y,w) - d(x,y)d(w,z)}{(\delta_p(w,x,y,z))^2} \tag{14}$$

при $(w,x,y,z) \neq (p,p,p,p)$ и $A_3(p,p,p,p) = 0$.

Лемма 6 ([5])**.** *Пусть (X,d,p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Любое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde r}$ является птолемеевым тогда и только тогда, когда*

$$\liminf_{w,x,y,z\to p} A_3(w,x,y,z) \geq 0. \tag{15}$$

4.2. Выпуклость предкасательных пространств по Буземану. Вопрос о выпуклости по Буземану предкасательных пространств к общим метрическим пространствам ранее не исследовался и, видимо, не может быть получен как простое следствие принципа переноса. Для того, чтобы определить “инфинитезимальную выпуклость по Буземану” мы будем использовать характеризацию выпуклости по Буземану в терминах срединных точек.

Напомним, что если $\gamma\colon [a,b] \to X$ есть геодезическая, $x = \gamma(a), y = \gamma(b)$, то образ отрезка $[a,b]$ при отображении γ называется *геодезическим сегментом* и обозначается $[x,y]$. Таким образом, геодезические сегменты в X это в точности подмножества X, изометричные отрезкам прямой.

Лемма 7. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $a,b,c \in X$ и $[a,b], [b,c]$ — геодезические сегменты, лежащие в X. Если имеет место равенство*

$$d(a,b) + d(b,c) = d(a,c), \tag{16}$$

то множество $[a,b]\cup[b,c]$ — геодезический сегмент в X. В частности, если $d(a,b) = d(b,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, то точка b принадлежит геодезическому сегменту $[a,b]\cup[b,c]$ и является срединной для точек a и c.

Мы не будем приводить формальное доказательство этой леммы. Напомним только, что (с точностью до параметризации) геодезическая в метрическом пространстве есть кривая, длина которой совпадает с расстоянием между её концами.

Лемма 8. *Пусть* (X, d) *— геодезическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) X *выпукло по Буземану;*

(ii) для любых трех точек $x^0, x^1, y \in X$ *выполнено неравенство*

$$d(m^x, y) \leq \frac{1}{2}(d(x^0, y) + d(x^1, y)), \tag{17}$$

где m^x *— срединная точка для* x^0, x^1.

Доказательство. Как известно, X является выпуклым по Буземану тогда и только тогда, когда для любой точки $y \in X$ и любого геодезического сегмента $[x^0, x^1]$, лежащего в X, выполнено (17) (см. утверждение 8.12 из [12]). Следовательно (ii) $\Rightarrow$ (i) доказано. Для проверки (i) $\Rightarrow$ (ii) допустим, что X — выпукло по Буземану, $x^0, x^1, m_x, y \in X$ и m_x — срединная точка для x^0, x^1. Если $x^0 = x^1$, то $x^0 = m_x = x^1$ и (17) очевидно. Пусть $x^0 \neq x^1$. Так как X — геодезическое, то существуют геодезические сегменты $[x^0, m_x]$ и $[m_x, x^1]$, а так как m_x — срединная точка для x^0, x^1, то $d(x^0, m_x) = d(x^1, m_x) = \frac{1}{2}d(x^0, x^1)$. Отсюда, по лемме 7, следует, что множество $[x^0, m_x] \cup [m_x, x^1]$ — геодезический сегмент и мы опять можем использовать утверждение 8.12 из [12]. $\square$

Пусть теперь (X, d, p) — метрическое пространство срединно выпуклое в отмеченной точке p в смысле определения 3. Пусть $\tilde{x}^0 = \{x_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\tilde{x}^1 = \{x_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ две последовательности, принадлежащие $\tilde{X}$ и такие, что $\lim_{n \to \infty} x_n^0 = \lim_{n \to \infty} x_n^1 = p$.

Через $\tilde{m}^x = \{m_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ будем обозначать инфинитезимальную срединную точку для $\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^1$.

Определение 5. Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Будем говорить, что пространство (X, d, p) *выпукло по Буземану в точке* p, если оно срединно выпукло в p и для любых $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{y} \in \tilde{X}$, сходящихся к p, и любой $\tilde{m}^x = \{m_n^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет место соотношение

$$\left(d(m_n^x, y) - \frac{1}{2}(d(x_n^0, y_n) + d(x_n^1, y_n))\right)_+ = o(\delta_p(x_n^0, y_n, x_n^1)), \tag{18}$$

где

$$(t)_+ = \frac{|t| + t}{2}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Следующая теорема дает достаточное условие выпуклости по Буземану сепарабельных касательных пространств.

Теорема 8. *Пусть* (X, d, p) *— метрическое пространство с отмеченной точкой* p. *Если* X *выпукло по Буземану в точке* p, *то любое сепарабельное касательное пространство* $\Omega_{p,\tilde{r}}^X$ *является геодезическим пространством выпуклым по Буземану.*

Доказательство. Пусть X выпукло по Буземану в точке p, $\Omega^X_{p,\tilde r}$ — сепарабельное касательное пространство с метрикой ρ, а $\tilde X_{p,\tilde r}$ — максимальное самостабильное семейство, соответствующее $\Omega^X_{p,\tilde r}$. Из определения 5 следует, что X — срединно выпукло в точке. Следовательно, по лемме 3, $\Omega^X_{p,\tilde r}$ является геодезическим. Нужно показать, что $\Omega^X_{p,\tilde r}$ выпукло по Буземану. Пусть $\gamma^i, \beta \in \Omega^X_{p,\tilde r}, i \in \{0,1\}$ и пусть μ^γ — срединная точка для γ^0, γ^1. В соответствии с леммой 8, выпуклость по Буземану пространства $\Omega^X_{p,\tilde r}$ будет доказана, если

$$\rho(\mu^\gamma, \beta) \le \frac{1}{2}(\rho(\gamma^0, \beta) + \rho(\gamma^1, \beta)). \tag{20}$$

Если $\gamma^0 = \gamma^1$, то $\mu^\gamma = \gamma^0 = \gamma^1$ и (20) очевидно. Пусть $\gamma^0 \ne \gamma^1$. Рассмотрим $\tilde x^i = \{x^i_n\}_{n\in\mathbb N}, \tilde y = \{y_n\}_{n\in\mathbb N}, \tilde z^\gamma = \{z^\gamma_n\}_{n\in\mathbb N}$, принадлежащие $\tilde X_{p,\tilde r}$ такие, что $\pi(\tilde x^i) = \gamma^i, \pi(\tilde y) = \beta, \pi(\tilde z^\gamma) = \mu^\gamma, i \in \{0,1\}$, где π — отображение проектирования $\tilde X_{p,\tilde r}$ на $\Omega^X_{p,\tilde r}$ (см. (2)). Проверим, что $\tilde z^\gamma$ — инфинитезимальная срединная точка для $\tilde x^0$ и $\tilde x^1$. Положим $\alpha = \pi(\tilde p)$, где $\tilde p$ — стационарная последовательность $(p, p, p, ...)$. Используя определение метрики ρ, находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|d(x^1_n, z^\gamma_n) - \frac{1}{2}d(x^1_n, x^0_n)\right|}{d(x^1_n, p) \vee d(x^0_n, p)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left|d(x^1_n, z^\gamma_n) - \frac{1}{2}d(x^1_n, x^0_n)\right|}{r_n}}{\frac{d(x^1_n, p) \vee d(x^0_n, p)}{r_n}} = \frac{\left|\rho(\gamma^1, \mu^\gamma) - \frac{1}{2}\rho(\gamma^1, \gamma^0)\right|}{\rho(\alpha, \gamma^1) \vee \rho(\alpha, \gamma^0)}.$$

Так как $\gamma^0 \ne \gamma^1$, то $0 < \rho(\gamma, \gamma^1) \vee \rho(\gamma, \gamma^0) < \infty$, а так как μ^γ — срединная точка для γ^0 и γ^1, то $\rho(\gamma^1, \mu^\gamma) = \frac{1}{2}\rho(\gamma^1, \gamma^0)$. Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|d(x^1_n, z^\gamma_n) - \frac{1}{2}d(x^1_n, x^0_n)\right|}{d(x^1_n, p) \vee d(x^0_n, p)} = 0. \tag{21}$$

Аналогично находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|d(x^0_n, z^\gamma_n) - \frac{1}{2}d(x^1_n, x^0_n)\right|}{d(x^1_n, p) \vee d(x^0_n, p)} = 0. \tag{22}$$

Равенства (21), (22) и (9) показывают, что $\tilde z^\gamma$ — инфинитезимальная срединная точка для $\tilde x^0$ и $\tilde x^1$. Воспользовавшись (18), получаем

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{(d(z^\gamma_n, y_n) - \frac{1}{2}(d(x^0_n, y_n) + d(x^1_n, y_n)))_+}{d(x^0_n, p) \vee d(x^1_n, p) \vee d(y_n, p)} = \frac{(\rho(\mu^\gamma, \beta) - \frac{1}{2}(\rho(\gamma^0, \beta) + \rho(\gamma^1, \beta)))_+}{\rho(\gamma^0, \alpha) \vee \rho(\gamma^1, \alpha) \vee \rho(\beta, \alpha)}.$$

Так как знаменатель последней дроби конечное положительное число, то $(\rho(\mu^\gamma, \beta) - \frac{1}{2}(\rho(\gamma^0, \beta) + \rho(\gamma^1, \beta)))_+ = 0$, что равносильно (20). □

Теоремы 7, 8 и лемма 6 дают следующее

Следствие 2. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Предположим, что любое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde r}$ является сепарабельным и касательным. Тогда, если выполнено неравенство (15) и X выпукло по Буземану в точке p, то каждое $\Omega^X_{p,\tilde r}$ является пространством класса CAT(0).*

Теорема 9. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если все предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde r}$ являются геодезическими, выпуклыми по Буземану пространствами, то X выпукло по Буземану в точке p.*

Доказательство. Пусть все $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются геодезическими, выпуклыми по Буземану пространствами, но X не выпукло по Буземану в точке p. Так как все $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — геодезические, то по лемме 4, пространство X — срединно выпукло в точке p. Так как X не является выпуклым по Буземану в точке p, то найдутся сходящиеся к p последовательности $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1$ с инфинитезимальной срединной точкой $\tilde{m}^x$, сходящаяся к p последовательность $\tilde{y}$ и постоянная $c > 0$ такие, что

$$(d(m_n^x, y_n) - \frac{1}{2}(d(x_n^0, y_n) + d(x_n^1, y_n)))_+ > c\delta_p(x_n^0, y_n, x_n^1) \tag{23}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что правая часть в (23) положительна при всех достаточно больших n. Действительно, если это не так, то переходя к подпоследовательности можем считать, что $x_n^0 = x_n^1 = y_n = p$ для всех n, но тогда $m_n^x = p$ для всех достаточно больших n (см. замечание 1). Подставляя p вместо всех переменных в (23), получаем ложное неравенство $(0)_+ > c \cdot 0$. Таким образом, можно разделить правую и левую часть в (23) на $\delta_p(x_n^0, y_n, x_n^1)$ и переходя, если нужно, к подпоследовательности считать, что

$$0 < c < \lim_{n\to\infty} \frac{d(m_n^x, y_n) - \frac{1}{2}(d(x_n^0, y_n) + d(x_n^1, y_n))}{\delta_p(x_n^0, y_n, x_n^1)}. \tag{24}$$

Из (9) следует неравенство $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{d(m_n^x, p)}{\delta_p(x_n^0, y_n, x_n^1)} < \infty$. Значит, переходя еще раз, если необходимо, к подпоследовательности можем считать, что $\tilde{p}$, $\tilde{x}^1 = \{x_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}, \tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \tilde{x}^0 = \{x_n^0\}_{n\in\mathbb{N}}, \tilde{m}^x = \{m_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ — взаимностабильные относительно нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ с $r_n = \delta_p(x_n^0, y_n, x_n^1), n \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство такое, что $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^0, \tilde{y}, \tilde{m}^x\} \subseteq \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. Обозначим через $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ соответствующее семейству $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ предкасательное пространство. Обозначим $\beta^0 = \pi(\tilde{x}^0), \beta^1 = \pi(\tilde{x}^1), \gamma = \pi(\tilde{y}), \mu^\beta = \pi(\tilde{m}^x), \alpha = \pi(\tilde{p})$. Тогда (24) можно записать как $0 < c < \rho(\mu^\beta, \gamma) - \frac{1}{2}(d(\beta^0, \gamma) + d(\beta^1, \gamma))$.

В силу леммы 8, из последнего неравенства следует, что $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ не выпукло по Буземану. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Теорема 7, теорема 9 и лемма 6 дают следующее

Следствие 3. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Если все предкасательные пространства $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ являются CAT(0)-пространствами, то X выпукло по Буземану в точке p и выполняется неравенство* (15).

Теорема 10. *Пусть (X, d, p) — метрическое пространство с отмеченной точкой p. Предположим, что любое $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является сепарабельным и касательным. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) Каждое $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является пространством класса CAT(0).

(ii) Пространство X выпукло по Буземану в точке p и $\liminf\limits_{w,x,y,z\to p} A_3(w, x, y, z) \geq 0$, где функция A_3 определена в (14).

В доказанных выше теоремах 3, 8 и 10 фигурирует свойство сепарабельности касательных пространств $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$. В связи с этим возникает вопрос о свойствах пространства X, гарантирующих такую сепарабельность. Одним из таких свойств является так называемое *свойство удвоения.* Напомним, что метрическое пространство X обладает *свойством удвоения* (*doubling property*), если существует $C \geq 1$ такое, что для любого $A \subseteq X$ с $\mathrm{diam} A < \infty$ найдется не более чем C множеств $B \subseteq X$, образующих покрытие A и удовлетворяющих условию $\mathrm{diam}\, B \leq \frac{1}{2}\mathrm{diam} A$. Используя утверждение 4 из [1] можно доказать следующее

Утверждение 1. *Пусть X — метрическое пространство, обладающее свойством удвоения. Тогда для любой точки $p \in X$ любое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ является сепарабельным.*

Отсюда следует, что сепарабельными являются предкасательные к любому подмножеству конечномерного нормированного пространства. Интересно отметить, что в работе Д. Дордовского [7, доказательство теоремы 2.3] было построено подмножество X гильбертова пространства l_2 суммируемых с квадратом последовательностей, имеющее по крайней мере мере одно не сепарабельное предкасательное пространство. Таким образом, пространство предкасательное к сепарабельному метрическому пространству не обязательно сепарабельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Abdullayev, O. Dovgoshey, M. Küçükaslan, *Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces*, Beitr. Algebra Geom., **51** (2010), №2, 547–576.
2. I. Berg, I. Nikolaev, *Quasilinearization and curvature of Aleksandrov spaces*, Geom. Dedicata, **133** (2008), 195–218.
3. V. Bilet, *Geodesic tangent spaces to metric spaces*, Ukr. Mat. J., **64** (2012), №9, 1273–1281. (in Russian)
4. V. Bilet, O. Dovgoshey, *Isometric embeddings of pretangent spaces in E^n*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin., **20** (2013), 91–110.
5. V. Bilet, O. Dovgoshey, *Metric betweenness, Ptolemaic spaces and isometric embeddings of pretangent spaces in R*, J. Math. Sci., New York, **182** (2012), №4, 22–36.
6. D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, A course in metric geometry, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
7. D. Dordovskyi, *Metric tangent spaces to Euclidean spaces*, J. Math. Sci., New York, **179** (2011), №2, 229–244.
8. O. Dovgoshey, O. Martio, *Tangent spaces to metric spaces*, Reports in Math., Helsinki Univ., **480** (2008), 20 p.
9. O. Dovgoshey, O. Martio, *Tangent spaces to general metric spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures. Appl., **56** (2011), №2, 137–155.
10. T. Foertsch, A. Lytchak, V. Schroeder, *Nonpositive curvature and the Ptolemy inequality*, Int. Math. Res. Not., (2007), №22, 15 p.
11. N. Lebedeva, A. Petrunin, *Curvature bounded below: a definition a la Berg-Nikolaev*, Electronic research announcements in math. sci., **17** (2010), 122–124.
12. A. Papadopoulos, *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature*, European Mathematical Society, (2005).
13. T. Sato, *An alternative proof of Berg and Nikilaev's characterization of CAT(0)-spaces via quadrialateral inequality*, Arch. Math., **93** (2009), 487–490.

Donetsk Institute of Applied Mathematics and Mechanics
biletvictoriya@mail.ru
aleksdov@mail.ru

Поступило 4.01.2013