УДК 512.553.2

М. О. Малоїд-Глєбова

ДЕЯКІ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКИ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ СПЕКТРІВ МУЛЬТИПЛІКАЦІЙНИХ МОДУЛІВ ТА СПЕКТРАЛЬНИМИ ПРОСТОРАМИ

M. O. Maloid-Glebova. *Some relationships between different types of spectrums of multiplicational modules and with spectral spaces*, Mat. Stud. **41** (2014), 3–17.

In this paper we introduce and study the left spectrum and the torsion-theoretic spectrum of modules and establish some connections between them. In particular, the fact that for a multiplication module the left torsion-theoretic spectrum is a quotient space is proved. Also, the notion of locally-prime torsion theory is given, some properties of such torsion theories are presented. Is proved the fact, that symmetric extended (by Belluce) torsion-theoretic spectrum of a ring (module), under certain restrictions, is a spectral space. Also we construct spectrum for the left spectrum of a ring, that, in its turn, is based on the theory of strongly-prime modules. As a technical equipment we use general facts from the torsion theory in the category of left modules over associative rings and some generalizations of technical results from previously published work of many authors.

М. О. Малоид-Глебова. *О некоторых взаимосвязях между различными типами спектров мультипликационных модулей и со спектральными пространствами* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №1. – C.3–17.

В статье рассматриваются левые спектры Розенберга и Попеску и устанавливаются соотношения между ними. В частности, доказывается, что для мультипликационного модуля левый спектр Попеску является фактор-пространством левого спектра. Вводится также понятие локально первичного кручения, излагаются свойства этих кручений и доказывается, что симметричный расширенный (в смысле Белуссе) спектр Попеску кольца (модуля) при определенных ограничениях является спектральным пространством. Также строится расширенный спектр для левого спектра некоммутативного кольца, построение которого основывается на теории строго первичных модулей. В качестве технических средств используются общие факты из теории кручений в категории левых модулей над ассоциативным кольцом и некоторые обобщения результатов из опубликованных ранее работ других авторов.

Вступ. Спектр комутативного кільця перебуває у полі зору багатьох математиків найперше тому, що він надає змогу скористатись геометричною інтуїцією при дослідженні абстрактних кілець. В останні десятиріччя з'явилося багато узагальнень поняття спектра, як у випадку некомутативних (диференціальних) кілець, так і у випадку модулів. В некомутативному випадку існує багато різних означень цього поняття, які базуються на різних підходах до визначення поняття первинного ідеала. Проте досі не достатньо досліджені і мало вивчені зв'язки між цими спектрами. Дана стаття дає відповіді на

2010 *Mathematics Subject Classification:* 16D10, 16D80, 16N80, 16S90.
Keywords: module spectrum; multiplication module; locally-prime torsion theory; spectral space.

деякі питання про ці взаємозв'язки в найпростіших ситуаціях, які виникають у різних випадках, що розглядалися.

Для кращого ознайомлення з різними спектрами некомутативних кілець і модулів над ними, наведемо деякі факти про первинні модулі над асоціативними кільцями. Спочатку згадаємо історію розвитку поняття первинного модуля, яке є базовим для означення його первинного спектра. Багато запитань, які виникають і розглядаються у цій статті, є подібними до тих, що вже розв'язані при вивченні первинних ідеалів в некомутативних кільцях([25]). Першу згадку про такі модулі можна знайти в статті Р. Е. Джонсона [16]. Незалежно, первинні модулі ввів та досліджував В. Андрунакієвич в [1]. Е. Г. Феллер та Е. В. Своковскі розпочали дослідження первинних підмодулів деякого модуля ([12]). Г. І. Каракас розглянув первинні підмодулі довільного модуля над комутативним кільцем ([17]). На нашу думку, найбільш вдалим підходом до введення поняття первинного модуля є підхід, який вперше запропонував С. Пейдж в 1972 р. ([26]). Пізніше таке ж означення використовували Р. Вісбауер ([31]) і Й. Даунс ([9]), досліджуючи взаємозв'язки між різними типами первинних модулів і систематизуючи їх теорію. Підхід до дослідження первинних модулів, що базується на теорії напередрадикалів реалізований Л. Біканом, П. Ямбором, Т. Кепкою і П. Нємєцом в 1980 р. ([5]). А. В. Андрунакієвич в [1] використовував первинні модулі для опису первинних радикалів, а у статті [2] А. В. Андрунакієвич та Ю. М. Рябухін довели, що кожен спеціальний радикал категорії кілець можна описати за допомогою підкласів класу первинних модулів, та реалізували деякі ідеї про первинні модулі. К. Шігенага в 1982 р. запропонував різні модифікації та узагальнення первинних модулів і розглянув схеми логічних взаємозв'язків між ними ([29]). Деякі модифікації поняття первинного модуля можна знайти в [7]–[11]. Пізніше поняття первинного модуля та його узагальнення привертали увагу значного числа авторів. Сьогоденний потік публікацій, в яких розглядаються поняття первинного модуля чи первинного підмодуля, стрімко зростає. Варто згадати й про статті, що стосуються застосувань даних понять, наприклад, в яких досліджуються різні спектри кілець та модулів. З одного боку, це демонструє важливість цих понять, а з іншого, підтверджує інтенсивність пошуку найбільш вдалого варіанту поняття первинного модуля, яке дозволило б сформулювати та довести аналоги найважливіших фактів класичної алгебраїчної геометрії. Варто також зазначити, що некомутативна алгебраїчна геометрія інтенсивно розвивається, і час від часу виходять з друку різні монографії, які підсумовують розвиток цієї теорії за той чи інший часовий проміжок. Існують більш радикальні підходи до проблеми точок некомутативних многовидів, що базуються на ідеях теорії категорій (найчастіше на понятті підкатегорії Серра категорії Гротендіка), або на нових, ще абстрактніших поняттях некомутативних просторів (див. роботи Артіна, Преста, Ван-ден-Берга, та інших авторів, статті яких стосуються некомутативної алгебраїчної геометрії).

У даній статті ми розглядаємо деякі конструкції та факти, що містять поняття лівого спектра Розенбергата, лівого спектра Попеску для асоціативних кілець, і розширимо їх на випадок теорії модулів. Більшість з використаного матеріалу можна знайти в монографіях, що вже побачили світ. Розглянемо також систему понять, необхідних для означення теоретико-скрутового спектра (чи спектра Попеску) кільця, який досить часто використовується в некомутативній алгебраїчній геометрії.

1. Мультиплікаційні модулі над некомутативними кільцями та їх властивості. Основну теорему теорії абелевих груп можна сформулювати у вигляді такого твердженння: *довільний скінченно-породжений* $\mathbb{Z}$*-модуль є прямою сумою мультиплікаційних модулів* (тут $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел). Ця теорема стимулює дослідження мультиплікаційних модулів, які завдяки їй посіли важливе місце серед інших типів модулів.

Нехай R — кільце, M — правий R-модуль. Називатимемо модуль M *мультиплікаційним*, якщо для довільного його підмодуля N існує такий ідеал B кільця R, що $N = MB$.

Наводимо твердження, яке дозволяє вказувати природні приклади мультиплікаційних модулів.

Твердження 1. 1. *Довільний циклічний модуль є мультиплікаційним модулем.*
2. *Довільний простий модуль є мультиплікаційним.*
3. *Довільний ненульовий мультиплікаційний модуль над простим кільцем є простим модулем.*

Доведення цього факту проводиться за аналогією з комутативним випадком.

Нехай R — довільне асоціативне кільце. Ідеал A цього кільця називається *мультиплікаційним*, якщо для довільного такого ідеала B кільця R, що $B \subseteq A$, існує такий ідеал C цього кільця, що $B = AC$.

Очевидно, що кожен мультиплікаційний ідеал є мультиплікаційним модулем. Для зручності подальшого викладу наведемо декілька тверджень.

Твердження 2 ([28], зауваження 1.2)**.** *Для правого модуля M над кільцем R, такі властивості еквівалентні:*
1. *M — мультиплікаційний модуль.*
2. *Для кожного такого ідеала B кільця R, що $B \subseteq \mathrm{Ann}(M)$, R/B-модуль M є мультиплікаційним модулем.*
3. *Існує такий ідеал B кільця R, що $B \subseteq \mathrm{Ann}(M)$, і M є мультиплікаційним R/B-модулем.*

Твердження 3 ([28], зауваження 1.3)**.** *Для правого R-модуля M, такі властивості еквівалентні:*
1. *M — мультиплікаційний модуль.*
2. *$N \subseteq M(N : M)$ для кожного підмодуля N модуля M.*
3. *$N = M(N : M) = M(\mathrm{Ann}(M/N))$ для кожного підмодуля N модуля M.*

Твердження 4. *Кожен гомоморфний образ мультиплікаційного модуля є мультиплікаційним.*

Твердження 5 ([28], зауваження 1.5)**.** *Для довільного мультиплікаційного модуля M над кільцем R істинні такі твердження:*
1. *Кожен підмодуль N модуля M є цілком інваріантним підмодулем цього модуля.*
2. *Якщо N є таким підмодулем модуля M, що $N \cap MB = NB$ для кожного ідеала B кільця R, то N є мультиплікаційним модулем.*

Твердження 6. *Мультиплікаційний модуль має такі властивості:*
1. *Кожен ендоморфний образ мультиплікаційного модуля є цілком інваріантним мультиплікаційним підмодулем цього модуля.*
2. *Кожен прямий доданок мультиплікаційного модуля є цілком інваріантним мультиплікаційним підмодулем цього модуля.*
3. *В кільці ендоморфізмів кожного гомоморфного образу довільного мультиплікаційного модуля, всі ідемпотенти є центральними.*

Доведення твердження 6 є комбінацією міркувань, використаних вище у доведеннях сформульованих фактів.

Твердження 7 ([28], зауваження 1.9). *Нехай M — довільний правий мультиплікаційний модуль над кільцем R, а P — такий ідеал кільця R, що $M \neq MP$. Тоді існує такий циклічний підмодуль X модуля M, що P не містить анулятора модуля M/X.*

Твердження 8 ([28], зауваження 1.10). *Нехай M — правий мультиплікаційний модуль над кільцем R, а P — максимальний ідеал кільця R.*
1. *Якщо $M \neq MP$, то M/MP є простим модулем, та існує такий циклічний підмодуль X модуля M, що $R = P + \mathrm{Ann}(M/X)$.*
2. *M/MP є циклічним модулем з двома підмодулями, причому $M = MP$ або ж MP є максимальними підмодулями модуля M.*

Твердження 9 ([28], зауваження 1.12). *Нехай R — кільце з комутативним множенням ідеалів, M — мультиплікаційний R-модуль і B — такий ідеал кільця R, що $M = MB$. Тоді:*
1. *$N = NB$ для кожного підмодуля N модуля M.*
2. *Для кожного елемента m модуля M існує такий елемент b ідеала B, що $m(1-b) = 0$.*

Твердження 10. *Нехай R — кільце з комутативним множенням ідеалів, M — мультиплікаційний правий R-модуль і P — максимальний ідеал кільця R. Тоді:*
1. *$M = MP$.*
2. *$N = NB$ для кожного підмодуля N модуля M.*
3. *$X = XB$ для кожного циклічного підмодуля X модуля M.*
4. *P не містить аннулятора жодного циклічного підмодуля модуля M.*

Твердження 11 ([28], зауваження 2.1). *Для правого R-модуля M такі властивості еквівалентні:*
1. *M — мультиплікаційний модуль.*
2. *Для кожного циклічного підмодуля X модуля M існує такий правий ідеал B кільця R, що $X = MB$.*
3. *Для кожного підмодуля X модуля M існує така множина $\{X_i\}_{i\in I}$ підмодулів модуля X і множина $\{B_i\}_{i\in I}$ ідеалів кільця R, для яких $X = \sum_{i\in I}$ та $X_i = MB_i$ для кожного $i \in I$.*

Теорема 1 ([28], теорема 2.2). *Нехай M правий модуль над кільцем R, і нехай $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Тоді такі умови еквівалентні:*
1. *M — мультиплікаційний модуль.*
2. *Кожен підмодуль модуля M є цілком інваріантним в M, і всі підмодулі M_i є такими мультиплікаційними підмодулями, що існують ідеали B_i кільця R для яких виконуються рівності $M_i = MB_i$, $(i \in I)$.*
3. *$N = \bigoplus_{i\in I}(N \cap M_i)$ для кожного підмодуля N модуля M, і всі підмодулі M_i є такими мультиплікаційними модулями, для яких існують такі ідеали B_i кільця R, що $M_i = MB_i$, $(i \in I)$.*
4. *Для кожної скінченної підмножини J індексної множин I, модуль $\bigoplus_{j\in J} M_j$ є мультиплікаційним, і $\bigoplus_{j\in J} M_j = MB_J$ для деякого ідеала B_J кільця R.*

Твердження 12 ([28], зауваження 2.13). *Якщо M — правий мультиплікаційний модуль, який є сумою скінченної кількості циклічних модулів, то M — циклічний модуль.*

Теорема 2 ([28], теорема 2.14)**.** *Нехай M — артінів мультиплікаційний модуль над кільцем R. Тоді:*
1. *Фактор-модуль $M/J(M)$ – циклічний модуль.*
2. *Якщо $J(M)$ є надлишковим підмодулем модуля M, то M є циклічним модулем.*
3. *Якщо M — скінченно-породжений модуль, то M — циклічний модуль.*

Наслідок 1 ([28], висновок 2.27)**.** *Нехай M — правий модуль над кільцем R і нехай X та Y — такі мультиплікаційні підмодулі модуля M, що $R = (X : Y) + (Y : X)$. Тоді $X + Y$ є мультиплікаційним модулем.*

Твердження 13 ([28], зауваження 2.28)**.** *Нехай M — модуль над кільцем R, а N — власний підмодуль модуля M. Тоді:*
1. *N — первинний підмодуль модуля M тоді і лише тоді, коли $\mathrm{Ann}(M/N)$ — первинний ідеал кільця R.*
2. *Якщо N — максимальний підмодуль модуля M, то N — первинний підмодуль модуля M і $N = MP$ для деякого правого примітивного ідеала P кільця R.*
3. *Якщо R — кільце з комутативним множенням ідеалів, то для кожного власного підмодуля N модуля M існує такий правий примітивний ідеал P кільця R, що $M \neq MP + N$ і MP є первинними підмодулями модуля M.*

Твердження 14 ([28], лема 2.2)**.** *Нехай M — ненульовий мультиплікаційний R-модуль. Тоді:*
1. *Кожен власний підмодуль модуля M міститься в деякому максимальному підмодулі модуля M.*
2. *Підмодуль K є максимальним в M тоді і лише тоді, коли існує такий максимальний ідеал Q кільця R, що $K = QM \neq M$.*

2. Різні підходи до вивчення строго-первинних кілець та модулів. Скрізь у цій статті R є асоціативним кільцем з ненульовим одиничним елементом, який зберігається кільцевими гомоморфізмами, і всі модулі є унітарними. Запис $A \subset B$ використовується для позначення власних підмножин. Лівий ідеал $\mathfrak{p}$ кільця R називається *первинним* тоді і лише тоді, коли для довільних елементів $x, y \in R$ з того, що $xRy \subseteq \mathfrak{p}$ випливає, що або $x \in \mathfrak{p}$, або $y \in \mathfrak{p}$. Множина всіх двосторонніх первинних ідеалів кільця R позначається через Spec(R) і називається *(первинним) спектром* кільця R. З іншого боку, лівий ідеал $\mathfrak{p}$ кільця R називається *строго-первинним*, якщо для кожного елемента $x \in R\backslash\mathfrak{p}$, існує така скінченна підмножина V кільця R, що

$$(\mathfrak{p} : Vx) = \{r \in R | rVx \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Множина $\mathrm{spec}(R)$ всіх строго-первинних лівих ідеалів називається *лівим спектром* кільця R. Легко побачити, що якщо R є лівим нетеровим кільцем, то $\mathrm{Spec}(R) \subseteq \mathrm{spec}(R)$ (див. [13]). В статті [18] дано означення *строго-первинного модуля*, яке є базовим для перенесення поняття лівого спектра на модульну ситуацію. Кориснішим є означення таких модулів, сформульоване у статті [17], де також подається наявна інформація про такі модулі. Ми продовжуємо використовувати друге формулювання поняття строго-первинного модуля, і нагадаємо деякі деталі з історії його дослідження. Означення строго-первинного модуля здебільшого дають двома способами.

Ненульовий лівий модуль M над кільцем R називається *строго-первинним*, якщо для довільних ненульових елементів $x, y \in M$ існує така скінченна підмножина $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq R$, що

$$\operatorname*{Ann}_R\{a_1x, a_2x, \ldots, a_nx\} \subseteq \operatorname*{Ann}_R\{y\},$$

тобто з того, що $(ra_1x = ra_2x = \cdots = ra_nx = 0)$, $r \in R$ випливає $ry = 0$. Таке означення строго-первинного модуля введене Й. А. Бічі у статті [6]. У статті [13] сформульовано таке означення *строго-первинного підмодуля.* Ненульовий лівий модуль M над кільцем R називається *строго-первинним*, якщо для довільного ненульового елемента $x \in M$ існує така скінченна підмножина $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq R$, що $\mathrm{Ann}_R\{a_1x, a_2x, \ldots, a_nx\} = 0$. Якщо в цьому означенні покласти $M = R$, отримаємо поняття *строго-первинного кільця.* Такі строго-первинні кільця досліджувалися також в [9].

Підмодуль P деякого модуля M називається *строго-первинним*, якщо фактор-модуль M/P є строго-первинним R-модулем. Множина всіх строго-первинних підмодулів модуля M називається лівим первинним спектром M і позначається $\mathrm{spec}(M)$. Зокрема, лівий ідеал $\mathfrak{p} \subset R$ називається *строго-первинним*, якщо фактор-модуль $R/\mathfrak{p}$ є строго-первинним R-модулем. В термінах елементів, лівий ідеал $\mathfrak{p} \subset R$ є строго-первинним, якщо для довільного елемента $u \notin \mathfrak{p}$ існують такі елементи $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq R$ і такі натуральні числа $n = n(u)$, що з умови $ra_1u, \ldots, ra_nu \in \mathfrak{p},\ r \in R$ випливає $r \in \mathfrak{p}$.

Нехай $\mathrm{Mod}\text{-}R$ — категорія правих унітарних модулів над кільцем R.

Функтор $r\colon \mathrm{Mod}\text{-}R \to \mathrm{Mod}\text{-}R$ називається *напередрадикалом*, якщо для довільних правих R-модулів M і N і для довільного R-гомоморфізму $f\colon M \to N$ виконуються включення $r(M) \subseteq M$ і $f(r(M)) \subseteq r(N)$.

Напередрадикал r називається *радикалом*, якщо $r(M/r(M)) = 0$ для довільного правого модуля M.

Правий модуль M називається *r-радикальним*, якщо $r(M) = M$, і r-напівпростим, якщо $r(M) = 0$.

Якщо для довільного правого R-модуля M виконується включення $r_1(M) \subseteq r_2(M)$, то ми пишемо $r_1 \leq r_2$. Позначимо через R^N такий найменший напередрадикал r, що правий полігон N є r-радикальним полігоном. Тоді $R^N(M) = \sum_{\alpha \in J} f_\alpha(N)$, де f_α пробігає всі гомоморфізми з $\mathrm{Hom}(N, E(M))$, де $E(M)$ — ін'єктивна оболонка правого модуля M.

Ненульовий правий модуль M називається *строго-первинним*, якщо M є первинним і для кожного ненульового правого підмодуля $N \subseteq M$ і для кожного елемента $y \in M$ існують такі елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N$, що $\mathrm{Ann}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$.

Твердження 15. *Для ненульового правого полігона M такі твердження є еквівалентними:*
1. *M — строго-первинний модуль.*
2. *Для довільного напередрадикала r, або $r(M) = 0$ або $r(M) = M$.*
3. *M міститься в кожному цілком інваріантному підмодулі модуля $E(M)$.*
4. *Для кожного елемента $y \in M$ і для $0 \neq x \in M$ існують такі $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$, що $\mathrm{Ann}(xs_1, xs_2, \ldots, xs_n) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Якщо $r(M) \neq 0$ для деякого напередрадикала r, то для $y \in M$ існують такі $x_1, x_2, \ldots, x_n \in r(M)$, що $\mathrm{Ann}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$. Тоді для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (r(M))^n$ образ $f\colon xS \to yS$, що визначається за правилом $f(xa) = ya$ для всіх $a \in S$, є коректно визначеним, і тому xS є r-радикальним, а отже $yS \subseteq r(M)$. Тому $r(M) = M$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Якщо $0 \neq N \subseteq E(M)$ є цілком інваріантним, то $r^N(E(M)) = N$, більше того, $r^N(M) = M \cap R^N(E(M)) = M \cap N \neq 0$. Навпаки, $R^N(M) = M$ і $M \subseteq N$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Нехай для ненульового елемента $x \in M$ модуль N міститься в $E(M)$, що є сумою гомоморфних образів модуля xS. Тоді N є цілком інваріантним, і тому за припущенням $M \subseteq N$, і, більше того, $y = \sum_{i=1}^{n} f_i(xs_i)$ для $s_i \in S$ і $f_i \in \mathrm{Hom}(xS, E(M))$. Тому $ya = 0$, якщо $xs_ia = 0$ для всіх i.

(4) $\Rightarrow$ (1). Для $0 \neq N \subseteq M$ нехай $0 \neq x \in N$. Також припустимо, що для кожного $y \in M$ існують такі $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$, що $\mathrm{Ann}(xs_1, xs_2, \ldots, xs_n) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$. Оскільки для всіх i $xs_i \in N$, позначимо $x_i = xs_i$. Тому $\mathrm{Ann}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{Ann}(y)$, більше того, M є строго-первинним модулем. $\square$

Очевидно, прості модулі є строго-первинними, тому максимальні ліві ідеали кільця є строго-первинними. Зауважимо також, що деякі модулі M взагалі не мають первинних підмодулів, і вони називаються бідними на первинні підмодулі, чи, просто, *модулями без первинних підмодулів.* Тепер наведемо інформацію про деякі особливості строго-первинних підмодулів, які необхідно буде врахувати при доведенні основних результатів статті. Зокрема зупинимося на зв'язку властивостей ідеалів кільця коефіцієнтів та ідеалів кільця многочленів над ними. Для того, щоб ознайомитися з основними властивостями модулів без первинних підмодулів над комутативними кільцями можемо скористатися статтею [8]. Тепер цікаво розглянути співвідношення між лівим строго-первинним модулем M і його квазі-ін'єктивною оболонкою $Q(M)$. За теоремою 19.2 з [4], $Q(M) = \Lambda M \subseteq \widehat{M}$, де $\widehat{M}$ є ін'єктивною оболонкою M і $\Lambda = \mathrm{End}_R \widehat{M}$. Нехай $H = \mathrm{End}_R Q(M)$, причому ендоморфізми записуються зліва від аргументів. Модуль $Q(M)$ канонічно перетворюється в лівий R-H-бімодуль. Тепер можемо сформулювати означення строго-первинного модуля в іншому вигляді.

Теорема 3. *Лівий R-модуль M є строго-первинним тоді і лише тоді, коли його квазі-ін'єктивна оболонка $Q(R)$ є простим R-H-бімодулем.*

Нехай $R\langle X_H \rangle$ — кільце поліномів, які не комутують з X_h, $h \in H$, і комутують з елементами кільця R. Наділимо $Q(M)$ канонічною структурою $R\langle X_H \rangle$-модуля, приймаючи за означенням $X_h x = hx$ для $h \in H$ і $x \in Q(M)$. Відомо, що $Q(M)$ є простим $R\langle X_H \rangle$-модулем для строго-первинного R-модуля M.

Теорема 4. *Для кожного лівого строго-первинного ідеала $\mathfrak{p} \subset R$ існує такий максимальний лівий ідеал $\mathfrak{M} \subset R\langle X_H \rangle$, що $\mathfrak{p} = \mathfrak{M} \cap R$.*

Цей факт вказує на те, що, концептуально, ситуація в довільному некомутативному кільці, у деякому сенсі, нагадує стан справ в комутативного випадку, оскільки ліві строго-первинні ідеали отримуються з максимальних лівих ідеалів кілець поліномів природнім шляхом. Тепер можемо охарактеризувати модулі без первинних підмодулів. Нагадаємо, що модуль, який не має максимальних підмодулів називається *радикальним за Джекобсоном.* Нехай $\mathbf{X}$ — довільна множина. Позначимо через $R\langle \mathbf{X} \rangle$ кільце поліномів над кільцем R, від множини $\mathbf{X}$ некомутативних невідомих, які, тим не менше, комутують з елементами кільця R, і через $M\langle \mathbf{X} \rangle$ деякий R-модуль поліномів з коефіцієнтами з модуля M. Очевидно, що $M\langle \mathbf{X} \rangle$ є канонічними $R\langle \mathbf{X} \rangle$-модулем.

Теорема 5. *Модуль M над кільцем R є модулем без первинних підмодулів тоді і лише тоді, коли для довільної множини $\mathbf{X}$ невідомих, $M\langle \mathbf{X} \rangle$ є радикальним за Джекобсоном як $R\langle \mathbf{X} \rangle$-модуль.*

Перетин всіх лівих строго-первинних підмодулів даного R-модуля M називається *лівим строго-радикальним* підмодулем модуля M, який позначається через $\mathrm{sp}_l\, M$. За означенням, $\mathrm{sp}_l\, M = M$, коли M не має строго-первинних підмодулів. Цікавим є випадок, коли $M = R$. Нагадаємо, що радикал Левицького $L(R)$ є найбільшим локально-нільпотентним ідеалом кільця R. В статті доводиться, що для довільного кільця R, лівий строго-первинний радикал $\mathrm{sp}_l\, R$ збігається з радикалом Левицького $L(R)$ кільця R.

3. Спектр Розенберга мультиплікаційного модуля. Нехай R — асоціативне кільце з $1 \neq 0$, M лівий унітальний мультиплікаційний R-модуль, A — абелева група. Через $I_l R$ позначимо гратку всіх лівих ідеалів кільця R, а через $I_l M$ — гратку всіх лівих підмодулів модуля M. Через *P(A)* позначимо множину всіх скінченно-породжених підгруп абелевої групи A. Позначимо $(m : w) = \{\lambda | \lambda \in R, \lambda w \subseteq m\}$, де $m \in I_l(R)$, $w \in P(R)$.

Два підмодулі N і L модуля M називаються *M-зв'язаними*, якщо $M/N \cong M/L$. Це відношення, легко побачити, є відношенням еквівалентності. Очевидно також, що ліві ідеали A і B є зв'язаними тоді і лише тоді, коли існують такі елементи λ і μ кільця R, що $(A : \lambda)$=$(B : \mu)$.

Тепер можемо ввести відношення напередпорядку на множині $I_l M$ вважаючи, що $N \leq_M L$ тоді і лише тоді, коли існують такі $N_1, \ldots, N_k \in I_l M$, що:

1. для кожного $i \in \{1, \ldots, k\}$ модуль N_i є M-зв'язним з N;
2. $\bigcap_{i=1}^{k} N_i \subseteq L$.

Коректність означення встановлюється у наступній лемі.

Лема 1. *Введене відношення $\leq_M$ є рефлексивним і транзитивним.*

Доведення. Рефлексивність є очевидною, оскільки, коли взяти за систему підмодулів $N_1, \ldots, N_k \in I_l M$ систему з одного підмодуля N, перевірка потрібного не складає жодних труднощів. Для доведення транзитивності, припустимо, що $N \leq_M L$ і $L \leq_M K$. Тоді $N = \mathfrak{a}M$, $L = \mathfrak{b}M$ і $K = \mathfrak{d}M$, де $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ ідеали кільця R. Зрозуміло, що $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{d}$, отже $N \leq K$, що й потрібно було довести. □

Нехай $(P, \leq)$ — частково-впорядкована множина. Фільтром над P називається непорожня підмножина F множини P, яка має такі властивості:

(1) Для довільних $x, y \in F$ існує такий елемент $z \in F$, що $z \leq x$ і $z \leq y$ (F є базою фільтра).

(2) Для довільних $x \in F$ та $y \in P$, з того, що $x \leq y$ випливає, що $y \in F$.

(3) Фільтр називається власним, якщо він відмінний від множини P.

Через fil-R позначатимемо гратку усіх фільтрів лівих ідеалів кільця R. Нагадаємо означення операції множення фільтрів на ліві ідеали: $F \odot \{m\} = \{n \in I_l(R) | (n : w) \in F$, де $m \in I_l(R), w \in P(m)\}$. Вона дозволяє, вслід за Габріелем, ввести множення довільних фільтрів за таким законом $F \odot G = \bigcup_{m \in G} F \odot \{m\}$, для будь-яких $F, G \in$ fil-R. Фільтр називається фільтром Габріеля, якщо $F \odot \{R\} = F = F \odot F$. Фільтр називається первинним, якщо його не можна зобразити у вигляді перетину більших фільтрів. Іншими словами, це первинний елемент в гратці фільтрів.

Поняття спектра Розенберга (позначення: $\mathrm{Spec}_l(M)$) модуля M, базується на відношенні напередпорядку, визначеному на множині $I_l M$. Якщо $N, L \in I_l(M)$, то вважаємо $N \leq L$, якщо $(N : w) \subseteq L$ для деякого $w \in P(R)$.

Лівий спектр $\mathrm{Spec}_l(M)$ модуля M це множина усіх таких лівих підмодулів P, що $(P : x) \leq P$ для кожного $x \in R \setminus P$. На множині $\mathrm{Spec}_l(M)$ задається топологія: $U_l(N) = \{\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}_l(M) | N \nleq \mathcal{P}\}$ для довільного підмодуля $N \in I_l(M)$. Через $\zeta(M)$ позначимо сім'ю множин вигляду $U = U_l(N) \subseteq \mathrm{Spec}_l(M)$. Тоді $\zeta(M)$ містить порожню множину і весь простір $\mathrm{Spec}_l(M)$. Крім цього, $\zeta(M)$ є замкненою відносно довільних об'єднань та скінченних перетинів. Тому, $\mathrm{Spec}_l(M)$ — топологічний простір з топологією типу Зариського. Спектр Розенберга мультиплікаційного модуля завжди є непорожнім, бо підмодуль вигляду PM модуля M, де P — первинний ідеал кільця R, є первинним підмодулем. Крім цього, максимальні підмодулі теж належать до спектра Розенберга.

Зауваження 1. Якщо модуль M має максимальні підмодулі, то його спектр Розенберга непорожній. Зокрема, кожен V-модуль має непорожній спектр Розенберга.

Топологією Зариського на $X = \mathrm{Spec}(M)$ є топологія τ, описана множиною $\Omega = \{V(N) | N \text{ є підмодулем модуля } M\}$, як множиною замкнених підмножин X, де $V(N) = \{P \in X \mid (P : M) \supseteq (N : M)\}$.

Квазітопологія Зариського на $X = \mathrm{Spec}(M)$ описується так: приймемо $V^*(N) = \{P \in X | P \supseteq N\}$ і $\Omega^* = \{V^*(N) | N \subseteq M\}$. Тоді існує топологія τ^* на X, для якої Ω^* є множиною замкнених підмножин на X тоді і лише тоді, коли Ω^* є замкненою відносно скінченних об'єднань. В цьому випадку τ^* називається квазітопологією Зариського. Приймемо $\Omega^c = \{\bigcap_{i \in I} (\bigcup_{j=1}^{n_i}) | W_{i,j} \in \Omega^*, n_i \in \mathbb{N}, I \text{ є індексною множиною}\}$. В такому випадку елементи Ω^c задовольняють всі аксіоми замкнених множин топологічного простору $X = \mathrm{Spec}(M)$. Така топологія називається класичною топологією Зариського на M і позначається τ^c.

Крім спектра Розенберга модуля M можна побудувати і інші аналоги спектра комутативного кільця. Одним з них є теоретико-скрутовий спектр Попеску. Цікавою проблемою є порівняння цих двох спектрів кільця R.

Нагадаємо ще деякі означення, на яких базується поняття теоретико-скрутового спектра. Первинний скрут $\pi \in R\text{-tors}$ це скрут, для якого $\pi = \chi(R/I)$ для деякого критичного ідеала I кільця R, де R-tors-гратка всіх скрутів категорії R-mod, $\chi(R/I)$-найбільший скрут, відносно якого кожен модуль $M \in R/I$ є модулем без скруту. Під теоретико-скрутовим спектром R-*sp* кільця R розуміють простір усіх первинних скрутів (або відповідних первинних фільтрів Габріеля основного кільця) у категорії лівих R-модулів з топологією типу Зариського. Також нагадаємо, що якщо τ — скрут на категорії R-mod, то лівий R-модуль M називається τ-модулем без скруту тоді і лише тоді, коли існує R-мономорфізм з M в деякий член τ. Клас всіх τ-модулів без скруту позначимо через $\mathfrak{F}_\tau$. Детальніше про теорію первинних скрутів можна прочитати в [10, 11].

Зауваження 2. Множину всіх скрутів R-tors можна перетворити у частково впорядковану якщо ввести частковий порядок так, що $\tau \leq \tau'$ тоді і лише тоді, коли $\mathfrak{T}_\tau \subseteq \mathfrak{T}_{\tau'}$, тобто клас періодичних модулів одного скруту міститься в класі періодичних модулів іншого скруту.

Введемо поняття теоретико-скрутового спектра модуля M. Використавши введені вище поняття теоретико-скрутового спектра кільця R, введемо поняття $\mathrm{supp}(M) = \{\sigma \mid \sigma(M) \neq 0\}$, де $\sigma(M)$ множина первинних скрутів модуля M. Теоретико-скрутовий спектр модуля M, $\mathrm{R\text{-}Sp}(M)$ визначається як $\mathrm{R\text{-}sp}(R) \cap \mathrm{supp}(M)$.

За Голаном, розглянемо функцію $\mathfrak{c}\colon \tau \mapsto \{\tau' \in R\text{-prop}\,|\,\tau \leq \tau'\}$. Відомо, що сім'я $\{c(\tau)|\tau \in R\text{-tors}\}$ підмножин з R-prop утворюють базу топології на R-prop, яка називається *порядковою топологією.*

Підмодуль P модуля M називається *цілком-первинним,* якщо для довільних елементів $a, b \in R$ та $m \in M$, з того, що $abm \in P$ випливає, що або $am \in P$, або $bm \in P$.

Цілком первинний спектр $\mathrm{Spec}'_l(M)$ можна розглядати як набір цілком первинних підмодулів з топологією типу Зариського. Очевидно, що цілком первинний спектр є значно біднішим, ніж лівий спектр Розенберга.

Підмодуль N модуля M називається *двостороннім*, підмодулем якщо для довільних елементів $a, b \in R$ та $m \in M$, з умови $am \in N$ випливає $abm \in N$. Цілком первинний модуль є двостороннім (за означенням).

Кільце R називатимемо *лівим (правим) кільцем Безу*, якщо сума двох його довільних головних ідеалів знову є головним ідеалом, тобто $\forall a, b \in R$, $aR + bR = dR$ $(Ra + rb = Rd)$.

Нехай R напівпервинне кільце з одиницею, R-mod — категорія унітарних лівих R-модулів, R-tors — простір всіх скрутів категорії R-mod, R-prop — множина всіх власних скрутів категорії R-mod.

Ідеал $Q \subseteq R$ називається *локально-первинним ідеалом,* якщо з умови $xRy \subseteq \sqrt{K} \subseteq Q$, де K-скінченно-породжений ідеал випливає, що $x \in Q$ або $y \in Q$ і $\sqrt{K} = \bigcap\{P \in \mathrm{Spec}(R)|K \subseteq P\}$.

Лема 2. *Для довільного підмодуля $P \in \mathrm{Spec}_l(M)$ спектра Розенберга мультиплікаційного модуля, двосторонній підмодуль $(P : M)$ є первинним.*

Доведення. Нехай N, K двосторонні підмодулі модуля M такі, що $K \nleq P$, але $NK \nleq P$. Оскільки підмодуль K є двостороннім, то $K \leq \langle P\rangle$, де $\langle P\rangle = \{Q \in I_l(M) \mid Q \leq P\}$. Тому, за означенням двостороннього підмодуля, $(NK : \omega) \in \langle P\rangle$ для $\omega \in P(M)$. З цього випливає, що $N \leq P$. Оскільки підмодуль N є двостороннім і $(P : M)$ є максимальним з-поміж двосторонніх підмодулів, то з вкладення $N \leq P$ випливає, що $N \leq (P : M)$. □

За попередньою лемою можна побудувати відображення, яке кожному первинному в сенсі Розенберга підмодулю ставить у відповідність двосторонній підмодуль $\varphi\colon P \to (P : M)$.

Твердження 16. *Відображення $\varphi\colon P \to (P : M)$ є ретракцією.*

Доведення. Маємо відображення з лівого спектра Розенберга в класичний спектр $\varphi\colon \mathrm{Spec}_l(M) \to \mathrm{Spec}(M)$. Очевидно, що класичний спектр є підпростором спектра Розенберга, адже всі первинні підмодулі є точками лівого спектра, а класичний спектр це множина всіх первинних підмодулів модуля M. За означенням ретракції, існують потрібні гомоморфізми $1_{\mathrm{Spec}(M)}\colon \mathrm{Spec}(M) \to \mathrm{Spec}(M)$, і $\varphi\,|_{\mathrm{Spec}(M)}= 1_{\mathrm{Spec}(M)}$. Тому, відображення φ є ретракцією, а $\mathrm{Spec}(M)$ є ретрактом $\mathrm{Spec}_l(M)$. □

Лема 3. 1. $\mathrm{Spec}'_l(N) \subseteq \mathrm{Spec}_l(M)$.
2. *Лівий максимальний підмодуль N модуля M є цілком первинним тоді і лише тоді, коли N є двостороннім підмодулем.*
3. *Якщо кожен підмодуль N модуля M є двостороннім, то* $\mathrm{Spec}'_l(M) = \mathrm{Spec}_l(M)$.

Доведення. 1. Зауважимо, що підмодуль N' є цілком первинним тоді і лише тоді, коли $(N' : x) \leq N'$ для довільного $x \in R\backslash N'$, бо кожен цілком первинний підмодуль є первинним підмодулем. Тобто $\mathrm{Spec}'_l(N) \subseteq \mathrm{Spec}_l(M)$.

2. Якщо N є двостороннім підмодулем, то $N \leq (N : x)$ для довільного елемента $x \in M$. Більше того, якщо N є максимальним підмодулем, то $(N : x) = N$ для довільного $x \in M \backslash N$, тобто N належить до $\mathrm{Spec}'_l(M)$. Навпаки, припустимо, що лівий підмодуль N' є цілком первинним. Це означає, що $(N' : x) \leq N$ для всіх $x \in M \backslash N'$. Оскільки $(N' : x)$ є максимальним підмодулем для довільного $x \in M$, з вкладення $(N' : x) \leq N$ випливає, що $(N' : x)$ збігається з N'. ТомуN' є двостороннім підмодулем.
3. Для двосторонніх підмодулів напередпорядок збігається з включенням. □

Теорема 6. *Нехай $\{\mathfrak{p}_i\}$ — ланцюг первинних (в сенсі Розенберга) підмодулів модуля M. Тоді $\bigcap \mathfrak{p}_i$ і $\bigcup \mathfrak{p}_i$ є первинними (в сенсі Розенберга) підмодулями.*

Теорема 7. *Нехай $\mathfrak{p}$ і $\mathfrak{q}$ різні ліві первинні (в сенсі Розенберга) підмодулі модуля M. Тоді існують різні первинні (в сенсі Розенберга) підмодулі $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$, для яких $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}_1 \leq \mathfrak{q}_1 \leq \mathfrak{q}$ і не існує первинного (в сенсі Розенберга) підмодуля, що стоїть між $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$.*

Доведення. Вкладемо (за лемою Цорна) максимальний ланцюг $\{\mathfrak{p}_i\}$ первинних (в сенсі Розенберга) підмодулів M між $\mathfrak{p}$ і $\mathfrak{q}$. Візьмемо елемент x, що належить до $\mathfrak{q}$ і не належить до $\mathfrak{p}$. Означимо $\mathfrak{q}_1$ як перетин всіх тих $\mathfrak{p}_i$-х, що містять x, а $\mathfrak{p}_1$ як об'єднання всіх $\mathfrak{p}_i$-х, що не містять x. За попередньою теоремою $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$ є первинними (в сенсі Розенберга) підмодулями модуля M. Жоден з $\mathfrak{p}_i$-х не може бути строго між $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$. Якщо $x \in \mathfrak{p}_i$, то $\mathfrak{q}_1 \leq \mathfrak{p}_i$, і якщо $x \notin \mathfrak{p}_i$, то $\mathfrak{p}_i \leq \mathfrak{p}_1$. За максимальністю $\{\mathfrak{p}_i\}$ жоден первинний (в сенсі Розенберга) підмодуль не може лежати точно між $\mathfrak{p}_1$ і $\mathfrak{q}_1$. □

Для первинного підмодуля P з M позначимо $\mathcal{C}(P) = \{c \in M | \forall r \notin P, cr \notin M\}$. Розглянемо фільтр $\mathcal{D}_P$ таких правих ідеалів D кільця R, що $r^{-1}D$ перетинає $\mathcal{C}(P)$ для всіх елементів $r \in R$. $T_P(M) = \{m \in M | m^{-1}0 \in \mathcal{D}_P\}$ — P-двосторонній первинний ідеал, що називається P-періодичним підмодулем правого R-модуля M. Міркуючи подібно, як і Й. Ламбек та Г. Міхлер, отримуємо твердження, подібні до отриманими авторами в [22].

Твердження 17. *Нехай* N *підмодуль мультиплікаційного модуля* M, *що містить первинний підмодуль $P \subseteq M$.* N *є первинним підмодулем тоді і лише тоді, коли N/P є первинним в M/P.*

Твердження 18. *Якщо* P*-двосторонній первинний ідеал* R, M — *мультиплікаційний модуль над цим кільцем, то:*
1. $T_P(M) \subseteq P$;
2. Якщо $\overline{P} = P/T_P(M)$, то $\mathcal{C}(\overline{P}) = (\mathcal{C}(P) + T_P(M))/T_P(M)$.

Доведення. 1. Нехай $t \in T_P(M)$, тоді $tD = 0$ для деякого $D \in \mathcal{D}_P$. Отже $tC = 0$ для деякого $C \in D \cap \mathcal{C}(P)$. Оскільки C є регулярним елементом R/P, то $t \in P$.
2. Це твердження випливає з попереднього. □

Теорема 8. *Нехай* R *інваріантне справа нетерове кільце. Тоді простір R-$\mathrm{sp}(M)$ з топологією скінченного порядку є гомеоморфним до простору* $\mathrm{spec}(M)$ *з топологією Зариського.*

Доведення. Означимо відображення $h\colon \mathrm{Spec}(M) \to \mathrm{R}\text{-}\mathrm{sp}(M)$ за правилом $P \mapsto \chi(M/P)$ для первинного підмодуля $P \subseteq M$. За вказаною вище умовою, за кожним довільним правим ідеалом кільця R можна побудувати критичний первинний ідеал вигляду $s^{-1}R$, $s \in R$, де $s^{-1}R = \{r \in R | sr \in R\}$, тому побудоване нами відображення сюр'єктивне.

Більше того, $T_{\chi(R/P)}M = \{m \in M | r^n m = 0$ для деякого $r \in R \backslash P, n \in \mathbb{Z}\}$. Отже, h — бієктивне відображення. Якщо N підмодуль модуля M, $V(N) = \{P \in \mathrm{Spec}(M) | N \subseteq P\}$ — підмножина в $\mathrm{Spec}(M)$, замкнена в топології Зариського. Отже, $h(V(N)) = \{\chi(M/P) \in \text{R-sp}(M) | \chi(M/P) \leq \chi(M/N)\}$ — замкненою в топології скінченного порядку. □

Відомо, що на першому етапі спектральні простори вводилися як множини первинних ідеалів комутативного кільця з топологією Зариського. Пізніше було подане чисто топологізоване означення. Нехай W — топологічний простір, *K(W)* — множина всіх квазі-компактних і відкритих підмножин W. Тоді W називатимемо *спектральним простором,* якщо він має всі з перелічених нижче властивостей:
1. W є квазі-компактним та T_0-простором.
2. *K(W)* є базою з відкритих підмножин W.
3. *K(W)* замкнена відносно скінченних перетинів та відкритих баз, тобто, перетин скінченної кількості відкритих квазі-компактних підмножин W є квазі-компактною підмножиною.
4. W є *тверезим* простором, тобто кожна непорожня нерозкладна замкнена підмножина C з W матиме (обов'язково єдину!) загальну точку.

Як зазначалося вище, множина первинних ідеалів комутативного кільця R, $\mathrm{Spec}_l(R)$ з топологією Зариського є спектральним простором. Крім цього, існує відповідність між категорією комутативних кілець та категорією спектральних просторів. Ще одним джерелом спектральних просторів є $\mathrm{Spec}(L)$-зображувальний простір обмеженої дистрибутивної гратки L. Існує взаємно-однозначна відповідність між категорією таких граток та категорією спектральних просторів. Проте для випадку некомутативного кільця, спектральність простору первинних ідеалів з топологією Зариського не завжди наявна фактично. Виникає питання: чому для випадку некомутативного кільця властивість спектрального простору не виконується? Виявляється, що справа в тому, що не завжди існує база з компактних відкритих множин, яка замкнена відносно скінченних перетинів. Тому, цікаво детально дослідити питання про існування некомутативних кілець, для яких простір $\mathrm{Spec}(R)$ є спектральним. Капланскі ввів поняття нео-комутативного кільця та довів, що для такого кільця $\mathrm{Spec}(R)$ є спектральним простором. Пізніше було доведено, що цей факт є правильним і для квазі-комутативного кільця. Кільце називається *нео-комутативним,* якщо в ньому добуток двох скінченно-породжених ідеалів є скінченно-породженим ідеалом (ідеали тут скінченно-породжені, якщо вони, як двосторонні ідеали, мають скінченні підмножини твірних). Важливі результати відносно спектральності просторів для некомутативного випадку отримав Беллюсе. Він довів, що для довільного напівпервинного кільця з одиницею можна до первинних ідеалів $\mathrm{Spec}(R)$ додати локально-первинні ідеали, і отримана множина з топологією Зариського стане спектральним простором. Отриманий простір називається розширеним первинним спектром і позначається $\mathrm{XSpec}(R)$. Він є, в деякому сенсі, найменшим серед спектральних просторів, що містять $\mathrm{Spec}(R)$. Докладніше все це викладено в [6, 21].

4. Співвідношення між різними типами спектрів некомутативних кілець. Виникає питання, чи можливо отримати результати такого типу, як у Беллюсе, для теоретико-скрутового спектра? Введемо спочатку потрібні поняття.

Скрут $\sigma \in R$-tors називається *локально-первинним скрутом,* якщо $\forall \chi, \tau \in R$-tors з умови $\tau(R\text{-tors})\chi \leq \sqrt{\theta} \leq \sigma$, де θ є скінченнопородженим в двосторонньому сенсі випливає, що $\tau \leq \sigma$ або $\chi \leq \sigma$.

Зазначимо, що $\sqrt{\theta} = \bigcap_i \pi_i$, де π_i-первинний скрут і $\theta \leq \pi_i$. θ є скінченно-породженим

$\Leftrightarrow \theta$ має базу зі скінченно-породжених (в двосторонньому сенсі) ідеалів. Множину всіх локально-первинних скрутів позначимо через XSp-R.

Твердження 19. *Первинний скрут π категорії R-mod є локально-первининним.*

Доведення. Нехай $\chi, \tau \in R$-tors — довільні скрути, що задовольняють умову $\tau\chi \leq \sqrt{\theta}$, де θ скінченнопороджений в двосторонньому сенсі. Тоді $\theta \leq \pi$, звідки випливає, що $\sqrt{\theta} \leq \pi$. Також $\tau\chi \leq \pi$, звідки випливає, що $\tau \leq \pi$ (або $\chi \leq \pi$). Останнє ж означає, що $\mathfrak{T}_\tau \subseteq \mathfrak{T}_\pi$, де $\mathfrak{T}_\tau$ і $\mathfrak{T}_\pi$ класи періодичних модулів відповідних скрутів. З іншого боку, якщо $\chi \leq \pi$, то $\mathfrak{T}_\chi \subseteq \mathfrak{T}_\pi$. Це означає, що π є локально-первинним скрутом. $\square$

З цього можна зробити висновок, що клас локально-первинних скрутів є ширшим, ніж клас первинних скрутів.

Нехай XSp-R простір всіх локально-первинних скрутів. Наділимо його топологією. Вслід за Голаном означимо функцію $\mathfrak{c}\colon \tau \mapsto \{\tau' \in R\text{-prop} \,|\, \tau \leq \tau'\}$. Відомо, що сім'я $\{c(\tau) | \tau \in R\text{-tors}\}$ підмножин з R-prop утворює базу топології на R-prop, яку називають *порядковою.* Порядкова топологія породжує топологію на XSp-R з відкритих множин $\mathfrak{c}(\tau) = \mathfrak{c}(\tau) \cap \mathrm{XSp\text{-}R}$ для довільного $\tau \in R$-tors.

Встановимо тепер нову властивість таких множин.

Твердження 20. *Якщо $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{XSp\text{-}R}$, то $\mathfrak{c}(\tau_1\tau_2) = \mathfrak{c}(\tau_1) \cup \mathfrak{c}(\tau_2)$.*

Доведення. Те, що $\mathfrak{c}'(\tau_1) \cup \mathfrak{c}(\tau_2) \subseteq \mathfrak{c}'(\tau_1\tau_2)$ випливає з леми 2.1([2]). Зворотнє включення випливає з означенням локально-первинного скруту. $\square$

5. Розширений теоретико-скрутовий спектр, лівий спектр та спектр Розенберга. Позначимо $U(\tau) = \{\pi \in \mathrm{R\text{-}Sp} \,|\, \tau \not\leq \pi\}$. Тоді $Z(\tau) = \mathrm{R\text{-}Sp} \setminus U(\tau)$. Через $L(R\text{-tors})$ позначимо гратку всіх підмножин, породжених множинами вигляду $Z(\tau)$, де $\tau \in R$-tors, а через $\mathrm{Prim}\, L(R\text{-tors})$ множину всіх первинних фільтрів $\mathfrak{F}$ гратки $L(R\text{-tors})$. Нехай $XU(\tau) = \{\sigma \in \mathrm{R\text{-}XSp} \,|\, \tau \not\leq \sigma\}$, $XZ(\tau) = \mathrm{XSp\text{-}R} \setminus XU(\tau)$. Через $XL(R\text{-tors})$ позначимо гратку всіх підмножин, породжених $XZ(\tau)$ для всіх $\tau \in R$-tors, через $\mathrm{Prim}\, XL(R\text{-tors})$ множину всіх первинних фільтрів $\mathfrak{F}$ гратки $XL(R\text{-tors})$. Нехай також $\mathfrak{J} = \{\tau \in R\text{-tors} \,|\, XZ(\tau) \in \mathfrak{F}\}$, де $\mathfrak{F}$-первинний фільтр на гратці $XL(R\text{-tors})$ (див. [4]).

Задамо ще відображення $\Phi\colon \mathrm{R\text{-}Sp} \to \mathrm{Prim}\, L(R\text{-tors})$ за правилом $\pi \mapsto \{S \in L(R\text{-tors}) | \pi \in S\}$ ([4]).

Лема 4. *Відображення $X\Phi\colon \mathrm{R\text{-}XSp} \to \mathrm{Prim}\, XL(R\text{-tors})$, визначене за правилом $\sigma \mapsto \{S \in XL(R\text{-tors}) | \sigma \in S\}$ є бієктивним.*

Доведення. Перевіримо, чи $X\Phi$ є коректно визначеним та ін'єктивним відображенням. Кожному локально-первинному скруту π ставимо у відповідність первинний фільтр $\mathfrak{F}$. Для того, щоб перевірити сюр'єктиність відображення, візьмемо первинний фільтр $\mathfrak{F} \in \mathrm{Prim}\, XL(R\text{-tors})$ і означимо множину скрутів $\mathfrak{J} := \{\chi \in R\text{-tors} \,|\, XZ(\chi) \in \mathfrak{F}\}$. Тоді, $\mathfrak{J}$ є локально-первинним скрутом. Справді, якщо $\chi, \tau \in \mathfrak{J}$, то $XZ(\chi - \tau) \supseteq XZ(\chi) \cap XZ(\tau)$. Оскільки $\mathfrak{F}$ — фільтр, то $\chi - \tau \in \mathfrak{J}$. Більше того, якщо $\alpha, \beta \in R$-tors, то $XZ(\alpha\chi\beta) \supseteq XZ(\chi)$, отже $\alpha\chi\beta \in \mathfrak{J}$. Тепер з того, що $\varnothing \notin \mathfrak{F}$ маємо $1 \notin \mathfrak{F}$. Отже, $\mathfrak{J}$ є власним скрутом. Припустимо, що $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{J}$ і $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathfrak{J}$. Оскільки $\mathfrak{F}$ є первинним фільтром, то $\bigcup_j XZ(b_j) \notin \mathfrak{F}$. З умови $\bigcap_i XZ(a_i) \in \mathfrak{F}$, враховуючи, що $\mathfrak{F}$ є власним фільтром, отримаємо $(\bigcap_i XZ(a_i)) \setminus (\bigcup_j XZ(b_j) \notin \mathfrak{F}) \neq \varnothing$. Отже, існує локально первинний скрут з фільтром Габріеля, який містить елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{J}$, але не містить $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathfrak{J}$. За означенням існує такий первинний скрут π, що $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{J}_{pi}$ і $b_1, b_2, \ldots, b_m \notin \mathfrak{J}_{pi}$. Тому $\mathfrak{J} \in \mathrm{R\text{-}XSp}$, а звідси випливає, що $\mathfrak{F} = X\Phi(\mathfrak{J})$. $\square$

Твердження 21. *Комутативною є така діаграма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}\text{-}\mathrm{XSp} & \xrightarrow[X\Phi]{\cong} & \mathrm{Prim}\, XL(\mathrm{R}\text{-}\mathrm{tors}) \\ \big\uparrow & & \cong \big\uparrow \mathrm{Prim}\,\sigma \\ \mathrm{R}\text{-}\mathrm{Sp} & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathrm{Prim}\, L(\mathrm{R}\text{-}\mathrm{tors}) \end{array}$$

Доведення. Як доведено у статті [21], перший рядок діаграми задається ізоморфізмом. Про нижній рядок вже сказано вище. Вертикальні гомоморфізми задаються безпосередньо. Тому, перевірка комутативності діаграми тепер не становить жодних труднощів. □

Твердження 22 (І. Клепт, твердження 1)**.** *Нехай X топологічний простір і $Y \subseteq X$ щільна підмножина в конструктивній топології X, а також, що простір Y, оснащений топологією, яка індукується з X, є спектральним простором. Якщо $x \in X$, то замикання $\{\overline{x}\}$ для $\{x\}$ в перетині $X \cap Y$ і $\{\overline{x}\} \cap Y$ має загальну точку в Y. Спектральне відображення $\Phi\colon X \to Y$, породжене гратковим гомоморфізмом $\overline{\mathcal{K}}(Y) \to \overline{\mathcal{K}}(X)$, $C \mapsto C_X$, відображає точку $x \in X$ в загальну точку $\{\overline{x}\} \cap Y$. Зокрема, Φ є ретрактом вкладення $Y \hookrightarrow X$ (яке не є спектральним, якщо $Y \neq X$).*

Теорема 9. *Якщо* R-Sp *спектральний простір, то для довільного локально-первинного скруту σ з R*-tors, *скрут $\sqrt{\sigma}$ є первинним і відображення $\Psi\colon$ R-XSp $\to$ R-Sp, що діє за правилом $\sigma \mapsto \sqrt{\sigma}$, є спектральним ретрактом вкладення* R-Sp $\hookrightarrow$ R-XSp.

Доведення. За попередньою теоремою $Y := \mathrm{R}$-Sp є щільним в конструктивній топології на $X := R$-XSp і топологія на R-Sp індукується з R-XSp. Тепер досить застосувати попереднє твердження до відповідних топологічних просторів. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Andrunakievich V. *Prime modules and Baer radical*// Siberian Mathematical Journal. – 1961. – V.2, №6. – P. 801–806. (in Russian)
2. Andrunakievich V.A., Riabuhin Yu.M. *Special modules and special radicals*// DAN SSSR. – 1962. – V.147, №6. – P. 1274–1277. (in Russian)
3. Maloid-Glebova M.O. *On torsion-theoretic spectrum of left-invariant ring and weakly-multiplication and pure-multiplicayion modules*// Applied Problems of Mechanics and Mathematics. – 2011. – V.9. – P. 87–94. (in Ukrainian)
4. Azizi A. *Radical formula and prime submodules*// J. Algebra. – 2007. – V.307. – P. 454–460.
5. Bican L., Jampor P., Kepka T., Nemec P. *Prime and coprime modules*// Fund. Math. – 1980. – V.57. – P. 33–45.
6. Beachy J.A. *Some aspects of noncommutative localization*// In book: Noncommutative Ring Theor, LNM, Spriger-Verlag, Berlin. – 1975. – V.545. – P. 2–31.
7. Behboodi M., Koohy H. *Weakly prime modules*// Vietnam J. Math. – 2004. – V.32, №2. – P. 185–195.
8. Belluce L.P. *Spectral closure for non-commutative rings*// Communications in Algebra. – 1997. – V.25, №5. –P. 1513–1536.
9. Dauns J. *Prime modules*// J. Reine Angew. Math. – 1978. – V.298. – P. 156–181.
10. Golan J.S. *Topologies on the torsion-theoretic spectrum of a noncommutatie ring*// Pacific Journal of Mathematics. – 1974. – V.51, №2. – P. 439–450.

11. Golan J.S., Torsion theories. – Longman Scientific & Technical, Harlow, 1986, 651 p.
12. Feller E.H., Swokowski E.W. *Prime modules*// Can. J. Math. – 1965. – V.17. – P. 1041–1052.
13. Handelman D., Lawrence J. *Strongly prime rings*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V.211. – P. 209–223.
14. Hochster M. *Prime ideal structure in commutative rings*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V.137. – P. 43–60.
15. Jara P., Verhaege P., Verschoren A. *On the left spectrum of a ring*// Comm. Algebra. – 1994. – V.22, №8. – P. 2983–3002.
16. Johnson R.E. *Representations of prime rings*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – V.74, №2. – P. 351–357.
17. Karakas H.I. *On Noetherian modules*// Journal of Pure and Applied Science. – 1972. – P. 165–168.
18. Kaučikas A. *On the left strongly prime modules and ideals*// Liet. Mat. Rink, Special Issue. – 2001. – V.41. – P. 84–87.
19. Kaučikas A. *On the left strongly prime modules and their radicals*// Lietuvos matematikos rinkinys. – 2010. – V.51. – P. 31–34.
20. Kaučikas A., Wisbauer R. *On strongly prime rings and ideals*// Comm. Algebra. – 2000. – V.28, №11. – P. 5461–5473.
21. Klept I., Tressl M. *The prime spectrum and extended prime spectrum of noncommutative rings*// Algebr Represent Theor. – 2007. – V.10. – P. 257–270.
22. Lambek J., Michler G. *The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian ring*// J. Algebra. – 1974. – V.25. – P. 364–389.
23. Lu C.P. *Spectra of modules*// Comm. Algebra. – 1995. – V.23. – P. 3741–3752.
24. McCasland R.L., Moore M.E., Smith P.F. *On the spectrum of the module over a commutative ring*// Comm. Algebra. – 1997. – V.25, №1. – P. 79–103.
25. McCoy N.H. Rings and ideals. – Carus Mathematical Monographs, Math. Assoc. Amer., Menasha, WI: George Banta, 1962, №8.
26. Page S. *Properties of quotient rings*// Can. J. Math. – 1972. – V.24, №6. – P. 1122–1128.
27. Popescu N. Abelian cathegories with applications to rings and modules. – Academic press, London-New York, 1973, 357 p.
28. Tuganbaev A.A. *Multiplication modules*// Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – V.123, №2. – P. 3839–3905.
29. Shigenaga K. *On some prime modules*// Res. Rep. of U-be. Tech. Coll. – 1982. – №28. – P. 1–8.
30. Rosenberg A. Noncommutative algebraic geometry and representations of quantized algebras. – Kluwer Academic Publishers, 1995, 316 p.
31. Wisbauer R. *On prime modules and rings*// Commun. Algebra. – 1983. – V.11. – P. 2249–2265.

Ivan Franko National University of Lviv
martamaloid@gmail.com

Надійшло 8.09.2013