УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. В. Нестеренко

РОЗРИВИ ДВОСТОРОННЬО КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ ПЕРЕХІДНИХ ФУНКЦІЙ

V. K. Maslyuchenko, V. V. Nesterenko. *Discontinuity of bilaterally quasi-continuous transitional functions*, Mat. Stud. **41** (2014), 18–27.

It is shown that the set of points of discontinuity of bilaterally quasi-continuous transitional function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ has no isolated points. For any perfect nowhere dense subset F of nondegenerate segment $J \subseteq \mathbb{R}$ bilaterally quasi-continuous transitional function $f\colon J \to \mathbb{R}$ such that F is the set of points of discontinuity of f is constructed.

В. К. Маслюченко, В. В. Нестеренко. *Разрывы двухсторонне квазинепрерывных переходных функций* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №1. – C.18–27.

Показано, что множество точек разрыва двухсторонне квазинеперерывной переходной функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ не имеет изолированных точек, и для произвольного совершенного нигде не плотного подмножества F невырожденного промежутка $J \subseteq \mathbb{R}$ построена такая двухсторонне квазинеперерывная переходная функция $f\colon J \to \mathbb{R}$, у которой F — это множество ее точек разрыва.

1. Вступ. В останній час з'явилося чимало робіт про декомпозицію неперервності, в яких однією з умов на функцію виступає замкненість її графіка. У праці [1] була отримана теорема про декомпозицію неперервності функцій із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, в якій замість замкненості графіка фігурувала введена авторами значно слабша властивість, яка дістала назву перехідності. Після цього природно постало питання: в яких результатах про декомпозицію неперервності умову замкненості графіка можна замінити на перехідність?

Перші результати у цьому напрямку були отримані у праці [2], де поняття перехідності було узагальнено на відображення $f\colon X \to Y$ між довільними топологічними просторами X і Y. В цій статті зібрано і частково проаналізовано літературу про декомпозицію неперервності, де фігурує умова замкненості графіка, і отримано загальний результат про неперервність перехідних відображень $f\colon X \to Y$ зі слабкою властивістю Дарбу для локально зв'язного простору X і довільного топологічного простору Y. Він розвиває і покращує попередні результати М. С. Вуйчика і М. Р. Вуйчика та Р. Мімни на цю тему (див. літературу з [2]).

Другим кроком у дослідженні поставленого питання була праця [3], в якій було доведено, що кожне лінійне перехідне відображення $f\colon X \to Y$, де X і Y — довільні топологічні векторні простори, є обов'язково неперервним. Звідси виводилось, що лінійне відображення з скінченновимірним образом і замкненим графіком буде неперервним,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A15.
Keywords: bilateral quasicontinuity; transitional function; set of points of discontinuity.

що узагальнює відомий критерій неперервності лінійного функціонала в термінах його ядра.

У праці [4] Й. Добош з'ясував, що кожна двосторонньо квазінеперервна функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Тому виникло питання: чи буде і двосторонньо квазінеперервна та перехідна функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ теж неперервною? В цій статті ми даємо негативну відповідь на це питання, будуючи приклад двосторонньо квазінеперервної і перехідної функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка розривна в багатьох точках.

Таким чином, виникає загальніша задача про дослідження множини $D(f)$ точок розриву двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тут ми встановлюємо, що множина $D(f)$ для двосторонньо квазінеперервної перехідної функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не може мати ізольованих точок. Разом з тим показуємо, що для довільної досконалої ніде не щільної підмножини F відрізка $[a, b]$ існує така двосторонньо квазінеперервна і перехідна функція $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, у якої $D(f) = F$.

2. (2,3)-схеми. Ми будемо розглядати вектори $r = (b^0, a^1, b^1, a^2, b^2, a^3)$ з простору $\mathbb{R}^6$, для яких $b^0 < a^1 < b^1 < a^2 < b^2 < a^3$. Їх ми будемо називати 6-*векторами*, а їх множину позначатимемо літерою R. Казатимемо, що 6-вектор $r = (b^0, a^1, b^1, a^2, b^2, a^3)$ *здійснює поділ відрізка* $[a, b]$, якщо $a = b^0 < a^1 < b^1 < a^2 < b^2 < a^3 = b$. При цьому поділ утворюється відрізками $M^1 = [a^1, b^1]$ і $M^2 = [a^2, b^2]$, які ми називаємо *вільними* (*лівим* чи *правим* відповідно). Відрізки $N_1 = [b^0, a^1]$, $N_2 = [b^1, a^2]$ і $N_3 = [b^2, a^3]$ ми називаємо *ведучими*.

Для кожного натурального числа n розглянемо множину

$$S_n = \{1, 2, 3\}^n = \{s = (j_1, \ldots, j_n)\colon j_k \in \{1, 2, 3\} \text{ при } k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Елемент $s = (j_1, \ldots, j_n)$ ми будемо коротко позначати $j_1 \ldots j_n$ або $j_1, \ldots, j_n$. Якщо $s = j_1, \ldots, j_n \in S_n$ і $j_{n+1} \in \{1, 2, 3\}$, то символом s, j_{n+1} позначається набір $j_1, \ldots, j_n, j_{n+1}$ з S_{n+1}. Для $n = 0$ покладемо $S_0 = \{\varnothing\}$. Природно вважати, що $\varnothing, j = j$ для кожного $j \in \{1, 2, 3\}$. Як звичайно, символом $\mathbb{N}$ ми позначаємо множину натуральних чисел, тобто $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, і $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. *Пачкою n-го рангу* ми називатимемо сім'ю $W_n = (r_s\colon s \in S_n)$, де $r_s \in R$ для кожного $s \in S_n$. Кожний 6-вектор $r_s = (b^0_s, a^1_s, b^1_s, a^2_s, b^2_s, a^3_s)$ породжує вільні відрізки $M^1_s = [a^1_s, b^1_s]$, $M^2_s = [a^2_s, b^2_s]$ та інтервали $G^1_s = (a^1_s, b^1_s)$, $G^2_s = (a^2_s, b^2_s)$ і ведучі відрізки $N_{s,1} = [b^0_s, a^1_s]$, $N_{s,2} = [b^1_s, a^2_s]$, $N_{s,3} = [b^2_s, a^3_s]$. Таким чином, з кожною пачкою n-го рангу пов'язані три сім'ї відрізків $(M^1_s)_{s \in S_n}, (M^2_s)_{s \in S_n}, (N_s)_{s \in S_{n+1}}$.

Сусідні пачки $W_n = (r_s)_{s \in S_n}$ і $W_{n+1} = (r_s)_{s \in S_{n+1}}$ називаються *узгодженими*, якщо кожний 6-вектор r_s сім'ї W_{n+1} здійснює поділ відповідного ведучого відрізка N_s, пов'язаного з пачкою W_n.

Для невиродженого відрізка $[a, b]$ числової прямої послідовність $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ пачок $W_n = (r_s\colon s \in S_n)$ називається $(2, 3)$-*схемою, пов'язаною з відрізком* $[a, b]$, якщо єдиний вектор

$$r_\varnothing = (b^0_\varnothing, a^1_\varnothing, b^1_\varnothing, a^2_\varnothing, b^2_\varnothing, a^3_\varnothing) = (b^0, a^1, b^1, a^2, b^2, a^3)$$

пачки $W_0 = (r_s)_{s \in S_0}$ нульового рангу здійснює поділ вихідного відрізка $[a, b] = [a_\varnothing, b_\varnothing] = [a_\varnothing, b_\varnothing]$ (його ми вважаємо ведучим) і для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ пачки W_n і W_{n+1} узгоджені. Замість терміну $(2, 3)$-схема, ми будемо вживати коротший термін — *схема*, оскільки інші подібні схеми ми розглядати не будемо.

Нехай $S_\infty = \bigcup_{n=0}^\infty S_n$ і $S = \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$. Для послідовності $s = (j_n)_{n=1}^\infty$ символом s_n позначимо скінченну послідовність $s_n = j_1 j_2 \ldots j_n$, при цьому $s_0 = \varnothing$.

Для $(2,3)$-схеми $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, пов'язаної з відрізком $I = [a,b]$, сімей її вільних інтервалів $(G_s^i)_{s\in S_\infty}$, $i \in \{1,2\}$, та ведучих відрізків $(N_s)_{s\in S_\infty}$ введемо в розгляд відкриті множини $G^i = \bigcup_{s\in S_\infty} G_s^i$, $i \in \{1,2\}$, та $G = G^1 \cup G^2$ і замкнену множину $F = I \setminus G$. Легко перевірити, що

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty}\Big(\bigsqcup_{s\in S_n} N_s\Big) = \bigcup_{s\in S}\Big(\bigcap_{n=0}^{\infty} N_{s_n}\Big).$$

Множину F ми будемо називати *ядром* $(2,3)$*-схеми* W.

Нагадаємо, що точка x_0 з множини E в топологічному просторі X називається *ізольованою*, якщо існує такий її окіл U в X, що $U \cap E = \{x_0\}$. Множину E у топологічному просторі X називають *досконалою в* X, якщо вона замкнена в X і не має ізольованих точок.

Зауважимо, що для кожного $s \in S$ послідовність відрізків $(N_{s_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ спадає з ростом номера n. Крім того, ядро F не має ізольованих точок, адже його доповнення $I \setminus F = G$ є диз'юнктним об'єднанням інтервалів, які не мають спільних кінців. Таким чином, ядро F $(2,3)$-схеми W є досконалою множиною.

Кажучи неформально, при побудові $(2,3)$-схеми, пов'язаної з відрізком $[a,b]$, цей відрізок ділиться на п'ять частин точками $a^1 < b^1 < a^2 < b^2$, далі кожний з ведучих відрізків $N_1 = [a,a^1]$, $N_2 = [b^1,a^2]$ і $N_3 = [b^2,b]$ знову ділиться на п'ять частин і цей процес продовжується до нескінченності. При цьому поділу підлягають ведучі, перший, третій і п'ятий відрізки, а вільні, другий і четвертий, не діляться.

Нехай $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — $(2,3)$-схема, що пов'язана з відрізком $[a,b]$, і $(N_s)_{s\in S_{n+1}}$ — сім'я ведучих відрізків для пачки W_n. Домовимось довжину відрізка $J = [\alpha,\beta]$ позначити символом $|J| = \beta - \alpha$. Для кожного номера $n \in \mathbb{N}_0$ розглянемо числа

$$\lambda_n' = \max_{s\in S_n} |N_{s,1}|, \lambda_n'' = \max_{s\in S_n} |N_{s,3}|, \lambda_n = \max\{\lambda_n', \lambda_n''\} \text{ і } \mu_n = \max_{s\in S_n} |N_s|.$$

Ми називатимемо $(2,3)$-схему W *рівномірно дрібнистою /частково рівномірно дрібнистою/*, якщо $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ /$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$/. Ясно, що рівномірно дрібниста $(2,3)$-схема буде і частково рівномірно дрібнистою.

Рівномірною ми будемо називати $(2,3)$-схему $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, яка складається з таких пачок $W_n = (r_s\colon s \in S_n)$, що для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ і довільного $s \in S_n$ 6-вектор r_s здійснює поділ відповідного відрізка N_s на п'ять рівних частин, при цьому $N_\varnothing = [a,b]$. Ясно, що рівномірна $(2,3)$-схема буде і рівномірно дрібнистою.

Ми називаємо $(2,3)$-схему W *дрібнистою*, якщо $\lim_{n\to\infty} |N_{s_n}| = 0$ для кожного $s \in S$. Зрозуміло, що рівномірно дрібниста $(2,3)$-схема є разом з тим і дрібнистою.

Означення дрібнистої схеми можна переформулювати в еквівалентному вигляді. Для кожної точки x з ядра F схеми W, пов'язаної з відрізком $[a,b]$, і натурального числа n позначимо символом $\Delta_n(x)$ той єдиний ведучий відрізок N_{s_n}, де $s_n \in S_n$, що відповідає пачці $(n-1)$-рангу схеми W, який містить точку x. Для одноманітності запису покладемо $\Delta_0(x) = [a,b]$. Зрозуміло, що схема W буде дрібнистою тоді і тільки тоді, коли $|\Delta_n(x)| \to 0$ для кожного $x \in F$, що рівносильно тому, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n(x) = \{x\}$.

Теорема 1. *Для $(2,3)$-схеми $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, пов'язаної з відрізком $[a,b]$, наступні умови еквівалентні:*

(i) схема W рівномірно дрібниста;

(ii) схема W дрібниста;

(iii) ядро F схеми W ніде не щільне.

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ негайно випливає з того, що $0 \le |N_{s_n}| \le \mu_n$ для кожного n і довільного $s \in S$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай схема W дрібниста. Доведемо, що $\operatorname{int} F = \varnothing$. Нехай $x_0 \in F$ і $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ — довільний δ-окіл точки x_0. Оскільки $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n(x_0)| = 0$ і $x_0 \in \Delta_n(x_0)$ для кожного n, то існує такий номер p, що $\Delta_p(x_0) \subseteq U$. Відрізок $\Delta_p(x_0)$ — це один із ведучих відрізків N_s, який при наступному поділі породжує два вільних інтервали G_s^1 і G_s^2. Відкрита непорожня множина $G_s = G_s^1 \cup G_s^2$ не перетинається з множиною F і міститься в U. Отже, $U \nsubseteq F$. Ми встановили, що замкнена множина F не має внутрішніх точок, отже, вона ніде не щільна.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Припустимо, що умова (i) не виконується і доведемо, що тоді і умова (iii) не виконується. Зауважимо, що $\mu_n \ge \mu_{n+1}$ для кожного n. Справді, для кожного $s \in S_{n+1}$ існує таке $t \in S_n$, що $N_s \subseteq N_t$, а тоді і $|N_s| \le |N_t| \le \mu_n$, отже, і $\mu_{n+1} = \max_{s\in S_{n+1}} \le \mu_n$. Спадна послідовність додатних чисел μ_n обов'язково має границю $\varepsilon \ge 0$. За нашим припущенням $\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \mu_n > 0$. Нехай $S_n(\varepsilon) = \{s \in S_n : |N_s| \ge \varepsilon\}$. Розглянемо замкнені множини $E_n = \bigcup_{s\in S_n(\varepsilon)} N_s$. Зрозуміло, що $E_{n+1} \subseteq E_n$ для кожного n. Справді, нехай $s \in S_{n+1}(\varepsilon)$. Тоді існує таке $t \in S_n$, що $N_s \subseteq N_t$. В такому разі $\varepsilon \le |N_s| \le |N_t|$, отже, $|N_t| \ge \varepsilon$ і $t \in S_n(\varepsilon)$, а значить, $N_s \subseteq N_t \subseteq E_n$. Тоді і $E_{n+1} = \bigcup_{t\in S_{n+1}(\varepsilon)} N_t \subseteq E_n$. Оскільки $\mu_n \ge \varepsilon$ для кожного n, адже $\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \mu_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$, бо послідовність чисел μ_n спадає, і $\mu_n = \max_{s\in S_n} |N_s|$, то для кожного n існує такий індекс $s \in S_n$, що $|N_s| = \mu_n \ge \varepsilon$. Тому $S_n(\varepsilon) \ne \varnothing$ для кожного n, а значить і $E_n \ne \varnothing$ для кожного n. Таким чином, множини E_n утворюють спадну послідовність замкнених непорожніх підмножин відрізка $[a, b]$. З компактності відрізка $[a, b]$ випливає, що і їх перетин $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ буде непорожнім. Тому існує точка $x_0 \in E$. Зрозуміло, що $E \subseteq F$, бо $S_n(\varepsilon) \subseteq S_n$ для кожного n, отже, $x_0 \in F$. Для кожного номера n існує такий індекс $s_n \in S_n(\varepsilon)$, що $x_0 \in N_{s_n}$. При цьому $N_{s_{n+1}} \subseteq N_{s_n}$ і $|N_{s_n}| \ge \varepsilon$ для кожного n. Тому перетин $J = \bigcap_{n=0}^{\infty} N_{s_n}$ — це відрізок числової прямої, для якого $|J| = \lim_{n\to\infty} |N_{s_n}| \ge \varepsilon$. За означенням ядра $J \subseteq F$, при цьому $|J| \ge \varepsilon$, отже, відрізок J невироджений. Тому $\varnothing = \operatorname{int} J \subseteq \operatorname{int} F$, а значить, і $\operatorname{int} F \ne \varnothing$, тобто умова (iii) не виконується. ☐

З $(2, 3)$-схемою W для відрізка $[a, b]$ і її вільними відрізками $M_s^i = [a_s^i, b_s^i]$, $i \in \{1, 2\}$, $s \in S_\infty$, пов'язані дві множини

$$A = \bigcup_{s\in S_\infty} \{a_s^1, a_s^2, a_s^3\} = \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in S_n} \{a_s^1, a_s^2\}\Big) \cup \{b\},$$

що складається з лівих кінців вільних відрізків і правого кінця вихідного відрізка $[a, b]$, і

$$B = \bigcup_{s\in S_\infty} \{b_s^0, b_s^1, b_s^2\} = \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{s\in S_n} \{b_s^1, b_s^2\}\Big) \cup \{a\},$$

що складається з правих кінців вільних відрізків і лівого кінця вихідного відрізка. Схему W ми називатимемо *частково дрібнистою*, якщо $|\Delta_n(x)| \to 0$ для кожного $x \in A \cup B$. Оскільки $A \cup B \subseteq F$, то кожна дрібниста схема буде і частково дрібнистою. Частково рівномірно дрібниста схема буде і частково дрібнистою.

3. Приклад двосторонньо квазінеперервної перехідної розривної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нехай $I = \langle a, b \rangle$ — деякий проміжок числової прямої $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ — функція і $x_0 \in I$, причому $x_0 < b/x_0 > a/$. Кажуть, що функція f *квазінеперервна справа /зліва/ в точці* x_0, якщо для довільних додатних чисел ε і δ існує такий інтервал $J = (\alpha, \beta)$, що $J \subseteq I \cap [x_0, x_0 + \delta)$ $/J \subseteq I \cap (x_0 - \delta, x_0]/$ і $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ на J. В точці $x_0 = b$ функція $f\colon I \to \mathbb{R}$ вважається квазінеперервною справа, а в точці $x_0 = a$ — квазінеперервною зліва. Функція $f\colon I \to \mathbb{R}$ називається *двосторонньо квазінеперервною в точці* x_0, якщо вона в ній одночасно квазінеперервна і справа, і зліва. Функція $f\colon I \to \mathbb{R}$ називається *квазінеперервною справа, зліва чи двосторонньо квазінеперервною*, якщо вона є такою в кожній точці $x \in I$.

Нехай X — топологічний простір. Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається *перехідною зверху /знизу/ в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують окіл U точки x_0 і точка $b \in (f(x_0), f(x_0) + \varepsilon)$ $/b \in (f(x_0) - \varepsilon), f(x_0)/$ такі, що $U \cap f^{-1}(b) = \varnothing$, і *перехідною в точці* $x_0 \in X$, якщо вона перехідна в цій точці і зверху, і знизу. Якщо такі властивості функція має в кожній точці, то ми її називаємо *перехідною зверху, знизу чи просто перехідною.* Легко перевірити ([2, теорема 1]), що коли доповнення до множини значень функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ всюди щільне в $\mathbb{R}$, то функція f перехідна.

Теорема 2. *Нехай $I = [a, b]$ — невироджений відрізок числової прямої, $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — $(2,3)$-схема, що пов'язана з відрізком I, $(M_s^1)_{s\in S_\infty}$, $(M_s^2)_{s\in S_\infty}$ і $(N_s)_{s\in S_\infty}$ — відповідно сім'ї лівих і правих вільних відрізків $M_s^1 = [a_s^1, b_s^1]$, $M_s^2 = [a_s^2, b_s^2]$ та ведучих відрізків N_s схеми W, F — ядро схеми W, $M^i = \bigcup_{s\in S_\infty} M_s^i$, $i \in \{1, 2\}$, $A = \bigcup_{s\in S_\infty}\{a_s^1, a_s^2, a_s^3\}$, $B = \bigcup_{s\in S_\infty}\{b_s^0, b_s^1, b_s^2\}$ і $f = \chi_{M^1}$ — характеристична функція множини M^1 на відрізку I. Тоді:*

а) *функція f перехідна і $f(a) = f(b) = 0$;*

б) *функція f неперервна справа у кожній точці з A і зліва у кожній точці з B;*

в) *якщо схема W частково дрібниста, то функція $f\colon I \to \mathbb{R}$ буде двосторонньо квазінеперервною і $D(f) = \operatorname{fr} F = F \setminus \operatorname{int} F \supseteq A \cup B$;*

г) *якщо схема W дрібниста, то функція $f\colon I \to \mathbb{R}$ буде двосторонньо квазінеперервною, $D(f) = F$ і множина F має потужність континууму.*

Доведення. а). Перехідність функції f випливає з того, що множина R_f її значень складається з двох чисел 0 і 1, отже, її доповнення $\mathbb{R} \setminus R_f$ всюди щільне в $\mathbb{R}$. Рівність $f(a) = f(b) = 0$ випливає з того, що $M^1 \cap \{a, b\} = \varnothing$ за побудовою.

б). Нехай $x_0 = a_s^i$, де $i \in \{1, 2\}$, $s \in S_n$, — якась точка з множини A, що не дорівнює b. На відрізку $M_s^i = [a_s^i, b_s^i]$ функція f стала і набуває значення 1, якщо $i = 1$, і 0, якщо $i = 2$. Звідси негайно випливає її неперервність справа в точці x_0. Коли $x_0 = b$, функція f вважається автоматично неперервною справа. Так само доводиться неперервність зліва у точках $x_0 = b_s^i$ з множини B.

в). Розглянемо вільні відкриті інтервали $G_s^1 = (a_s^1, b_s^1)$ і $G_s^2 = (a_s^2, b_s^2)$ та відкриті множини $G^1 = \bigcup_{s\in S_\infty} G_s^1, G^2 = \bigcup_{s\in S_\infty} G_s^2$ і $G = G^1 \cup G^2$.

За побудовою $f(x) = 1$ на G^1 і $f(x) = 0$ на G^2. Таким чином, функція f стала на відкритих множинах G^1 і G^2, а значить, неперервна у кожній точці відкритої множини G. Тому $D(f) \subseteq F = I \setminus G$. На внутрішності $\operatorname{int} F$ у відрізку I функція f набуває значення 0, адже $\operatorname{int} F \cap M^1 = \varnothing$. Справді, нехай $x \in \operatorname{int} F$. Тоді існує такий інтервал $U = (x - \delta, x + \delta)$, якщо $a < x < b$, і півінтервали $U = [x, x + \delta)$, якщо $x = a$, та $U = (x - \delta, x]$, якщо $x = b$, такі, що $U \subseteq F$. Оскільки $F \cap G^1 = \varnothing$ за побудовою, то і $U \cap G^1 = \varnothing$, а значить, $U \cap G_s^1 = \varnothing$ для кожного $s \in S_\infty$. Якщо U — це інтервал, то обов'язково і $U \cap M_s^1 = \varnothing$ для кожного $s \in S_\infty$ і тому $U \cap M^1 = \varnothing$. Якщо ж $U = [a, a+\delta)$, то кожний інтервал G_s^1 лежить справа від U, отже, і тут $U \cap M_s^1 = \varnothing$ для кожного $s \in S_\infty$, а значить, $U \cap M^1 = \varnothing$. Так само, коли $U = (b-\delta, b]$, то кожний інтервал G_s^1 лежить зліва від U і тут $U \cap M^1 = \varnothing$. Отже, $x \notin M^1$. Оскільки $f(x) = 0$ на $\operatorname{int} F$ і множина $\operatorname{int} F$ відкрита, то f неперервна в кожній точці з $\operatorname{int} F$. Звідси негайно випливає, що $D(f) \subseteq F \setminus \operatorname{int} F = \operatorname{fr} F$.

Нехай $x_0 \in \operatorname{fr} F$. Покажемо, що $x_0 \in D(f)$. Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і розглянемо довільний δ-окіл $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0.

Припустимо, що $f(x_0) = 1$. Тоді $x_0 \in M^1$ і $x_0 \notin G^1$, адже $G^1 \cap F = \varnothing$. Тому існує таке $s \in S_\infty$, що $x_0 \in [a_s^1, b_s^1] \setminus (a_s^1, b_s^1)$, отже, $x_0 = a_s^1$ або $x_0 = b_s^1$. Нехай $x_0 = a_s^1$, де $s \in S_m$ для деякого m. Розглянемо ведучі відрізки $V_n = N_{s,1,\underbrace{3,\dots,3}_{\text{n разів}}} = N_{j_1,\dots,j_m,1,\underbrace{3,\dots,3}_{\text{n разів}}}$, які прилягають до вільного відрізка $M_s^1 = [a_s^1, b_s^1]$ зліва. Зрозуміло, що $\Delta_{m+n+1}(x_0) = V_n$. За умовою $\lim_{n\to\infty} |V_n| = 0$, адже схема W частково дрібниста. Тому існує такий номер p, що $|V_p| < \delta$, а значить, $V_p \subseteq U$, бо правий край відрізка V_p — це центр околу U. У ведучому відрізку V_p містяться два вільних відрізки M_t^1 і M_t^2, де $t = (j_1, \dots, j_m, 1, \underbrace{3, \dots, 3}_{\text{p разів}})$. За побудовою $f(x) = 0$ на M_t^2 і тоді $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$ у кожній точці $x \in M_t^2 \subseteq V_p \subseteq U$. Отже, $x_0 \in D(f)$.

Нехай $x_0 = b_s^1$, де $s \in S_m$ для деякого m. Тепер розглянемо ведучі відрізки $V_n = N_{s,2,\underbrace{1,\dots,1}_{\text{n разів}}} = N_{j_1,\dots,j_m,2,\underbrace{1,\dots,1}_{\text{n разів}}}$, які на цей раз прилягають до вільного відрізка M_s^1 справа. І тут $V_n = \Delta_{m+n+1}(x_0)$, отже, $\lim_{n\to\infty} |V_n| = 0$ згідно з умовою. Тому існує такий номер p, що $|V_p| < \delta$, а значить, $V_p \subseteq U$, бо тепер уже лівий кінець відрізка V_p є центром δ-околу U. Розглядаючи відповідні вільні відрізки M_t^1 і M_t^2, ми отримаємо, що $M_t^2 \subseteq V_p \subseteq U$ і на M_t^2 виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Отже, і тут $x_0 \in D(f)$.

Припустимо тепер, що $f(x_0) = 0$. Оскільки $x_0 \notin \operatorname{int} F$, то $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \not\subseteq F$. Тому існує точка $x_1 \in U \setminus F = U \cap G$. Оскільки $x_1 \in G = G^1 \cup G^2$, то $x_1 \in G^1$ або $x_1 \in G^2$. Якщо $x_1 \in G^1$, то $f(x_1) = 1$ і $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$.

Розглянемо випадок, коли $x_1 \in G^2$. Тоді існує таке $s \in S_m$ для деякого m, що $x_1 \in G_s^2$. Але $x_0 \notin G_s^2$, бо $x_0 \in F$ і $F \cap G_s^2 = \varnothing$. Тому для інтервалу $G_s^2 = (a_s^2, b_s^2)$ можливі такі випадки $x_0 < a_s^2 < x_1 < b_s^2$ або $a_s^2 < x_1 < b_s^2 < x_0$. У першому випадку $a_s^2 \in U$, а у другому $b_s^2 \in U$.

Нехай спочатку $a_s^2 \in U$. Існує таке $\delta_0 > 0$, що $U_0 = (a_s^2 - \delta_0, a_s^2 + \delta_0) \subseteq U$. Розглянемо ведучі відрізки $V_n = N_{s,2,\underbrace{3,\dots,3}_{\text{n разів}}} = N_{j_1,\dots,j_m,2,\underbrace{3,\dots,3}_{\text{n разів}}}$, де $s = (j_1, \dots, j_m)$. Як і раніше, $V_n = \Delta_{m+n+1}(a_s^2)$, отже, $|V_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Тому існує такий номер p, що $|V_p| < \delta_0$. В такому разі відповідні вільні відрізки M_t^1 і M_t^2, що отримались в результаті поділу відрізка V_p, містяться в U_0, а значить, і в U. На відрізку M_t^1 виконуватиметься нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$. Таким чином, в інтервалі U знаходиться точка x, для якої $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. Тому $x_0 \in D(f)$.

Так само розбирається випадок, коли $b_s^2 \in U$. Тут треба розглядати ведучі відрізки $V_n = N_{s,3,\underbrace{1,\dots,1}_{\text{n разів}}} = \Delta_{m+n+1}(b_s^2)$.

Отже, ми встановили, що $x_0 \in D(f)$. Таким чином, $\operatorname{fr} F \subseteq D(f)$, а значить, $\operatorname{fr} F = D(f)$, бо обернене включення було доведено раніше.

Залишилось довести, що функція f двосторонньо квазінеперервна. Нехай $x_0 \in I$, причому $x_0 < b$. Доведемо, що функція f квазінеперервна справа у точці x_0. Розглянемо довільні додатні числа ε і δ, причому $\delta < b - x_0$. Ми можемо вважати, що $x_0 \in \operatorname{fr} F$, адже на доповнені $I \setminus \operatorname{fr} F$ функція f неперервна, а значить, і квазінеперервна справа. Покладемо $U = [x_0, x_0 + \delta)$.

Припустимо спочатку, що $f(x_0) = 1$. Тоді $x_0 \in M^1$, а значить $x_0 \in M^1_s$ для деякого $s \in S_\infty$. Оскільки $x_0 \in F$, то $x_0 \notin G^1_s = (a^1_s, b^1_s)$. В такому разі $x_0 = a^1_s$ або $x_0 = b^1_s$. У випадку $x_0 = a^1_s$ функція f буде неперервною справа в точці x_0, а значить, і квазінеперервною справа в цій точці.

Нехай $x_0 = b^1_s$. Міркуючи так само як і при доведені розривності, знаходимо два вільні відрізки M^1_t і M^2_t, такі, що $M^1_t \cup M^2_t \subseteq U$. Тоді на відкритій непорожній множині G^1_t, яка міститься в U, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Припустимо тепер, що $f(x_0) = 0$. Якщо $f(x) = 0$ на U, то f неперервна справа в точці x_0, а значить, і квазінеперервна спарва в цій точці. Нехай існує точка $x_1 \in U$ така, що $f(x_1) = 1$. Тоді $x_1 \in M^1$, отже, існує такий індекс $s \in S_\infty$, що $x_1 \in M^1_s = [a^1_s, b^1_s]$. Оскільки $x_0 \notin M^1_s$, бо $f(x_0) = 0$, то одержується нерівність $x_0 < a^1_s \le x_1 \le b^1_s$. Ясно, що тоді $a^1_s \in U$. Так само як при доведенні розривності знаходимо два вільні відрізки M^1_t і M^2_t, що $M^1_t \cup M^2_t \subseteq U$. На відкритій непорожній множині G^2_s, яка міститься в U, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, що і дає нам квазінеперервність справа функції f у точці x_0.

Подібним чином доводиться, що функція f квазінеперервна зліва, а значить, і двосторонньо квазінеперервна.

г). Оскільки з дрібнистості схеми W випливає її часткова дрібнистність, то за доведеним у пункті в) функція f буде двосторонньо квазінеперервною і $D(f) = \operatorname{fr} F = F \setminus \operatorname{int} F$. Крім того, з теореми 1 випливає, що ядро F ніде не щільне. Тому $\operatorname{fr} F = F \setminus \operatorname{int} F = F$, і таким чином, $D(f) = F$.

Оскільки множина F досконала, то, як добре відомо ([5, с.32], або [6, с. 146]), вона має потужність континууму. □

4. Відсутність ізольованих точок розриву. Тут ми покажемо, що множина розривів двосторонньо квазінеперервної перехідної функції $f\colon I \to \mathbb{R}$, яка визначена на деякому проміжку I числової прямої, має одну специфічну особливість, подібну до тієї, яку мають майже неперервні функції ([7]).

Теорема 3. *Нехай I — деякий проміжок числової прямої і $f\colon I \to \mathbb{R}$ — двосторонньо квазінеперервна перехідна функція. Тоді її множина точок розриву $D(f)$ не має ізольованих точок.*

Доведення. Нехай це не так і в множині $D(f)$ існує ізольована точка x_0. Тоді існує такий окіл U точки x_0 в I, що $U \cap D(f) = \{x_0\}$. Оскільки $x_0 \in D(f)$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що для кожного $\delta > 0$ існує така точка $x_\delta \in I$, що $|x_\delta - x_0| < \delta$ і $|f(x_\delta) - f(x_0)| \ge \varepsilon$. З перехідності f у точці x_0 випливає, що існують такі точки y_1, y_2 і окіл $U_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, для яких $y_1 \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0))$, $y_2 \in (f(x_0), f(x_0) + \varepsilon)$ і $U_0 \cap f^{-1}(y_i) = \varnothing$ при $i \in \{1, 2\}$. Точка $x_\delta \in U_0$, для якої $|f(x_\delta) - f(x_0)| \ge \varepsilon$, задовольняє одну з нерівностей

$$x_0 - \delta < x_\delta < x_0 \text{ або } x_0 < x_\delta < x_0 + \delta, \text{ адже } x_\delta \ne x_0.$$

Припустимо, що $x_0 < x_\delta < x_0 + \delta$. Нехай $y_0 = f(x_0)$ і $\varepsilon_0 = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. Оскільки $y_1 < y_0 < y_2$, то $\varepsilon_0 > 0$. Скориставшись квазінеперервністю справа функції f

у точці x_0, знайдемо такий відкритий інтервал $U^* = (x^* - \delta^*, x^* + \delta^*)$, що $U^* \subseteq (x_0, x_0 + \delta)$ і $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ на U^*, зокрема, $|f(x^*) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ і $x_0 < x^* < x_0 + \delta$. Для числа $y_\delta = f(x_\delta)$ виконується одна з нерівностей: $y_\delta \geq y_0 + \varepsilon > y_2$ або $y_\delta \leq y_0 - \varepsilon < y_1$. З другого боку, для числа $y^* = f(x^*)$ маємо, що

$$y_1 = y_0 - y_0 + y_1 \leq y_0 - \varepsilon_0 < y^* < y_0 + \varepsilon_0 \leq y_0 + y_2 - y_0 = y_2.$$

Припустимо, що $y_\delta \geq y_0 + \varepsilon$. Зауважимо, що функція f неперервна на інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$, $\{x_\delta, x^*\} \subseteq (x_0, x_0 + \delta)$ і $f(x_\delta) = y_\delta \geq y_0 + \varepsilon > y_2 > y^* = f(x^*)$. За теоремою про проміжне значення існує така точка $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$, що $f(x_2) = y_2$, а це суперечить тому, що $U_0 \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$. У випадку $y_\delta \leq y_0 - \varepsilon$ буде виконуватись нерівність $f(x_\delta) = y_\delta \leq y_0 - \varepsilon < y_1 < y^* = f(x^*)$, отже, існує точка $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$, для якої $f(x_1) = y_1$, що суперечить тому, що $U_0 \cap f^{-1}(y_1) = \varnothing$.

Так само міркуємо у випадку $x_0 - \delta < x_\delta < x_0$, використавши квазінеперервність функції f зліва. □

Нехай $I = \langle a, b \rangle$ — проміжок числової прямої, $f\colon I \to \mathbb{R}$ — деяка функція і $x_0 \in I \setminus \{b\}$ /$x_0 \in I \setminus \{a\}$/. Ми кажемо, що f має *правосторонню /лівосторонню/ властивість Юнґа в точці* x_0, якщо існує така послідовність точок $x_n \in I$, що $x_n \geq x_{n+1} > x_0$ /$x_n \leq x_{n+1} < x_0$/ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ і $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Якщо $b \in I$ /$a \in I$/, то вважається, що в точці b /a/ функція автоматично має правосторонню /лівосторонню/ властивість Юнґа. Кажуть, що функція f має *властивість Юнґа в точці* $x_0 \in I$, якщо вона в цій точці має як правосторонню, так і лівосторонню властивість Юнґа. Функція $f\colon I \to \mathbb{R}$ має *властивість Юнґа* ([8, с. 495]), якщо вона її має у кожній точці $x \in I$.

Зрозуміло, що функція $f\colon I \to \mathbb{R}$ буде мати правосторонню /лівосторонню/ властивість Юнґа в точці $x_0 \in I \setminus b$ /$x_0 \in I \setminus a$/ тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожного $\delta > 0$ існує така точка $x^* \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I$ /$x^* \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I$/, що $|f(x^*) - f(x_0)| < \varepsilon$. З доведення теореми 3 видно, що там використовувалось лише те, що f має властивість Юнґа, яку обов'язково має двосторонньо квазінеперервна функція. Тому і множина точок розриву перехідної функції $f\colon I \to \mathbb{R}$, яка має властивість Юнґа, не може мати ізольованих точок.

5. Обернена задача. У зв'язку з теоремами 2 і 3 постає інтригуюча задача: якими можуть бути множини $D(f)$ точок розриву двосторонньо квазінеперервних перехідних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Тут ми робимо перший крок у цьому напрямку. Він базується на такому результаті.

Теорема 4. *Нехай F — досконала ніде не щільна підмножина невиродженого відрізка $I = [a, b]$, причому $\{a, b\} \subseteq F$. Тоді існує така дрібниста $(2,3)$-схема W, повязана з відрізком I, що F є її ядром.*

Доведення. Розглянемо доповнення $G = I \setminus F$ множини F на відрізку I. Оскільки $\{a, b\} \subseteq F$, то $G = (a, b) \setminus F$, отже, G — це відкрита множина в $\mathbb{R}$. Зрозуміло, що $G \neq \varnothing$, бо множина F ніде не щільна. Як добре відомо, така множина є диз'юнктним об'єднанням деякої послідовності інтервалів $U_m = (a_n, b_n)$, де $m \in M$, а $M = \overline{1, m_0} = \{1, \ldots, m_0\}$ для деякого $m_0 \in \mathbb{N}$ або $M = \mathbb{N}$.

Припустимо, що множина M скінченна. Тоді

$$\overline{G} = \overline{\bigcup_{m\in M} U_m} = \bigcup_{m\in M} \overline{U_m} = \bigcup_{m\in M} [a_n, b_n].$$

Оскільки $\overline{G} = I \setminus \operatorname{int} F = I$, бо множина F ніде не щільна, то

$$F = I \setminus G = \overline{G} \setminus G = \bigcup_{m \in M} [a_n, b_n] \setminus G = \bigcup_{m \in M} \{a_n, b_n\}.$$

Ця рівність показує, що множина F скінченна. Але множина F досконала і непорожня, отже, континуальна, а тому нескінченна. З отриманої суперечності випливає, що $M = \mathbb{N}$.

Оскільки $G = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} U_m \subseteq [a, b]$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |U_m|$ збігається, адже $\sum_{m=1}^{\infty} |U_m| \le b-a$. Тому $\lim_{m\to\infty} |U_m| = 0$. Зрозуміло, що існує така біекція $k \mapsto m_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, що $|U_{m_k}| \ge |U_{m_{k+1}}|$ для кожного k. Покладемо $I_k = U_{m_k}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді $G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$ і $|I_k| \ge |I_{k+1}|$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що різні інтервали I_k та I_j не можуть бути суміжними, бо інакше множина F мала би ізольовані точки.

Приступимо до побудови шуканої $(2,3)$-схеми $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Покладемо $G^1_\varnothing = (a^1_\varnothing, b^1_\varnothing) = I_1$. Ясно, що $a < a^1_\varnothing < b^1_\varnothing < b$. Розглянемо множину $K^1_\varnothing = \{k \in \mathbb{N} \colon I_k \subseteq [b^1_\varnothing, b]\}$. З того, що множина F ніде не щільна, випливає, що $K^1_\varnothing \ne \varnothing$. Тому існує $k^1_\varnothing = \min K^1_\varnothing$. Покладемо $G^2_\varnothing = (a^2_\varnothing, b^2_\varnothing) = I_{k^1_\varnothing}$. Нехай $r_\varnothing = (a, a^1_\varnothing, b^1_\varnothing, a^2_\varnothing, b^2_\varnothing, b)$ і $W_0 = (r_s)_{s \in S_0}$. Нехай $N_1 = [a, a^1_\varnothing]$, $N_2 = [b^1_\varnothing, a^2_\varnothing]$ і $N_3 = [b^2_\varnothing, b]$. Розглянемо множини $K^1_{j_1} = \{k \in \mathbb{N} \colon I_k \subseteq N_{j_1}\}$ при $j_1 \in \{1, 2, 3\}$. Всі вони непорожні, бо множина F ніде не щільна. Тому існують номери $k^1_{j_1} = \min K^1_{j_1}$ для $j_1 \in \{1, 2, 3\}$. Покладемо $G^1_{j_1} = (a^1_{j_1}, b^1_{j_1}) = I_{k^1_{j_1}}$ для $j_1 \in \{1, 2, 3\}$. Далі розглянемо множини $K^2_{j_1} = \{k \in \mathbb{N} \colon I_k \subseteq [b^1_{j_1}, a^2_{j_1}]\}$, числа $k^2_{j_1} = \min K^2_{j_1}$ і покладемо $G^2_{j_1} = (a^2_{j_1}, b^2_{j_1}) = I_{k^2_{j_1}}$. Для $j_1 \in \{1, 2, 3\}$ розглянемо 6-вектор $r_{j_1} = (b^0_{j_1}, a^1_{j_1}, b^1_{j_1}, a^2_{j_1}, b^2_{j_1}, a^3_{j_1})$, де $b^0_1 = a$, $b^0_2 = b^1_\varnothing$ і $b^0_3 = b^2_\varnothing$, а $a^3_1 = a^1_\varnothing$, $a^3_2 = a^2_\varnothing$ і $a^3_3 = b$. Пачка першого рангу $W_1 = (r_1, r_2, r_3)$ буде узгодженою з пачкою W_0.

Зрозуміло, що цей процес можна продовжити до нескінченності, будуючи відповідні інтервали $G^i_s = (a^i_s, b^i_s) = I_{k^i_s}$ з найменшими номерами k^i_s, де $s \in S_n$, $n \in \{0, 1, \ldots\}$ і породжені ними пачки $W_n = (r_s \colon s \in S_n)$ n-го рангу, такі, що W_n буде узгодженою з W_{n+1}. Так ми побудуємо певну $(2,3)$-схему $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, пов'язану з відрізком I, вільними інтервалами якої будуть інтервали G^i_s.

Покажемо, що ядро цієї схеми збігається з множиною F. Для цього досить зрозуміти, що система $\mathcal{G} = \{G^1_s \colon s \in S_\infty\} \cup \{G^2_s \colon s \in S_\infty\}$ збігається з системою $\mathcal{I} = \{I_k \colon k \in \mathbb{N}\}$.

Включення $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{I}$ негайно випливає з побудови, адже $G^i_s = I_{k^i_s}$. Так само за побудовою $I_1 \in \mathcal{G}$. Покажемо, що $I_2 \in \mathcal{G}$. Якщо $I_2 \subseteq [b^1_\varnothing, b]$, то $k^1_\varnothing = 2$ і $I_2 = G^2_\varnothing \in \mathcal{G}$. Якщо ж це не так, то $I_2 \subseteq [a, a^1_\varnothing] = N_1$. Тоді $k^1_1 = 2$ і $I_2 = G^1_1 \in \mathcal{G}$. Так само I_3 обов'язково зустрінеться серед вільних інтервалів до другого рангу включно, I_4 — до третього рангу і т.д.. Таким чином, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{I}$, отже, $\mathcal{G} = \mathcal{I}$. Тому

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{s \in S_\infty} (G^1_s \cup G^2_s),$$

отже, F — це ядро схеми W.

Дрібнистість схеми W випливає з теореми 1. $\square$

Теорема 5. *Для довільного скінченного або нескінченного проміжку $J \subseteq \mathbb{R}$ і довільної ніде не щільної досконалої в J множини F існує така двосторонньо квазінеперервна перехідна функція $f \colon J \to \mathbb{R}$, що $D(f) = F$.*

Доведення. Оскільки всі однотипні проміжки гомеоморфні між собою, то доведення достатньо провести для скінченного проміжку J. Нехай $a = \inf F$ та $b = \sup F$. До відрізка $I = [a, b]$ і його досконалої підмножини $F \cup \{a, b\}$ застосовуємо теореми 4 і 2 і одержуємо двосторонньо квазінеперервну перехідну функція $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, для якої $D(g) = F$. Залишилось покласти $g(x) = g(a)$ при $x < a$, $g(x) = g(b)$ при $x > b$ і $f = g|_J$. $\square$

Автори вдячні рецензентові за корисні зауваження, які дозволили покращити початковий варіант статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kretsu V.I., Maslyuchenko V.K. *Stalling continuity, separate continuity and closed graph functions*// Nauk. Visn. Chernivets'kogo Univ., Mat. – 2007. – V.349. – P. 50–54. (in Ukrainian)
2. Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *Decomposition of continuity and transition maps*// Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka. – 2011. – V.8. – P. 132–150. (in Ukrainian)
3. Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *Weak Darboux property and transitivity of linear mappings in topological vector spaces*// Carp. Math. Publ. – 2013. – V.5, №1. – P. 79–88. (in Ukrainian)
4. Doboš J. *Functions with a closed graph and bilateral quasicontinuity*// Tatra Mt. Math. Publ. – 1993. – V.2. – P. 77–80.
5. Kechris A. Classical descriptive set theory. – Springer, 1995.
6. Aleksandrov P.S. Introduction to set theory and general topology. – M.: Nauka, 1977. (in Russian)
7. Banakh T.O., Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Pshenychko M.I. *Discontinuity points of almost continuous functions*// Mat. Stud. – 2000. – V.14, №1. – P. 89–96. (in Ukrainian)
8. Gibson R.G., Natkaniec T. *Darboux like functions*// Real Anal. Exch. – 1997. – V.22, №2. – P. 492–533.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
math.analysis.chnu@gmail.com

Надійшло 5.11.2013
Після переробки 16.02.2014