УДК 517.36

О. І. Двірний, В. І. Слинько

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ АВТОНОМНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ВАЖЕВСЬКОГО

O. I. Dvirny, V. I. Slyn'ko. *Stability of solutions of Wazevski's autonomous impulsive systems*, Mat. Stud. **41** (2014), 62–72.

In present paper we consider the problem of stability of autonomous systems of differential equations with impulsive action. Right sides of the system satisfy Wazewski's condition. We propose new method for study of stability of trivial solutions for this class of the systems. Obtained results are illustrated by examples of the systems of differential equations in critical cases.

А. И. Двирный, В. И. Слынько. *Устойчивость решений автономных импульсных систем Важевского* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №1. – С.62–72.

В работе рассматриваются вопросы устойчивости автономных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Предполагается, что правая часть системы обладает свойством Важевского. Предложен новый подход к исследованию устойчивости тривиальных решений для этого класса систем. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах импульсных систем в критических случаях.

Вступ. Системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (імпульсні системи) є математичними моделями різних процесів, в яких вектор стану системи зазнає миттєві зміни у деякі моменти часу. Загальна теорія імпульсних систем побудована в роботах математиків київської школи нелінійної механіки А. М. Самойленка і М. О. Перестюка і наведена у монографії [1]. Проблема стійкості розв'язків такого класу систем досліджувалася у цілому ряді праць (див. [1]–[11]). В них узагальнено класичні методи теорії стійкості та запропоновано підходи до побудови функцій Ляпунова. В [12, 13] розглядаються задачі стійкості розв'язків великомасштабних систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. При цьому використовується метод порівняння ([14]–[18]), який зводить задачу про стійкість вихідної системи до дослідження деякої системи порівняння. Розв'язки задачі Коші для системи порівняння мають специфічну властивість монотонності за початковими даними відносно часткової впорядкованості, введеної за допомогою конуса невід'ємних елементів $\mathbb{R}^n_+$. Системи звичайних диференціальних рівнянь, для яких розв'язки задачі Коші мають подібну властивість відносно напівупорядкованості, введеної довільним конусом, прийнято називати системами Важевського. Фундаментальні дослідження автономних систем Важевського проведені в ряді праць А. А. Мартинюка і А. Ю. Оболенського [19]–[23]. В монографії [23] ці результати узагальнено для класу монотонних динамічних розширень над компактним многовидом. Дослідження стійкості розв'язків аналогів лінійних систем Важевського з імпульсною

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34D02.
Keywords: impulsive differential equations; comparison principle; asymptotic stability.

дією проведені у статті [24] у випадку конуса невід'ємних елементів, а у випадку довільного конуса у дисертаціях [25, 26].

Мета цієї статті — дослідження стійкості автономних імпульсних систем Важевського. При цьому нижче встановлюється, що безпосереднє узагальнення результатів робіт [19, 23] не видається можливим. Тому, в основу цього дослідження покладено новий варіант методу порівняння, запропонований в статтях [9, 27]. Отримані результати застосовуються при дослідженні критичних станів рівноваги нелінійних імпульсних систем Важевського.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією ([1])

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta x = g(x(t)), \quad t = \tau_k, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0, \Delta x = x(t+0) - x(t)$, $g \in C(\mathcal{N}, \mathbb{R}^n)$, $g(0) = 0$, $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність моментів імпульсної дії, що має єдину точку скупчення на нескінченності, $x = 0$ — ізольований стан рівноваги системи (1), $\mathcal{N}$ — відкритий зв'язний окіл точки $x = 0$. Припустимо, що для імпульсної системи (1) виконуються умови, які гарантують існування і єдиність розв'язків задачі Коші ([1]).

Розглянемо оператор еволюції $W^t(x_0) \equiv x(t; x_0)$ диференціального рівняння з імпульсною дією (1), визначений для всіх $t \in [0, \pi^+(x_0))$, де $\pi^+(x_0)$ — правий кінець максимального інтервалу існування розв'язку $x(t; x_0)$.

Введемо означення стійкості в конусі K стану рівноваги $x = 0$ імпульсної системи (1).

Означення 1. Стан рівноваги $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (1) називається:
1) *стійким у конусі* K, якщо для будь-якого околу $\mathcal{U}$ точки $x = 0$ існує окіл $\mathcal{U}_0$ точки $x = 0$ такий, що з включення $x_0 \in \mathcal{U}_0 \cap K$ випливає, що $\pi^+(x_0) = +\infty$, $W^t(x_0) \in \mathcal{U} \cap K$;
2) *асимптотично стійким*, якщо $x = 0$ стійкий в конусі K та існує окіл $\mathcal{U}$ точки $x = 0$ такий, що

$$\forall x_0 \in \mathcal{U} \cap K \lim_{t \to \infty} W^t(x_0) = 0.$$

Зазначимо, що окіл в означенні 1 може бути визначений за допомогою довільної норми, оскільки у скінченновимірному просторі всі норми еквівалентні. Зручно використати норму Біркгофа. Нагадаємо, що для деякого елемента $w \in \operatorname{int} K$ рівність

$$\|x\|_w = \inf\{\beta \geq 0 : -\beta w \overset{K}{\leq} x \overset{K}{\leq} \beta w\}$$

визначає норму у просторі $\mathbb{R}^n$, яку називають нормою Біркгофа ([29]).

Дослідження стійкості в конусі K стану рівноваги $x = 0$ імпульсної системи (1) проводитимо за наступних додаткових припущень.

Припущення 1. Для імпульсної системи (1) виконуються умови:
1) функція $f(u)$ має властивість квазімонотонного неспадання відносно тілесного конуса K (умова Важевського), тобто

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \, \forall y \in \mathbb{R}^n \, \forall \psi \in K^* \, (y \overset{K}{\geq} x) \wedge (\psi(y - x) = 0) \Rightarrow (\psi, f(y) - f(x)) \geq 0; \tag{2}$$

2) функція $u + g(u)$ має властивість локальної монотонності в області $\mathcal{N}$ відносно цього конуса K, тобто існує окіл $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ такий, що

$$\forall y \in \mathcal{N} \, \forall x \in \mathcal{N} \quad y \overset{K}{\geq} x \Rightarrow y + g(y) \overset{K}{\geq} x + g(x).$$

Тут K^* — позначає спряжений з K конус ([17]), а $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток.

Разом з імпульсною системою (1) розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = f(u). \tag{3}$$

Визначимо також еволюційний оператор U^t системи звичайних диференціальних рівнянь (3), покладаючи $U^t(u_0) = u(t, u_0)$. При цьому оператори $U^t(u_0)$ визначені для всіх $t \in [0, \omega^+(u_0))$, де $\omega^+(u_0)$ — правий кінець максимального інтервалу існування розв'язку задачі Коші $u(t, u_0)$. Відзначимо, що оператор W^t на відміну від оператора U^t не має півгрупової властивості.

Зауваження 1. Умова Важевського (2) гарантує монотонність еволюційного оператора $U^t(\cdot)$, тобто,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\, \forall y \in \mathbb{R}^n\, \forall t \in [0, \omega^+(x)) \cap [0, \omega^+(y))\ y \overset{K}{\geq} x \Rightarrow U^t(y) \overset{K}{\geq} U^t(x).$$

Зауваження 2. Умови 1 і 2 припущення 1 гарантують локальну монотонність еволюційного оператора $W^t(\cdot)$, тобто,

$$\forall x \in \mathcal{N}\, \forall y \in \mathcal{N}\, \forall t \in [0, \pi^+(x)) \cap [0, \pi^+(y))$$
$$(\forall k\, \tau_k \in [0, t)(W^{\tau_k}(x) \in \mathcal{N}) \wedge (W^{\tau_k}(y) \in \mathcal{N})) \wedge (y \overset{K}{\geq} x) \Rightarrow (W^t(y) \overset{K}{\geq} W^t(x)). \tag{4}$$

Для системи (3) можна означити поняття стійкості в конусі K так само як і в означенні 1.

Критерій Мартинюка–Оболенського([19, 23]) стверджує, що для асимптотичної стійкості в конусі K ізольованого стану рівноваги $u = 0$ системи (3) необхідно і достатньо виконання умови

$$\exists u^* \overset{K}{>} 0 \quad f(u^*) \overset{K}{<} 0. \tag{5}$$

Для точкового відображення

$$\overline{u} = u + g(u) \tag{6}$$

можна довести, що умови

$$\exists u^* \overset{K}{>} 0 \quad g(u^*) \overset{K}{<} 0, \tag{7}$$

гарантують асимптотичну стійкість в конусі K ізольованого стану рівноваги $u = 0$ відображення (6).

Виникає природне *запитання:* чи гарантує одночасне виконання умов (5) і (7) асимптотичну стійкість стану рівноваги $x = 0$ системи (1)? Нескладно довести, що відповідь на це питання позитивна. Проте умови (5) і (7) є лише достатніми умовами асимптотичної стійкості (причому, дуже далекими від необхідних), і тому не можуть бути обернені. Справді, добре відомо (див. наприклад [8]), що стан рівноваги $x = 0$ імпульсної системи (1) може бути асимптотично стійким в тому випадку, коли одночасно стан рівноваги $u = 0$ системи звичайних диференціальних рівнянь (3) і нерухома точка $u = 0$ точкового відображення (6) є нестійкими. Тому, потрібно узагальнити умови (5) і (7) так, щоб охопити і цей випадок. Основу такого узагальнення становлять ідеї робіт [10, 27], де запропоновано новий варіант принципу порівняння.

2. Допоміжні результати. Наведено допоміжні результати, які обґрунтовують новий варіант принципу порівняння для систем Важевського.

Лема 1. *Припустимо, що існує елемент* $w \in \operatorname{int} K$ *і функція* $\gamma \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *такі, що при всіх* $\alpha \geq 0$ *виконується нерівність* $f(\alpha w) \overset{K}{\leq} \gamma(\alpha)w$. *Тоді для еволюційного оператора* U^t *диференціального рівняння* (3) *виконується нерівність* $\forall t \in [0, \Omega^+(\alpha))\ U^t(\alpha w) \overset{K}{\leq} u(t;\alpha)w$, *де* $u(t;\alpha)$ — *розв'язок задачі Коші*

$$\frac{du}{dt} = \gamma(u), \quad u(0) = \alpha, \tag{8}$$

$\Omega^+(\alpha)$ — *правий кінець максимального інтервалу існування розв'язку задачі Коші* (8).

Доведення. Нехай $\alpha > 0$. Розглянемо додатну сталу r і визначимо сталі

$$m(r) = \max_{0\leq\xi-\alpha\leq r} |\gamma(\xi)|, \quad 0 \leq T < \min\left\{\frac{r}{m(r)}, \frac{\alpha}{m(r)}\right\}.$$

Нехай s — натуральне число, а $h = \frac{T}{s}$. Тоді для достатньо малих h виконгується нерівність

$$U^h(\alpha w) = \alpha w + hf(\alpha w) + o(h) \overset{K}{\leq} (\alpha + h\gamma(\alpha))w + o(h). \tag{9}$$

Позначимо $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_1 = \alpha_0 + h\gamma(\alpha_0)$. Тоді

$$|\alpha_1 - \alpha_0| = h|\gamma(\alpha_0)| \leq hm(r) < \frac{r}{s} < r, \quad \alpha_1 \geq \alpha_0 - hm(r) = \alpha\Big(1 - \frac{1}{s}\Big) > 0.$$

Застосовуючи до нерівності (9) оператор U^h, отримаємо

$$U^{2h}(\alpha w) \overset{K}{\leq} U^h(\alpha_1 w) + o(h) \overset{K}{\leq} (\alpha_1 + h\gamma(\alpha_1))w + 2o(h). \tag{10}$$

Позначимо $\alpha_2 = \alpha_1 + h\gamma(\alpha_1)$. Тоді $|\alpha_2 - \alpha_0| \leq |\alpha_2 - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_0| \leq hm(r) + \frac{r}{s} < \frac{2r}{s} < r$, $\alpha_2 > \alpha - 2hm(r) > \alpha(1 - \frac{2}{s}) > 0$, і тому U^h можна знову застосувати до нерівності (10) і скористатися умовами леми. Продовжуючи цей процес, отримуємо нерівність

$$U^{sh}(\alpha w) \overset{K}{\leq} \alpha_s w + so(h), \tag{11}$$

де α_s визначається з рекурентних співвідношень $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_k = \alpha_{k-1} + h\gamma(\alpha_{k-1})$, $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Враховуючи співвідношення $sh = T$, за теоремою Пеано, яка забезпечує збіжність ламаних Ейлера, одержуємо $\alpha_s \to u(T;\alpha)$, $so(h) = o(1)$, $s \to \infty\, (h \to 0)$. Отже, з нерівності (11) випливає нерівність

$$0 \overset{K}{\leq} U^T(\alpha w) \overset{K}{\leq} u(T;\alpha)w. \tag{12}$$

При цьому з нерівності (12) випливає, що $u(T;\alpha) > 0$. Тому, твердження леми доведено для досить малих додатних T.

Розглянемо множину $\mathcal{T}$ тих значень t, $t \in [0, \omega^*)$, $\omega^* = \min[\omega^+(\alpha w), \Omega^+(\alpha)])$, для яких нерівність (12) виконується при всіх $T \in [0, t]$. За доведеним вище, $\mathcal{T} \neq \varnothing$. Позначимо $\tau^* = \sup \mathcal{T}$ і припустимо, що $\tau^* < \omega^*$, тоді $\tau^* \in \mathcal{T}$. За доведеним вище, для досить малих додатних чисел ε, виконуються співвідношення

$$U^{\tau^*+\varepsilon}(\alpha w) = U^\varepsilon(U^{\tau^*}(\alpha w)) \overset{K}{\leq} U^\varepsilon(u(\tau^*;\alpha)w)) \overset{K}{\leq} u(\varepsilon; u(\tau^*;\alpha))w = u(\tau^* + \varepsilon;\alpha)w,$$

тобто, нерівність (12) виконується на деякому відрізку $[0, \tau^* + \varepsilon]$, що суперечить означенню числа τ^*. Тому, $\tau^* = \omega^*$, і залишається встановити, що $\omega^+(\alpha w) \geq \Omega^+(\alpha)$. Справді, у протилежному випадку, за доведеним вище, для всіх $t \in [0, \omega^+(\alpha w))$ виконувалася б нерівність $\|U^t(\alpha w)\|_w \leq u(t, \alpha)$. З іншого боку ([28]), $\|U^t(\alpha w)\|_w \to \infty$ при $t \to \omega^+(\alpha w)$, що суперечить останній нерівності. □

Встановимо тепер подібне твердження для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (1).

Лема 2. *Припустимо, що існують елемент $w \in \operatorname{int} K$ і функції $\gamma \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\delta \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ такі, що:*

1) для всіх $\alpha \geq 0$ виконуються нерівності $f(\alpha w) \overset{K}{\leq} \gamma(\alpha)w, \quad g(\alpha w) \overset{K}{\leq} \delta(\alpha)w$;
2) для всіх $\alpha \in [0,\alpha^0]$ виконуються нерівність $\alpha + \delta(\alpha) \geq 0$ і включення $\alpha w \in \mathcal{N}$.
Тоді для еволюційного оператора W^t диференціального рівняння з імпульсною дією (1) виконується нерівність

$$\forall t \in [0,\Pi^+(\alpha))(\{\tau_k\}_{k=1,l} \subset [0,t](W^{\tau_k}(\alpha w) \in \mathcal{N}) \wedge (\eta(\tau_k;\alpha) \in [0,\alpha^0])) \Rightarrow (W^t(\alpha w) \overset{K}{\leq} u(t;\alpha)w),$$
де $u(t;\alpha)$ — розв'язок задачі Коші

$$\frac{du}{dt} = \gamma(u), \quad t \neq \tau_k, \quad u(0) = \alpha, \quad \Delta u = \delta(u(t)), \quad t = \tau_k, \tag{13}$$

$\Pi^+(\alpha)$ — правий кінець максимального інтервалу існування розв'язку задачі Коші (13).

Доведення. Нехай $t \in [0, \min[\Pi^+(\alpha), \pi^+(\alpha w)])$. Якщо інтервал часу $[0,t]$ не містить моментів імпульсної дії, то твердження леми є безпосереднім наслідком з леми 1.

Нехай $\tau \in [0,\tau_1]$. Тоді твердження леми випливає з твердження леми 1. З умови леми випливає, що

$$W^{\tau_1+0}(\alpha w) = W^{\tau_1}(\alpha w) + g(W^{\tau_1}(\alpha w)) \overset{K}{\leq} (u(\tau_1;\alpha) + \delta(u(\tau_1;\alpha)))w = u(\tau_1+0;\alpha)w.$$

З включень $W^{\tau_1}(\alpha w) \in \mathcal{N}$ і $u(\tau_1;\alpha)w \in \mathcal{N}$ випливає, що $W^{\tau_1+0}(\alpha w) \overset{K}{\geq} 0$ і, тому, $u(\tau_1 + 0;\alpha) \geq 0$. Застосовуючи твердження леми 1 при $\tau \in (\tau_1,\tau_2]$, отримаємо

$$W^{\tau}(\alpha w) = U^{\tau-\tau_1}(W^{\tau_1+0}(\alpha w)) \overset{K}{\leq} U^{\tau-\tau_1}(u(\tau_1+0;\alpha)w) \overset{K}{\leq} u(\tau;\alpha)w.$$

Твердження леми доводиться подібно для тих замкнених інтервалів часу $[\tau_k,\tau_{k+1}]$, для яких виконується умова $(W^{\tau_k}(\alpha w) \in \mathcal{N}) \wedge (u(\tau_k;\alpha) \in [0,\alpha^0])$. Нерівність $\pi^+(\alpha w) \geq \Pi^+(\alpha)$ доводиться з врахуванням результатів з [1] у той же спосіб, як і подібна нерівність у доведенні попередньої леми. □

Наступне твердження узагальнює твердження леми 1.

Лема 3. *Припустимо, що існують елементи $w_1 \in K$, $w_2 \in K$ і функції $F_i \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ такі, що:*

1) для всіх $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ виконується нерівність $f(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} F_1(\delta_1,\delta_2)w_1 + F_2(\delta_1,\delta_2)w_2$;
2) якщо $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ і $\delta_i = 0$, то $F_i(\delta_1,\delta_2) = 0$, $i \in \{1,2\}$.
Тоді для еволюційного оператора U^t системи диференціальних рівнянь (3) при всіх невід'ємних α, β виконується нерівність

$$\forall t \in [0,\Omega^+(\alpha,\beta)) \quad U^t(\alpha w_1 + \beta w_2) \overset{K}{\leq} \eta_1(t;\alpha,\beta)w_1 + \eta_2(t;\alpha,\beta)w_2,$$
де $\eta_i(t;\alpha,\beta)$, $i \in \{1,2\}$, — розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\eta_1}{dt} = F_1(\eta_1,\eta_2), \quad \eta_1(0) = \alpha, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = F_2(\eta_1,\eta_2), \quad \eta_2(0) = \beta, \tag{14}$$

$\Omega^+(\alpha,\beta)$ — правий кінець максимального інтервалу існування розв'язку задачі Коші (14).

Лему 3 можна узагальнити для систем з імпульсною дією (1).

Лема 4. *Припустимо, що існують елементи* $w_1 \in K$, $w_2 \in K$, *додатні числа* δ_i^0, $i \in \{1, 2\}$ *і функції* $F_i \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $G_i \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $i \in \{1, 2\}$, *такі, що:*
1) *для всіх* $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ *виконуються нерівності*

$$f(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} F_1(\delta_1, \delta_2) w_1 + F_2(\delta_1, \delta_2) w_2, \; g(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} G_1(\delta_1, \delta_2) w_1 + G_2(\delta_1, \delta_2) w_2;$$

2) *якщо* $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$ *і* $\delta_i = 0$, *то* $F_i(\delta_1, \delta_2) \geq 0$ *при* $i \in \{1, 2\}$;
3) *при всіх* $\delta_i \in [0, \delta_i^0]$, $i \in \{1, 2\}$ *виконуються нерівності* $\delta_i + G_i(\delta_1, \delta_2) \geq 0, i \in \{1, 2\}$, *і* $\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2 \in \mathcal{N}$.
Тоді для еволюційного оператора W^t *диференціального рівняння з імпульсною дією* (1) *для всіх невід'ємних сталих* α, β *виконується*

$$(\forall t \in [0, \Pi^+(\alpha, \beta))) \quad (\{\tau_k\}_{k=1,l} \subset [0, t] \quad (W^{\tau_k}(\alpha w_1 + \beta w_2) \in \mathcal{N}) \wedge$$
$$\wedge (\eta_i(\tau_k; \alpha, \beta) \in [0, \delta_i^0], i \in \{1, 2\})) \Rightarrow (W^t(\alpha w_1 + \beta w_2) \overset{K}{\leq} \eta_1(t; \alpha, \beta) w_1 + \eta_2(t; \alpha, \beta) w_2),$$

де $\eta_i(t; \alpha, \beta)$ — *розв'язок задачі Коші*

$$\begin{gathered} \frac{d\eta_1}{dt} = F_1(\eta_1, \eta_2), \quad t \neq \tau_k, \quad \eta_1(0) = \alpha, \; \frac{d\eta_2}{dt} = F_2(\eta_1, \eta_2), \quad t \neq \tau_k, \quad \eta_2(0) = \beta, \\ \Delta\eta_1 = G_1(\eta_1, \eta_2), \quad t = \tau_k, \; \Delta\eta_2 = G_2(\eta_1, \eta_2), \quad t = \tau_k, \end{gathered} \tag{15}$$

$\Pi^+(\alpha, \beta)$ — *правий кінець максимального інтервалу існування розв'язку задачі Коші* (15).

3. Основний результат. Леми 1–4 дозволяють встановити достатні умови асимптотичної стійкості розв'язку $x = 0$ нелінійної системи (1).

Пару елементів $(w_1, w_2) \in K \times K$ будемо називати допустимою парою, якщо існують додатні сталі α, β такі, що $\alpha w_1 + \beta w_2 \in \operatorname{int} K$.

Теорема 1. *Припустимо, що система диференціальних рівнянь з імпульсною дією* (1) *така, що стан* $u = 0$ *рівноваги рівняння порівняння* (15) *стійкий за Ляпуновим у конусі* $\mathbb{R}_+$ *(асимптотично стійкий за Ляпуновим у конусі* $\mathbb{R}_+$*). Тоді стан рівноваги* $x = 0$ *системи* (1) *стійкий за Ляпуновим у конусі* K *(асимптотично стійкий за Ляпуновим у конусі* K*).*

Доведення. Нехай $x_0 \in K$. Тоді $0 \overset{K}{\leq} x_0 \overset{K}{\leq} \|x_0\|_w w$ і, внаслідок умови (4), для достатньо малих $t \geq 0$ виконується нерівність

$$0 \overset{K}{\leq} W^t(x_0) \overset{K}{\leq} u(t; \|x_0\|_w) w. \tag{16}$$

Доведемо, що існує достатньо мале додатне число r_0, таке, що для всіх x_0, $\|x_0\|_w < r_0$, остання нерівність виконується для всіх $t \geq 0$. Внаслідок стійкості розв'язку $u = 0$ рівняння порівняння (15), число r_0 можна вибрати з умов $\forall \delta \in [0, r)$ $(\Omega^+(\delta) = \infty) \wedge (u(t; \delta) < R)$, де додатне число R вибрано з умов $\{x : \|\|x\|_w < R\} \subset \mathcal{N}$, $R < \alpha^0$.

Лема 2 гарантує, що нерівність (16) виконується на будь-якому замкненому інтервалі $[0, t]$, на якому $W^{\tau_k}(\|x_0\| w) \in \mathcal{N}$ і $u(\tau_k; \alpha) w \in \mathcal{N}$, і при цьому $\tau_k \in [0, t]$. Припустимо, що існує натуральне число $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $W^{\tau_k}(\|x_0\| w) \in \mathcal{N}$, $k = \overline{0, k_0 - 1}$,

$W^{\tau_{k_0}}(\|x_0\|w) \notin \mathcal{N}$. Тоді для всіх $t \in [0, \tau_{k_0})$ виконується нерівність (16). За неперервністю зліва еволюційного оператора $W^t(x_0)$, нерівність (16) виконується при $t = \tau_{k_0}$, тоді $\|W^{\tau_{k_0}}(x_0)\|_w \leq u(\tau_{k_0}; \alpha) < R$, що суперечить вибору числа k_0. Тому, за твердженням леми 4, нерівність (16) виконується для всіх $t \geq 0$, як тільки $\|x_0\|_w < r_0$. За умовою теореми, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ таке, що з нерівності $0 < u_0 < \Delta$ випливає нерівність $0 < u(t, u_0) < \varepsilon$ для всіх $t \geq 0$. Нехай $\delta(\varepsilon) = \min[\Delta(\varepsilon), r_0]$, тоді з нерівності $\|x_0\|_w < \delta$ випливає, що нерівність (16) виконується для всіх $t \geq 0$. Звідси, $\|W^t(x_0)\|_w \leq u(t; \|x_0\|_w) < \varepsilon$ для всіх $t \geq 0$. Асимптотична стійкість є безпосереднім наслідком нерівності (16). □

Припустимо, що пара елементів (w_1, w_2) утворюють допустиму пару. Тоді за умов леми 4 можна сформулювати таке твердження.

Теорема 2. *Припустимо, що система диференціальних рівнянь з імпульсною дією* (1) *така, що стан рівноваги $\eta_1 = \eta_2 = 0$ системи порівняння* (15) *стійкий за Ляпуновим у конусі $\mathbb{R}^2_+$ (асимптотично стійкий за Ляпуновим у конусі $\mathbb{R}^2_+$). Тоді стан рівноваги $x = 0$ системи* (1) *стійкий за Ляпуновим у конусі K (асимптотично стійкий за Ляпуновим у конусі K).*

Зазначимо, що дослідження стійкості стану рівноваги $\eta_1 = \eta_2 = 0$ системи порівняння (15) не складає значних труднощів (див. теореми 18.2–18.3 з [1]). Розглянемо випадок, коли $\gamma(u) = \gamma_0 u^r + o(u^r)$, $\delta(u) = \delta_0 u^r + o(u^r)$. Тоді нерівності $\gamma_0 > 0$, $\tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2$, $\gamma_0\theta_2 + \delta_0 < 0$ або нерівності $\delta_0 > 0$, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta_1$, $\gamma_0\theta_1 + \delta_0 < 0$ гарантують стійкість стану рівноваги $u = 0$ рівняння порівняння (13).

Дослідження стійкості в конусі стану рівноваги $\eta_1 = \eta_2 = 0$ системи порівняння (15) можна істотно спростити за рахунок другого порядку системи та наявності властивості позитивності цієї системи відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$, й буде реалізоване у наступному розділі.

Приклад. Розглянемо приклад, який ілюструє ефективність теореми 1. Дослідимо стійкість в конусі $\mathbb{R}^3_+$ стану рівноваги $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системи нелінійних диференціальних рівнянь в критичному випадку

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1^3 + \varepsilon x_1 x_2^2 + \varepsilon x_1 x_2 x_3, \quad t \neq \tau_k,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -a^{1/3}x_2^3 + \varepsilon a^{1/3}x_1^3 + \varepsilon x_1^2 x_2 + \varepsilon x_3^3, \quad t \neq \tau_k, \quad \frac{dx_3}{dt} = -ax_3^3 + \varepsilon x_1 x_2 x_3, \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x_1 = bx_1^3 + \varepsilon x_1 x_2 x_3, \quad t = \tau_k, \tag{17}$$
$$\Delta x_2 = ba^{-2/3}x_2^3 + \varepsilon a^{1/3}x_1^3 + \varepsilon x_2^2 x_3, \quad t = \tau_k, \quad \Delta x_3 = bx_3^2 + \varepsilon x_1 x_3^2, \quad t = \tau_k,$$

де a, b, ε — додатні сталі. Нехай $K = \mathbb{R}^3_+$, $w = (1, a^{1/3}, 1)^T$. Тоді

$$f(\alpha w) \overset{\mathbb{R}^3_+}{\leq} (-a + \varepsilon(2 + a^{1/3} + a^{2/3}))\alpha^3 w, \quad g(\alpha w) \overset{\mathbb{R}^3_+}{\leq} (b + \varepsilon(1 + a^{1/3}))\alpha^3 w.$$

Умови асимптотичної стійкості в конусі $K = \mathbb{R}^3_+$ стану рівноваги $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системи (17) мають вигляд $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta_1$, $\varepsilon(1 + a^{1/3} + \theta_1(2 + a^{1/3} + a^{2/3})) < a\theta_1 - b$, $\varepsilon(2 + a^{1/3} + a^{2/3}) < a$.

4. Дослідження нульового стану рівноваги системи порівняння другого порядку, позитивної відносно конуса $\mathbb{R}^2_+$. Розглянемо питання про стійкість розв'язку $\eta_1 = \eta_2 = 0$ позитивної системи порівняння

$$\frac{d\eta_1}{dt} = F_1(\eta_1, \eta_2), \quad t \neq \tau_k, \quad \eta_1(0) = \alpha, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = F_2(\eta_1, \eta_2), \quad t \neq \tau_k, \quad \eta_2(0) = \beta, \tag{18}$$

$$\Delta\eta_1 = G_1(\eta_1,\eta_2), \quad t=\tau_k, \;\; \Delta\eta_2 = G_2(\eta_1,\eta_2), \quad t=\tau_k.$$

Нехай $F_i \in C^r(\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R})$, $G_i \in C^r(\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R})$, тоді

$$F_i(\eta_1,\eta_2) = a_{i1}\eta_1 + a_{i2}\eta_2 + \sum_{2\le|\nu|\le r} A^{(i)}_{\nu_1\nu_2}\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2} + o(\|\eta\|^r), \quad i\in\{1,2\},$$
$$G_i(\eta_1,\eta_2) = b_{i1}\eta_1 + b_{i2}\eta_2 + \sum_{2\le|\nu|\le r} B^{(i)}_{\nu_1\nu_2}\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2} + o(\|\eta\|^r), \quad i\in\{1,2\},$$

Можна довести, що позитивність системи (18) гарантує виконання умов $a_{ij}\ge 0$, $i,j\in\{1,2\}$, $i\ne j$, $b_{ij}\ge 0$, $i,j\in\{1,2\}$, $i\ne j$, $1+b_{ii}\ge 0$, $i\in\{1,2\}$.

Стосовно моментів імпульсного впливу припустимо, що виконується двостороння оцінка $0<\theta_1\le\tau_{k+1}-\tau_k\le\theta_2<+\infty$. Для дослідження стійкості стану рівноваги $\eta_1=\eta_2=0$ побудуємо точкове відображення Пуанкаре

$$\zeta_k = \Pi(\tau_k-\tau_{k-1};\zeta_{k-1}), \quad k\in\{1,2,...\}, \tag{19}$$

де $\zeta_k=(\eta_1(\tau_k+0;\alpha,\beta),\eta_2(\tau_k+0;\alpha,\beta))^T$, $\zeta_0=(\alpha,\beta)^T$.

Задача про стійкість (асимптотичну стійкість) у конусі $\mathbb{R}^2_+$ нерухомої точки $\zeta_k\equiv 0$ еквівалентна до задачі про стійкість (асимптотичну стійкість) стану рівноваги $\eta_1=\eta_2=0$ системи порівняння (18). Задача про стійкість нерухомої точки $\zeta_k\equiv 0$ істотно спрощується, якщо припустити локальну монотонність відображення $\Pi(\tau,.)$ за другим аргументом та наявність локально монотонного мажоруючого відображення $\Gamma(\theta_1,\theta_2;\zeta)$:

$$\Pi(\tau_k-\tau_{k-1};\zeta) \overset{\mathbb{R}^2_+}{\le} \Gamma(\theta_1,\theta_2;\zeta).$$

У цьому випадку стійкість (асимптотична стійкість) у конусі $\mathbb{R}^2_+$ стану рівноваги $\eta_1=\eta_2=0$ системи порівняння (18) випливає зі стійкості (асимптотичної стійкості) у конусі $\mathbb{R}^2_+$ нерухомої точки $\zeta=0$ точкового відображення

$$\overline{\zeta} = \Gamma(\theta_1,\theta_2;\zeta). \tag{20}$$

Дослідження нерухомої точки $\zeta=0$ точкового відображення може бути проведене стандартними методами приведення до нормальної форми. Це дослідження істотно спрощується за допомогою застосування аналогу критерію Мартинюка–Оболенського для локально монотонних точкових відображень, який сформульований у розділі 1. Тоді умови $\exists\zeta^*\in\operatorname{int}\mathbb{R}^2_+$ $(\Gamma(\theta_1,\theta_2;\zeta^*)\overset{K}{<}\zeta^*)$ достатні для асимптотичної стійкості в конусі K нерухомої точки $\zeta=0$ точкового відображення (20).

Опишемо процедуру побудови відображення (19). Розглянемо окремо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\xi_1}{dt} = F_1(\xi_1,\xi_2), \quad \xi_1(0)=\alpha, \;\; \frac{d\xi_2}{dt} = F_2(\xi_1,\xi_2), \quad \xi_2(0)=\beta. \tag{21}$$

Розв'язок цього рівняння $\xi_i(\tau;\alpha,\beta)$, $i\in\{1,2\}$, розкладемо в ряд за початковими даними

$$\xi_i(\tau,\alpha,\beta) = \sum_{|\nu|\ge 1} f^{(i)}_\nu(\tau)\alpha^{\nu_1}\beta^{\nu_2} + o(\|\zeta_0\|^r), \text{ де } \zeta_0=(\alpha,\beta).$$

Тоді, підставляючи цей розклад в систему диференціальних рівнянь (21), отримаємо систему диференціальних рівнянь для визначення коефіцієнтів $f_\nu^{(i)}(\tau)$

$$\frac{df_\nu^{(1)}}{dt} = a_{11}f_\nu^{(1)} + a_{12}f_\nu^{(2)}, \quad \frac{df_\nu^{(2)}}{dt} = a_{21}f_\nu^{(1)} + a_{22}f_\nu^{(2)},$$
$$|\nu| = 1, \quad f_{10}^{(1)} = 1, \quad f_{10}^{(1)} = 0, \quad f_{01}^{(1)} = 0, \quad f_{01}^{(2)} = 1,$$
$$\frac{df_\nu^{(1)}}{dt} = a_{11}f_\nu^{(1)} + a_{12}f_\nu^{(2)} + R_\nu^{(1)}(t), \quad \frac{df_\nu^{(2)}}{dt} = a_{21}f_\nu^{(1)} + a_{22}f_\nu^{(2)} + R_\nu^{(2)}(t),$$

$|\nu| > 1$, $f_\nu^{(1)} = 0$, $f_\nu^{(2)} = 0$ (тут $R_\nu^{(i)}$, $i \in \{1,2\}$ — поліномні функції від коефіцієнтів $f_\mu^{(i)}(t)$, $i \in \{1,2\}$, $|\mu| < |\nu|$). Якщо матриця коефіцієнтів a_{ij}, $i,j \in \{1,2\}$, має позитивні позадіагональні елементи, то $f_{10}^{(1)} = c_{11}e^{\lambda_1 t}, f_{01}^{(1)} = c_{12}e^{\lambda_2 t}, f_{10}^{(2)} = c_{21}e^{\lambda_1 t}$, $f_{01}^{(2)} = c_{22}e^{\lambda_2 t}, c_{ij} \geq 0$, де λ_i — дійсні числа. Функції $f_\nu^{(i)}(t)$ можуть бути отримані в явному вигляді з використанням формули Коші для розв'язку системи лінійних неоднорідних рівнянь $f_\nu(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}R_\nu(s)\,ds$. Отже, знаходження коефіцієнтів $f_\nu(t)$ зводиться до квадратури від елементарних функцій, і отримання мажоранти $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \zeta_0)$ не складає труднощів.

5. Застосування до систем з однорідними правими частинами. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta u = g(u), \quad t = \tau_k, \tag{22}$$

де $u \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $g \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\Delta u = u(t+0) - u(t)$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ — моменти імпульсної дії.

Припустимо, що f і g — однорідні функції r-го порядку, тобто, $(\forall\lambda \geq 0)$ $(f(\lambda u) = \lambda^r f(u)) \wedge (g(\lambda u) = \lambda^r g(u))$. Теорема 1 дозволяє визначити такі умови асимптотичної стійкості стану рівноваги $u = 0$ системи (22).

Теорема 3. *Припустимо, що система рівнянь* (22) *така, що існує елемент* $w \in \operatorname{int} K$ *і сталі* γ_0, δ_0 *такі, що виконуються нерівності*

$$f(w) \overset{K}{\leq} \gamma_0 w, \quad g(w) \overset{K}{\leq} \delta_0 w.$$

Якщо $\gamma_0 > 0$, $\tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2$, $\gamma_0\theta_2 + \delta_0 < 0$ *або* $\delta_0 > 0$, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta_1$, $\gamma_0\theta_1 + \delta_0 < 0$, *то стан рівноваги* $u = 0$ *системи* (22) *асимптотично стійкий у конусі* K.

Розглянемо тепер застосування теореми 2 до дослідження стійкості розв'язку $u = 0$ системи (22). Припустимо, що існують однорідні функції r-того порядку $F_i \in C^1(\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R})$ і $G_i \in C(\mathbb{R}^2_+;\mathbb{R})$, $i \in \{1,2\}$, такі, що

$$f(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} F_1(\delta_1,\delta_2)w_1 + F_2(\delta_1,\delta_2)w_2, \quad g(\delta_1 w_1 + \delta_2 w_2) \overset{K}{\leq} G_1(\delta_1,\delta_2)w_1 + G_2(\delta_1,\delta_2)w_2,$$

де функції $F_i(\delta_1,\delta_2)$, $G_i(\delta_1,\delta_2)$, $i \in \{1,2\}$ мають зображення

$$F_i(\delta_1,\delta_2) = \sum_{|\nu|=r} f_{\nu_1\nu_2}^{(i)}\delta_1^{\nu_1}\delta_2^{\nu_2}, \quad G_i(\delta_1,\delta_2) = \sum_{|\nu|=r} g_{\nu_1\nu_2}^{(i)}\delta_1^{\nu_1}\delta_2^{\nu_2}, \quad \nu = (\nu_1,\nu_2), \ |\nu| = \nu_1 + \nu_2.$$

Тоді стійкість у конусі K стану рівноваги $u = 0$ системи (22) випливає зі стійкості у конусі $\mathbb{R}^2_+$ стану рівноваги $\eta_1 = \eta_2 = 0$ системи порівняння (15). Відображення $\Gamma(\theta_1,\theta_2,\zeta)$ має вигляд

$$\gamma_i(\theta_1,\theta_2,\zeta) = \zeta_i + \textstyle\sum_{|\nu|=r}(g_\nu^{(i)} + \theta_\nu^{(i)}f_\nu^{(i)})\zeta_1^{\nu_1}\zeta_2^{\nu_2} + o(\|\zeta\|^r), \text{ де } \ \theta_\nu^i = \begin{cases}\theta_2, & \operatorname{sign} f_\nu^{(i)} = 1,\\ \theta_1, & \operatorname{sign} f_\nu^{(i)} = -1.\end{cases}$$

Отже, сумісність системи алгебраїчних нерівностей $\sum_{k=0}^{r}(g^{(i)}_{k,r-k}+\ \theta^{(i)}_{k,r-k}f^{(i)}_{k,r-k})\lambda^k < 0$, $i\in\{1,2\}$, $\lambda>0$, $g^{(i)}_{k,r-k}+\theta^{(i)}_{k,r-k}f^{(i)}_{k,r-k}\ge 0,\ k\neq 0,\ k\neq r$, гарантує асимптотичну стійкість стану рівноваги $u=0$ системи (22).

Приклад 1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dt}=-ax_1^3+\varepsilon x_1x_2x_3,\ \frac{dx_2}{dt}=-ax_2^3+\varepsilon x_1^2x_3,\ \frac{dx_3}{dt}=x_3^3+\varepsilon x_1x_2x_3\quad(t\neq\tau_k),\\ \Delta x_1=x_1^3+\varepsilon x_1x_2^2,\ \Delta x_2=x_2^3+\varepsilon x_1x_2x_3,\ \Delta x_3=-bx_3^3+\varepsilon x_2x_3^2\quad(t=\tau_k),\end{gathered}\tag{23}$$

де ε, a, b — додатні сталі, $K=\mathbb{R}^3_+$, $\theta_1\le\tau_{k+1}-\tau_k\le\theta_2$. Покладемо $w_1=(1,1,0)^T$, $w_2=(0,0,1)^T$. Тоді система порівняння набуває вигляду $\frac{d\eta_1}{dt}=-a\eta_1^3+\varepsilon\eta_1^2\eta_2,\ \frac{d\eta_2}{dt}=\eta_2^3+\varepsilon\eta_1^2\eta_2$ $(t\neq\tau_k)$, $\Delta\eta_1=(1+\varepsilon)\eta_1^3+\varepsilon\eta_1^2\eta_2$, $\Delta\eta_2=\varepsilon\eta_1\eta_2^2-b\eta_2^3$ $(t=\tau_k)$. Відображення $\Gamma(\theta_1,\theta_2,\zeta)$ має вигляд $\gamma_1(\zeta)=\zeta_1+(1+\varepsilon-a\theta_1)\zeta_1^3+\varepsilon\theta_2\zeta_1^2\zeta_2+o(\|\zeta\|^3)$, $\gamma_2(\zeta)=\zeta_2+(\theta_2-b)\zeta_2^3+\varepsilon\theta_2\zeta_1^2\zeta_2+\varepsilon\zeta_1\zeta_2^2+o(\|\zeta\|^3)$. Умови асимптотичної стійкості в конусі $\mathbb{R}^3_+$ системи (23) зводяться до сумісності системи нерівностей $\lambda>0,\ (1+\varepsilon-a\theta_1)\lambda+\varepsilon\theta_2<0,\ \varepsilon\theta_2\lambda^2+\varepsilon\lambda+\theta_2-b<0$. Умови сумісності цієї системи мають вигляд $2\varepsilon^2\theta_2\le(a\theta_1-1-\varepsilon)(\sqrt{\varepsilon^2+4\varepsilon\theta_2(b-\theta_2)}-\varepsilon)$, $\varepsilon^2+4\theta_2(b-\theta_2)>0$, $1+\varepsilon-a\theta_1<0$.

5. Заключні зауваження. Введені в лемах 1–4 системи порівняння дозволяють звести дослідження стійкості (асимптотичної стійкості) системи диференціальних рівнянь довільної розмірності до дослідження системи другого порядку. Зазначимо, що при побудові цієї системи не використовуються допоміжні функції Ляпунова, і, на відміну від [17], не вимагається властивість квазімонотонного неспадання правої частини системи порівняння. Справедливість самого принципу порівняння тут забезпечується наявністю властивості монотонності відносно деякого тілесного конуса вихідної системи диференціальних рівнянь. Наведені приклади дослідження стійкості нульового стану рівноваги демонструють ефективність запропонованих підходів дослідження систем у критичних випадках. Справді, неважко переконатися, що в прикладі 1 стан рівноваги $x_1=x_2=x_3=0$ системи звичайних диференціальних рівнянь $\frac{dx_1}{dt}=-ax_1^3+\varepsilon x_1x_2x_3,\ t\neq\tau_k,\ \frac{dx_2}{dt}=-ax_2^3+\varepsilon x_1^2x_3,\ t\neq\tau_k,\ \frac{dx_3}{dt}=x_3^3+\varepsilon x_1x_2x_3,\ t\neq\tau_k$, є нестійким. Також нестійкою є нерухома точка $x_1=x_2=x_3=0$ відображення стрибка $\overline{x}_1=x_1+x_1^3+\varepsilon x_1x_2^2$, $\overline{x}_2=x_2+x_2^3+\varepsilon x_1x_2x_3$, $\overline{x}_3=x_3-bx_3^3+\varepsilon x_2x_3^2$. Тобто, асимптотична стійкість стану рівноваги $x_1=x_2=x_3=0$ системи (23) є наслідком "взаємодії" двох нестійкостей. Зазначимо, що до системи (23) не можна застосувати теореми 18.1–18.3 з монографії [1] чи дослідити її за лінійним наближенням.

ЛІТЕРАТУРА

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A., Impulsive differential equations. – World Scientific, Singapore, 1995.
2. Perestyuk N.A. *On the stability of the equilibrium impulsive systems*// Vuz : Appl. math. Sophia. – 1976. – V.11, №1. – P. 145–150. (in Russian)
3. Perestyuk N.A. *Stability of solutions of linear systems with impulsive action*// Vesti. Kiev. Univer. Mathematics and Mechanics. – 1977. – V.19. – P. 71–76. (in Russian)
4. Perestyuk N.A., Chernikova O.S. *Some modern aspects of the theory of differential equations with impulse effect*// Ukr. Math. J. – 2008. – V.60. – P. 81–94.

5. Ignat'ev A.O., Ignat'ev O.A., Soliman A.A. *Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action*// Mathematical Notes. – 2006. – V.80, №4. – P. 491–499.
6. Ignat'ev A.O. *On the stability of invariant sets of systems with impulse effect*// Nonlinear Analisis. – V.69. – 2008. – P. 53–72.
7. Ignat'ev A.O., Ignat'ev O.A., Stability of solutions of systems with impulse effect, In:Progress in Nonlinear Analisys Research, Nova Science Publishers, Inc., 2009, P. 363–389.
8. Martynyuk A.A., Slyn'ko V.I. *Stability of a nonlinear impulsive system*// Int. Appl. Mech. – 2004. – V.40. – P. 231–239.
9. Dvirny A.I., Slyn'ko V.I. *The conditions of global stability of solutions of nonstationary differential equations with impulse action in the pseudolinear form*// Ukr. Math. Bull. – 2010. – V.8. – P. 182–202.
10. Dvirnyi A.I., Slyn'ko V.I. *Global stability of solutions of nonstationary monotonic differential equations with impulsive action in the pseudo-linear form*// Nonlinear Oscillations. – 2011. – V.14, №2. – P. 187–202.
11. Dvirnyi A.I., Slyn'ko V.I. *Stabylity of solutions to impulsive differential equations in critical cases*// Siberian Mathematical Journal. – 2011. – V.52, №1. – P. 54–62.
12. Haddad W.M., Impulsive and hybrid dynamical systems. Stability, dissipativity, and control, Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2006, 504 p.
13. Dvirnyi A.I., Slyn'ko V.I. *Stability criteria for quasilinear impulsive systems*// Int. appl. mech. – 2004. – V.40, №5. – P. 592–599.
14. Matrosov V.M. *The method of vector Lyapunov's functions in systems with feedback*// Automat. and Rem. cont. – 1972. – V.9. – P. 22–33. (in Russian)
15. Bailey F.N. *The application of Lyapunov's second method to interconnected systems*// J. Soc. Indust. and Appl. Math. Ser. A. Control. – 1965. – V.3, №3. – P. 443–462.
16. Bellman R. *Vector Lyapunov functions*// J. Soc. Indust. and Appl. Math. Ser. A. Control. – 1962. – V.1, №1. – P. 32–34.
17. Martynyuk A.A., Lakshmikantham V., Leela S., Stability of Motion: a Method of Comparison, Nauk. Dumka, Kiev, 1991, 248 p. (in Russian)
18. Bainov D.D., Kulev G.K. *Second method of Lyapunov and comparison principle for systems with impulse effect*// J. Comput. and Appl. Math. – 1988. – V.22, №2. – P. 305–321.
19. Martynyk A.A., Obolensky A.Yu., Stability investigation of autonomous systems of comparison, Kiev, Institute of Mathematics USSR Academy of Sciences, 1978, 24 p. (in Russian)
20. Obolensky A.Yu. *Stability of comparison systems*// Dop. AS. Ukr. SSR. – 1979. – №8. – P. 607–611. (in Russian)
21. Obolensky A.Yu. *Stability of linear comparison systems*// Math. phys. and nonlinear mech. – 1984. – V.1. – P. 51–55. (in Russian)
22. Obolensky A.Yu. *The stability of solutions of autonomous Wazewski systems with delay*// Ukr. Math. J. – 1983. – V.35, №5. – P. 35–42. (in Russian)
23. Obolensky A.Yu., Criterias of motion stability of some nonlinear systems, Phoenix, Kiev, 2010, 228 p. (in Russian)
24. Dvirnyi A.I., Slyn'ko V.I. *The stability of linear impulsive systems relative to the cone*// Dop. NAS of Ukraine. – 2004. – V.4. – P. 37–43. (in Russian)
25. Dvirny A.I., Stability tests of impulsive systems via Lyapunov's multicomponent functions, Thesis for a candidate's degree, Kyiv, 2005, 167 p. (in Russian)
26. Slyn'ko V.I., Stability of motion of mechanical systems: hybrid models, Abstract of Thesis for a doctor's degree, Kiev, 2009, 24 p. (in Russian)
27. Dvirnyi A.I., Slyn'ko V.I. *The stability by two measures of abstract monotonic differential equations with impulsive action*// Ukr. Math. J. – 2011. – V.63, №7. – P. 904–923.
28. Hartman Ph. Ordinary differential equations. M.: Mir, 1970, 720 p. (in Russian)
29. Krasnosel'skii M.A., Lifshitz E.A., Sobolev A.V., Positive linear systems, Nauka, Moskow, 1985, 256 p. (in Russian)

The Arctic University of Norway, Tromso
Institute of Mechanics of Name of S. P. Timoshenko NAS of Ukraine
vitstab@ukr.net

Надійшло 2.06.2012