УДК 517. 925

Л. И. Кусик

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИКА НЕКОТОРОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

L. I. Kusick. *Existence conditions and asymptotics of a class of solutions of differential equations of the second order*, Mat. Stud. **41** (2014), 184–197.

An asymptotic representations of some solutions for one class of nonlinear non-autonomous differential equations of the second order are established. We give necessary and also sufficient conditions of existence for these solutions.

Л. И. Кусик. *Условия существования и асимптотика некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка* // Мат. Студiї. – 2014. – Т.41, №2. – С.184–197.

Установлены асимптотические представления некоторых типов решений одного класса нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка; найдены необходимые, а также достаточные условия существования таких решений.

1. Постановка задачи и предварительные сведения. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

где $f\colon [a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\longrightarrow\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, Δ_{Y_i} $(i\in\{0,1\})$ — односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i\in\{0,1\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$, в предположении, что числа μ_i $(i=0,1)$, определяемые равенством

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i=+\infty, \text{ либо } Y_i=0 \text{ и } \Delta_{Y_i} \text{ — правая окрестность } 0,\\ -1, & \text{если } Y_i=-\infty, \text{ либо } Y_i=0 \text{ и } \Delta_{Y_i} \text{ — левая окрестность } 0,\end{cases}$$

удовлетворяют условиям

$$\mu_0\mu_1 > 0 \text{ при } Y_0=\pm\infty \text{ и } \mu_0\mu_1<0 \text{ при } Y_0=0. \tag{2}$$

Заметим, что неравенства (2) являются необходимыми для существования у уравнения (1) решений, определенных в левой окрестености ω, каждое из которых удовлетворяет условиям

$$y^{(i)}(t)\in\Delta_{Y_i} \quad \text{при } t\in[t_0,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t)=Y_i \quad (i\in\{0,1\}). \tag{3}$$

Введем необходимые в дальнейшем определения.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 34E10.
Keywords: nonlinear equations; $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-solutions; asymptotic representations.

Определение 1. Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$, называется $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$*-решением*, где $-\infty\le\lambda_0\le+\infty$, если для него наряду с (3) соблюдается условие

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)}=\lambda_0.$$

В данной работе используем (см., например, монографию Е. Сенеты [1]) важное для нас понятие правильно меняющихся на бесконечности или в нуле функций.

Определение 2. Непрерывная функция $\varphi\colon[a,\infty)\longrightarrow(0,+\infty)$ называется *правильно меняющейся при* $z\to Z$ (Z равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Z — односторонняя окрестность Z), если существует такое число $\sigma\in\mathbb{R}$, что для произвольного $\lambda>0$

$$\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in\Delta_Z}}\frac{\varphi(\lambda z)}{\varphi(z)}=\lambda^\sigma.$$

При этом число σ называется порядком функции φ при $z\to Z$.

Определение 3. Правильно меняющаяся на бесконечности (в нуле) функция $L(z)$ порядка $\sigma=0$ называется *медленно меняющейся функцией.*

Согласно определению правильно меняющейся функции (см. монографию Е. Сенеты [1], глава 1, п. 1.1, с. 9–10), каждая правильно меняющаяся функция $\varphi\colon\Delta_Z\longrightarrow]0,+\infty[$ при $z\to Z$ (Z равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Z — односторонняя окрестность Z) допускает представление вида

$$\varphi(z)=|z|^\sigma\,L(z),\tag{4}$$

где $L\colon\Delta_Z\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная медленно меняющаяся при $z\to Z$ функция, т.е. такая, что

$$\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in\Delta_Z}}\frac{L(\lambda z)}{L(z)}=1\quad\text{для любого}\quad\lambda>0.\tag{5}$$

Известно также (см. монографию Е. Сенеты [1], глава 1, п.1.2, с. 10–15), что предельное соотношение (5) выполняется равномерно по λ на любом отрезке $[c,d]\in]0,+\infty[$ (свойство M_1) и существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $z\to Z$ функция $\tilde L\colon\Delta_Z\longrightarrow]0,+\infty[$ (свойство M_2), удовлетворяющая условию

$$\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in\Delta_Z}}\frac{L(z)}{\tilde L(z)}=1,\qquad\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in\Delta_Z}}\frac{z\tilde L'(z)}{\tilde L(z)}=0.\tag{6}$$

При этом ясно, что функция

$$\tilde\varphi(z)=|z|^\sigma\tilde L(z)\tag{7}$$

непрерывно дифференцируема на промежутке Δ_Z и удовлетворяет условиям

$$\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in\Delta_Z}}\frac{\varphi(z)}{\tilde\varphi(z)}=1,\qquad\lim_{\substack{z\to Z\\ z\in\Delta_Z}}\frac{z\tilde\varphi'(z)}{\tilde\varphi(z)}=\sigma.\tag{8}$$

Функции $\tilde L$, $\tilde\varphi$ называют нормализованными соответственно медленно, правильно меняющимися функциями при $z\to Z$.

Примерами медленнно меняющихся при $z \to Z$ (Z равно либо нулю, либо $\pm\infty$) функций являются $|\ln|z||^{\gamma_1},\ \ln^{\gamma_2}|\ln|z||,\ \gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R},\ \exp(|\ln|z||^{\gamma_3}),\ 0<\gamma_3<1,\ \exp\left(\frac{\ln|z|}{\ln|\ln|z||}\right)$, функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $z \to Z$, и др.

Отметим некоторые работы, посвященные исследованию асимптотических свойств неколеблющихся решений дифференциального уравнения (1). Развитие теории правильно меняющихся функций явилось предпосылкой изучения дифференциального уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{9}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p\colon [a,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция и $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ — непрерывные правильно меняющиеся функции порядков σ_i $(i \in \{0,1\})$. Важным частным случаем дифференциального уравнения (9) является обобщенное уравнение Эмдена-Фаулера $y'' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1},\ \ \sigma_0+\sigma_1 \neq 1$. Асимптотическое поведение решений этого уравнения достаточно подробно исследовано в работах И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, А. В. Костина, В. М. Евтухова (см. [2]–[7]) и других авторов.

Первые серьезные результаты, касающиеся асимптотических свойств решений уравнений вида (9) с непрерывными правильно меняющимися нелинейностями, были получены в работах В. Марича, М. Томича ([8], [9]), С. Д. Талиаферо ([10]), когда $\varphi_1(y') \equiv 1$, $Y_0 = 0$ и $\omega = +\infty$. В случае произвольных $\omega \le +\infty$, Y_i $(i \in \{0,1\})$, равных (независимо друг от друга) либо нулю, либо $\pm\infty$, и правильно меняющихся при $y^{(i)} \to Y_i$ функций φ_i $(i \in \{0,1\})$ была установлена асимптотика при $t \uparrow \omega$ для всех возможных типов $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решений уравнения (9) в работах В. М. Евтухова, М. А. Белозеровой ([11]–[13]) при дополнительном предположении, что функции φ_i $(i \in \{0,1\})$ являются нормализованными правильно меняющимися, дважды непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяющими условию $\overline{\lim}_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right| < +\infty \quad (i \in \{0,1\})$. При этом были выделены четыре различных по своим асимптотическим свойствам типа таких решений, соответствующих значениям $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ (неособый случай) и значениям $\lambda_0 \in \{0,1\},\pm\infty$ (особые случаи).

Целью настоящей заметки является установление асимптотики и условий существования $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решений уравнения (1) в особом случае, когда $\lambda_0 = 1$. При этом будем предполагать, что уравнение (1) в некотором смысле является близким к уравнению вида (9).

Полагая $\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty; \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$ введем следующее определение.

Определение 4. Будем говорить, что *функция f удовлетворяет условию* $(RN)_1$, если существуют число $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, непрерывная функция $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ и непрерывные правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ $(i \in \{0,1\})$ функции $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ порядков σ_i $(i \in \{0,1\})$, такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_i\colon [a,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}$ $(i \in \{0,1\})$, удовлетворяющих условиям $\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t) = Y_i$, $\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_i'(t)}{z_i(t)} = \pm\infty \quad (i \in \{0,1\})$, $\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{z_0'(t)z_1(t)}{z_0(t)z_1'(t)} = 1$, имеет место представление

$$f(t,z_0(t),z_1(t)) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(z_0(t))\varphi_1(z_1(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{10}$$

2. Основные результаты. Введем вспомогательные функции, полагая $I_0(t) = \int_{A_0}^{t} p(\tau)d\tau$, $I_1(t) = \int_{A_1}^{t} I_0(\tau)d\tau$, где пределы интегрирования $A_i \in \{a,\omega\}$ $(i \in \{0,1\})$ выбраны так, чтобы каждая функция $I_i(t)$ $(i \in \{0,1\})$ стремилась либо к 0, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$.

Теорема 1. *Пусть функция f удовлетворяет условию $(RN)_1$ и в представлении (10) порядки σ_0, σ_1 функций φ_0, φ_1 (соответственно) такие, что $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений необходимо, чтобы наряду с (2) выполнялись условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p(t)I_1(t)}{I_0^2(t)} = 1, \tag{11}$$

$$Y_i = \mu_i \lim_{t\uparrow\omega} |I_{1-i}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} \quad (i \in \{0,1\}), \tag{12}$$

$$\alpha_0\mu_1(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[, \quad \alpha_0\mu_0 > 0. \tag{13}$$

При этом для каждого такого решения при $t \uparrow \omega$ имеют место “грубые” асимптотические представления

$$y^{(i)}(t) = \mu_i |I_{1-i}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)} \quad (i \in \{0,1\}), \tag{14}$$

а также представления вида

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2 I_1(t)[1+o(1)], \tag{15}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_0(t)(1+o(1))}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}. \tag{16}$$

Если же наряду с условиями (2), (11)–(13) выполняется одно из следующих условий

$$\text{либо } \sigma_1 \neq 2, \ \text{либо } \sigma_1 = 2 \text{ и } 1-\sigma_0-\sigma_1 < 0, \tag{17}$$

то у дифференциального уравнения (1) существует $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (14)–(16), причем таких решений существует однопараметрическое семейство при $1-\sigma_0-\sigma_1 < 0$ и двухпараметрическое семейство при $1-\sigma_0-\sigma_1 > 0$ и $\alpha_0\mu_1(\sigma_1 - 2) < 0$.

Обратим внимание на то, что полученные в теореме 1 точные асимптотические представления (15), (16) записаны в неявном виде. При некоторых условиях эти представления могут быть переписаны в явном виде.

Определение 5 ([11])**.** Будем говорить, что непрерывная функция $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ вида (4) *удовлетворяет условию* S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l\colon \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ такой, что $\lim\limits_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zl'(z)}{l(z)} = 0$, имеет место асимптотическое соотношение $L_i(zl(z)) = L_i(z)[1+o(1)]$ при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$.

Условию S заведомо удовлетворяют функции φ_i, для которых функция L_i имеет конечный предел при $z \to Y_i$, а также функции вида $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}|\ln z|^{\gamma_1}$, $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}|\ln z|^{\gamma_1}|\ln|\ln z||^{\gamma_2}$, где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, и многие другие.

Замечание 1 ([14])**.** Если функция φ_i $(i \in \{0,1\})$ удовлетворяет условию S, а функция $z\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}$ непрерывно дифференцируемая и такая, что $\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Y_i$, $\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}[r+o(1)]$ при $t \uparrow \omega$, где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то $L_i(z(t)) = L_i\left(\mu_i|\xi(t)|^r\right)[1+o(1)]$ при $t \uparrow \omega$, поскольку в данном случае $z(t) = v(t)l(v(t))$, где $v(t) = \mu_i|\xi(t)|^r$, и

$$\lim_{\substack{v\to Y_i\\ v\in\Delta_{Y_i}}} \frac{vl'(v)}{l(v)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{v(t)l'(v(t))}{l(v(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{v(t)\left(\frac{z(t)}{v(t)}\right)'}{\left(\frac{z(t)}{v(t)}\right)v'(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\xi(t)z'(t)}{r\xi'(t)z(t)} - 1\right] = 0.$$

Следствие из теоремы 1. *Пусть функция f удовлетворяет условию $(RN)_1$ и функции φ_i $(i \in \{0,1\})$ в представлении (10) порядков σ_i $(i \in \{0,1\})$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, удовлетворяют условию S. Тогда каждое $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решение (в случае их существования) дифференциального уравнения (1) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$\begin{aligned} y(t) &= \mu_0\left(|1-\sigma_0-\sigma_1|^{2-\sigma_1}|I_0(t)|^{\sigma_1}|I_1(t)|^{1-\sigma_1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} L(t)(1+o(1)),\\ y'(t) &= \mu_1\left(|1-\sigma_0-\sigma_1|^{1+\sigma_0}|I_0(t)|^{1-\sigma_0}|I_1(t)|^{\sigma_0}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} L(t)(1+o(1)), \end{aligned} \tag{18}$$

где $L(t) = \left(L_0(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}})L_1(\mu_1|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}})\right)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}$.

3. Обоснование основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $y\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решение уравнения (1). Тогда существует число $t_1 \in [t_0,\omega[$ такое, что $y^{(k)}(t) \neq 0$ $(k \in \{0,1,2\})$, $\operatorname{sign} y^{(k)}(t) = \mu_k$ $(k \in \{0,1\})$ при $t \in [t_1,\omega[$ и соблюдаются неравенства (2). Кроме того, из определения $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решения следует

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)y''(t)}{[y'(t)]^2} = 1, \tag{19}$$

откуда $\mu_0 y''(t) > 0$.

Используя предельное равенство (19) покажем, что для $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \pm\infty. \tag{20}$$

Так как $\frac{y(t)y''(t)}{[y'(t)]^2} = 1+o(1)$ при $t\uparrow\omega$, то $\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' \Big/ \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 = \phi(t)$, при $t\uparrow\omega$. Интегрируя это соотношение на промежутке $[t_1,t] \subset [a,\omega[$, имеем

$$-\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1} + C = \int_{t_1}^{t}\phi(\tau)d\tau, \tag{21}$$

где C — некоторая постоянная. Рассмотрим сначала случай $\omega = +\infty$, т. е. когда $\pi_\omega(t) = t$. Разделив обе части (21) на t и переходя к пределу при $t\to+\infty$, получим

$$-\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1}}{t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\int_{t_1}^{t}\phi(\tau)d\tau}{t}.$$

Здесь в силу правила Лопиталя в форме Штольца при $t\to+\infty$ правая часть стремится к нулю, откуда $\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{ty'(t)} = 0$. Отсюда с учетом того, что функции $y(t), y'(t)$ сохраняют знак, имеем первое из представлений (20) для $\omega = +\infty$. Если же $\omega < +\infty$, то $\pi_\omega(t) = t-\omega$ и в (21) $\int_{t_1}^{t}\phi(\tau)d\tau = C_1 + \int_{\omega}^{t}\phi(\tau)d\tau$, C_1 — некоторая постоянная. Поэтому

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^{-1} = C - C_1 - \int_{\omega}^{t}\phi(\tau)d\tau, \tag{22}$$

откуда следует, что функция $(\frac{y'(t)}{y(t)})^{-1}$ стремится к постоянной при $t\uparrow\omega$. Если в (22) $C-C_1\neq 0$, то при $t\uparrow\omega$ получим $\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1}{C-C_1}+o(1)$. Следовательно, $\ln|y(t)|\to\mathrm{const}$ при $t\uparrow\omega$, чего быть не может, так как в силу определения $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решения левая часть этого соотношения стремится к $\pm\infty$. Поэтому (22) имеет вид $(\frac{y'(t)}{y(t)})^{-1}=-\int_\omega^t\phi(\tau)d\tau$. Деля обе части последнего равенства на $\pi_\omega(t)$ и переходя к пределу при $t\uparrow\omega$ ввиду правила Лопиталя, придем к первому из соотношений (20) для $\omega<+\infty$. Второе из предельных равенств (20) получаем из (19) и первого из соотношений (20).

Теперь из уравнения (1) и условия $(RN)_1$, которому удовлетворяет функция f, имеем $y''(t)=\alpha_0p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))[1+o(1)]$ при $t\uparrow\omega$, или

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0p(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{23}$$

Отсюда в силу $\mu_0y''(t)>0$ имеем второе знаковое условие (13). Кроме того, интегрируя (23) на промежутке от A_0 до t, получим

$$\int_{A_0}^t\frac{y''(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}=\alpha_0I_0(t)[1+o(1)]\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{24}$$

Сравним интеграл $\int_{A_0}^t\frac{y''(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}$ с функцией $\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$, где $\varphi_{ii}\colon\Delta_{Y_i}\longrightarrow]0,+\infty[$ $(i\in\{0,1\})$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (8). Так как функция $I_0(t)$ при $t\uparrow\omega$ стремится либо к нулю, либо к бесконечности, то ввиду (24) также себя ведет $\int_{A_0}^t\frac{y''(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}$. Если $\int_{A_0}^t\frac{y''(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}\to\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$, то в силу правила Лопиталя в форме Штольца и условий (8) и определения $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решения, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\int_{A_0}^t\frac{y''(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{y''(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}{\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}}\left[1-\frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)}\frac{y(t)\varphi_{00}'(y(t))}{\varphi_{00}(y(t))}-\frac{y'(t)\varphi_{11}'(y'(t))}{\varphi_{11}(y'(t))}\right]=$$
$$=1-\sigma_0-\sigma_1. \tag{25}$$

Допустим теперь, что $\lim_{t\uparrow\omega}\int_{A_0}^t\frac{y''(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}=0$. Тогда ввиду (24) $A_0=\omega$, т.е. $\int_a^\omega p(\tau)d\tau$ сходится. Исходя из вида производной функции $\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$ (см. (25)), условий (8), определения $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-решения, $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$, замечаем, что в некоторой левой окрестности ω эта функция строго монотонна. Поэтому для функции $\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$ при $t\uparrow\omega$ существует конечный или равный $\pm\infty$ предел. Допустим, что этот предел не равен нулю. Тогда из (23) имеем

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}\sim\frac{\alpha_0p(t)}{\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}}\sim\varphi(t)p(t)\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

где $\lim_{t\uparrow\omega}\varphi(t)=\mathrm{const}$, откуда с учетом того, что $A_1=\omega$, получим $\ln|y'(t)|\to\mathrm{const}$ при $t\uparrow\omega$, чего быть не может в силу (3) и $Y_1\in\{0,\infty\}$. Таким образом, $\frac{y'(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}\to 0$ при $t\uparrow\omega$ и ввиду правила Лопиталя имеет место (25).

Поэтому соотношение (24) с учетом $1-\sigma_0-\sigma_1\neq 0$, (25) может быть переписано в виде

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))}=\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+o(1)], \tag{26}$$

откуда вытекает первое знаковое условие (13).

Кроме того, интегрируя (26) на промежутке от A_1 до t, имеем

$$\int_{A_1}^{t} \frac{y'(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{27}$$

Сравнивая интеграл $\int_{A_1}^{t} \frac{y'(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau))}$ с функцией $\frac{y(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}(y'(t))}$ и рассуждая аналогично предыдущему, в силу (8) и правила Лопиталя получим при $t\uparrow\omega$ $\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = (1-\sigma_0-\sigma_1)[1+o(1)]\int_{A_1}^{t} \frac{y'(\tau)d\tau}{\varphi_0(y(\tau))\varphi_1(y'(\tau)).}$ Отсюда с учетом (27) вытекает

$$\frac{y(t)}{\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2 I_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{28}$$

Из соотношений (26) и (28) следует (16), откуда в свою очередь, с учетом определения функций $I_0(t), I_1(t)$ имеем $\ln|y(t)| = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\ln|I_1(t)|(1+o(1))$. Поэтому справедливо представление (14) при $i=0$.

Условие (11) является следствием соотношений (19), (23), (24), (26).

В силу (4), свойства M_1 медленно меняющихся функций, указанного в разделе 1, и (16) имеем

$$\begin{aligned}\varphi_1(y'(t)) = |y'(t)|^{\sigma_1}L_1(y'(t)) &= \left|\frac{I_0(t)(1+o(1))y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right|^{\sigma_1} L_1\left(\frac{I_0(t)(1+o(1))y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right) = \\ &= \left|\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right|^{\sigma_1} L_1\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)(1+o(1)) = \\ &= \varphi_1\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.\end{aligned}$$

Ввиду последнего равенства из (26) с учетом (16), получим представление (15).

Следствием соотношений (23) и (26) является представление

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)(1+o(1))}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{29}$$

откуда получаем предельное равенство (12) при $i=1$ и представление (14) для $i=1$. *Достаточность.* Пусть наряду с (11)–(14) и (2) соблюдается одно из условий (17). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1) имеет $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решения, допускающие при $t\uparrow\omega$ представления (14)–(16), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Заметим сначала, что в силу (11)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\ln|I_0(t)|}{\ln|I_1(t)|} = 1. \tag{30}$$

Рассмотрим теперь с учетом $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$ соотношение

$$\frac{y}{\varphi_{00}(y)\varphi_{11}\left(\frac{I_0(t)y}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)} - \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2 I_1(t)(1+v_1) = 0 \tag{31}$$

в котором $\varphi_{ii}\colon \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ — непрерывно дифференцируемые функции вида (7), удовлетворяющие условиям (6), (8).

Покажем, что (31) однозначно определяет заданную на множестве $D_0 = [t_0, \omega[\times V_1$, где $t_0 \in [a, \omega[$ и $V_1 = \{v_1 \in \mathbb{R}\colon |v_1| \le 1/2\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $y = Y(t, v_1)$ вида

$$Y(t,v_1) = \mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} + z(t,v_1)}, \tag{32}$$

где функция z такова, что $|z(t,v_1)| \le \frac{1}{2|1-\sigma_0-\sigma_1|}$ при $(t,v_1) \in D_0$ и $\lim_{t\uparrow\omega} z(t,v_1) = 0$ равномерно по $v_1 \in V_0$. Для этого, полагая в (31)

$$y = \mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} + z}, \tag{33}$$

получим с учетом (7) и знаковых условий (13) соотношение вида

$$\frac{|I_1(t)|^{1+\sigma_1+(1-\sigma_0-\sigma_1)z} |1-\sigma_0-\sigma_1|^{\sigma_1}}{|I_0(t)|^{\sigma_1} L_{00}\left(\mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right) L_{11}\left(\mu_1 \left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)} = \\ = (1-\sigma_0-\sigma_1)^2\, |1+v_1|\, |I_1(t)|,$$

откуда в результате логарифмирования находим

$$(1+\sigma_1+z(1-\sigma_0-\sigma_1)) \ln|I_1(t)| = \ln|I_1(t)| + (2-\sigma_1)\ln|1-\sigma_0-\sigma_1| + \ln|1+v_1| + \\ +\sigma_1 \ln|I_0(t)| + \ln\left(L_{00}\left(\mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right) L_{11}\left(\mu_1 \left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)\right).$$

Отсюда следует, что

$$z = a(t) + b(t,v_1) + Z(t,z) \tag{34}$$

где

$$a(t) = (1-\sigma_0-\sigma_1)^{-1}\left[\sigma_1 \frac{\ln|I_0(t)|}{\ln|I_1(t)|} - \sigma_1 + \frac{(2-\sigma_1)\ln|1-\sigma_0-\sigma_1|}{\ln|I_1(t)|}\right],$$

$$b(t,v_1) = \frac{\ln|1+v_1|}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|I_1(t)|},$$

$$Z(t,z) = \frac{\ln\left(L_{00}\left(\mu_0 |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right) L_{11}\left(\mu_1 \left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)\right)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\ln|I_1(t)|}.$$

Поскольку согласно условиям (12) $\mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z} = Y_0$ при $|z| \le d$, где $d = \frac{1}{2|1-\sigma_0-\sigma_1|}$, то с учетом (30) имеем

$$\mu_1 \lim_{t\uparrow\omega} \left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right| |I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z} = \frac{\mu_1}{|1-\sigma_0-\sigma_1|} \lim_{t\uparrow\omega} |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |I_1(t)|^z \times \\ \times \lim_{t\uparrow\omega} \left|\frac{I_0(t)}{I_1(t)}\right|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = \frac{\mu_1}{|1-\sigma_0-\sigma_1|} \lim_{t\uparrow\omega} |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |I_1(t)|^z \lim_{t\uparrow\omega} e^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}(\ln|I_0(t) - \ln|I_1(t)|)} = \\ = \frac{\mu_1}{|1-\sigma_0-\sigma_1|} \lim_{t\uparrow\omega} |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |I_1(t)|^z = Y_1.$$

Поэтому правая часть соотношения (33) определена и непрерывно дифференцируема на множестве $\Omega = [t_1, \omega[\times V_1 \times Z_0$, где t_1 — некоторое число из промежутка $[a, \omega[$ и $Z_0 = \{z \in \mathbb{R} \colon |z| \le d\}$.

В (34)

$$\lim_{t\uparrow\omega} b(t, v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in V_1, \tag{35}$$

а также в силу (30)

$$\lim_{t\uparrow\omega} a(t) = 0. \tag{36}$$

Так как ввиду (30) $|I_0(t)||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)} \sim |I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+o(1)}$ при $t \uparrow \omega$, то в силу свойств медленно меняющихся функций ([1], глава 1, п. 1.5, с. 24) верны равенства

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln\left(L_{00}\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)\right)}{\ln|I_1(t)|} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\ln\left(L_{11}\left(\mu_1|I_0(t)||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)\right)}{\ln|I_1(t)|} = 0$$

равномерно по $z \in Z_0$, т.е. справедливо соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z(t, z) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z \in Z_0. \tag{37}$$

Также находим

$$\frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\left[\frac{\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z} L_{00}'\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}{L_{00}\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu_1\left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z} L_{11}'\left(\mu_1\left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}{L_{11}\left(\mu_1\left|\frac{I_0(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right||I_1(t)|^{\frac{\sigma_0+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+z}\right)}\right].$$

Отсюда с учетом вторых из условий (8) следует, что $\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\partial Z(t,z)}{\partial z} = 0$ равномерно по $z \in Z_0$. В силу (35)–(37) существует число $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что на множестве $[t_2, \omega[\times V_1 \times Z_0$ соблюдается неравенство

$$|a(t) + b(t, v_1) + Z(t, z)| \le d \tag{38}$$

и выполняется условие Липшица

$$|Z(t, z_1) - Z(t, z_2)| \le \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \quad \text{при} \quad t \in [t_2, \omega[\quad \text{и} \quad z_1, z_2 \in Z_0. \tag{39}$$

Подобрав таким образом число t_2, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $D = [t_2, \omega[\times V_1$ функций $z \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|z\| = \sup\left\{|z(t, v_1)| \colon (t, v_1) \in D\right\}$. Пусть $\mathbf{B}_0$ подпространство тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\| \le d$. Выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0, 1)$, рассмотрим на $\mathbf{B}_0$ оператор

$$\Phi(z)(t, v_1) = z(t, v_1) - \nu\left[z(t, v_1) - a(t) - b(t, v_1) - Z(t, z(t, v_1))\right]. \tag{40}$$

Для любого $z \in \mathbf{B}_0$ в силу условия (38) имеем $|\Phi(z)(t, v_1)| \le (1-\nu)|z(t, v_1)| + \nu d \le d$ при $(t, v_1) \in D$. Следовательно, $\|\Phi(z)\| \le d$, т.е. $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z_1, z_2 \in \mathbf{B}_0$. Тогда в силу (3.21) при $(t, v_1) \in D$

$$|\Phi(z_1)(t,v_1) - \Phi(z_2)(t,v_1)| \le (1-\nu)|z_1(t,v_1) - z_2(t,v_1)| + \nu|Z(t, z_1(t,v_1)) - Z(t, z_2(t,v_1)| \le$$
$$\le (1-\nu)|z_1(t,v_1) - z_2(t,v_1)| + \frac{\nu}{2}|z_1(t,v_1) - z_2(t,v_1)| \le \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\|z_1 - z_2\|.$$

Откуда следует, что $\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \le \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\|z_1 - z_2\|$.

Тем самым показано, что оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (40) эта непрерывная на множестве D функция является единственным решением уравнения (34), удовлетворяющим условию $\|z\| \le d$. Из (34) с учетом этого условия и (35)–(37) следует, что данное решение стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $v_1 \in V_1$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $D_0 = [t_0, \omega[\times V_1$, где t_0 — некоторое число из промежутка $[t_2, \omega[$ непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявной функции, определяемой соотношением (34). В силу замены (33) полученной функции z соответствует функция Y вида (32), которая является решением уравнения (31). Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1) преобразование

$$y(t) = Y(t, v_1(\tau)), \ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_0(t)[1 + v_2(\tau)]}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)I_1(t)}, \tag{41}$$

где $\tau = \beta \ln |I_0(t)|$, $\beta = \mathrm{sign}(\mu_1\alpha_0(1 - \sigma_0 - \sigma_1))$, и учитывая, что функция (32) при $t \in [t_0, \omega[$ и $(v_1(\tau), v_2(\tau)) \in V_0$, $V_0 = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |v_i| \le 1/2 \ (i \in \{1, 2\})\}$ является решением уравнения

$$\frac{y(t)}{\varphi_{00}(y(t))\varphi_{11}\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right)} = \alpha_0(1 - \sigma_0 - \sigma_1)^2 I_1(t)[1 + v_1(\tau)], \tag{42}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \beta\Big[\frac{q(\tau)(1+v_1)(1+v_2)}{1-\sigma_0-\sigma_1}(1 - H_0(\tau, v_1) - H_1(\tau, v_1)) - \\ \qquad -(1 + v_1)(q(\tau) + H_1(\tau, v_1)(1 - q(\tau)))\Big], \\ v_2' = \beta\Big[\frac{G(\tau,v_1,v_2)\Phi_0(\tau,v_1)\Phi_1(\tau,v_1,v_2)}{1-\sigma_0-\sigma_1}\frac{(1+v_2)^{\sigma_1}}{1+v_1} - \frac{q(\tau)(1+v_2)^2}{1-\sigma_0-\sigma_1} - (1 - q(\tau))(1 + v_2)\Big], \end{cases} \tag{43}$$

в которой

$$q(\tau(t)) = \frac{I_0^2(t)}{p(t)I_1(t)}, \quad H_0(\tau(t), v_1) = \frac{Y(t,v_1)\varphi_{00}'(Y(t,v_1))}{\varphi_{00}(Y(t,v_1))},$$

$$H_1(\tau(t), v_1) = \frac{I_0(t)Y(t,v_1)\varphi_{11}'\left(\frac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)I_1(t)\varphi_{11}\left(\frac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)},$$

$$G(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{f\left(t, Y(t,v_1), \frac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}{\alpha_0 p(t)\varphi_0\left(Y(t,v_1)\right)\varphi_1\left(\frac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)},$$

$$\Phi_0(\tau(t), v_1) = \frac{\varphi_0\left(Y(t,v_1)\right)}{\varphi_{00}\left(Y(t,v_1)\right)}, \quad \Phi_1(\tau(t), v_1, v_2) = \frac{\varphi_1\left(\frac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}{(1 + v_2)^{\sigma_1}\varphi_{11}\left(\frac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)}.$$

Здесь функция $\tau(t)=\beta\ln|I_0(t)|$ обладает свойствами $\tau\colon [t_0,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[,\ \tau'(t)>0$ при $t\in[t_0,\omega[,\ \lim_{t\uparrow\omega}\tau(t)=+\infty$. Поэтому в силу условия (11)

$$\lim_{\tau\to+\infty}q(\tau)=\lim_{t\uparrow\omega}q(\tau(t))=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_0^2(t)}{p(t)I_1(t)}=1. \tag{44}$$

Поскольку согласно условиям (12) и представлению (32)

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y(t,v_1)=Y_0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in V_1, \tag{45}$$

а также учитывая (30), (13),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_0(t)Y(t,v_1)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}=Y_1 \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in V_1, \tag{46}$$

то $\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_0(t)[1+v_2]Y(t,v_1)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}=Y_1$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$. Поэтому из условий (8), (45), (46) $\lim_{t\uparrow\omega}H_i(\tau(t),v_1)=\sigma_i$ $(i\in\{0,1\})$ равномерно по $v_1\in V_1$. Следовательно, имеют место представления

$$H_i(\tau,v_1)=\sigma_i+r_i(\tau,v_1) \quad (i\in\{0,1\}), \tag{47}$$

где $\lim_{\tau\to+\infty}r_i(\tau,v_1)=0$ $(i\in\{0,1\})$ равномерно по $v_1\in V_1$. В силу (45), (46) с учетом (4), (7), (8) $\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_0(\tau(t),v_1)=1$ равномерно по $v_1\in V_1$, $\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_1(\tau(t),v_1,v_2)=1$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$, и поэтому справедливы представления

$$\Phi_0(\tau(t),v_1)=1+r_2(\tau(t),v_1), \quad \Phi_1(\tau(t),v_1,v_2)=1+r_3(\tau(t),v_1,v_2), \tag{48}$$

где $\lim_{\tau\to+\infty}r_2(\tau,v_1)=0$ равномерно по $v_1\in V_1$, $\lim_{\tau\to+\infty}r_3(\tau,v_1,v_2)=0$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$.

Аналогично доказательству предельных равенств (20) легко показать, что следствием условия (11) и определения функций I_0, I_1 являются соотношения

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_0(t)}=\pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_0(t)}{I_1(t)}=\pm\infty. \tag{49}$$

Из (31), которому удовлетворяет функция Y, вытекает

$$\frac{(Y(t,v_1))'_t}{Y(t,v_1)}\cdot\frac{I_1(t)}{I_0(t)}\left(1-H_0(\tau(t),v_1)-H_1(\tau(t),v_1)\right)-H_1(\tau(t),v_1)\left(\frac{I_1(t)p(t)}{I_0^2(t)}-1\right)=1.$$

Откуда в силу (45), (12)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(Y(t,v_1))'_t}{Y(t,v_1)}\cdot\frac{I_1(t)}{I_0(t)}=\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1} \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in V_1. \tag{50}$$

Учитывая (49), из этого соотношения находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(Y(t,v_1)\right)'_t}{Y(t,v_1)}=\pm\infty \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in V_1. \tag{51}$$

Следствием (11), (50) является предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\left(Y(t,v_1)\right)'_t}{\left(\frac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)'_tY(t,v_1)}=1 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1,v_2)\in V_0. \tag{52}$$

Из (51), (52) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)\right)'_t}{\frac{I_0(t)[1+v_2]}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}Y(t,v_1)}=\pm\infty \quad \text{равномерно по} \quad (v_1,v_2)\in V_0.$$

Тогда в силу (51), (52), последнего соотношения и условия $(RN)_1$, которому удовлетворяет функция f, имеем $\lim_{t\uparrow\omega}G(\tau(t),v_1,v_2)=1$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$, т.е. справедливо представление

$$G(\tau,v_1,v_2)=1+r_4(\tau,v_1,v_2), \tag{53}$$

где $\lim_{\tau\to+\infty}r_4(\tau,v_1,v_2)=0$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$. Используя теперь представления (47), (48), (53), а также условия (44), перепишем систему дифференциальных уравнений (43) в виде

$$\begin{cases} v_1'=\beta\big[\varepsilon_1(\tau,v_1,v_2)+v_2+\widetilde{V}_1(v_1,v_2)\big],\\ v_2'=\beta\left[\varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)-\frac{v_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}+\frac{(\sigma_1-2)v_2}{1-\sigma_0-\sigma_1}+\widetilde{V}_2(v_1,v_2)\right], \end{cases} \tag{54}$$

где

$$\varepsilon_1(\tau,v_1,v_2)=\frac{(1+v_1)(1+v_2)\left(r_0(\tau,v_1)+r_1(\tau,v_1)\right)}{1-\sigma_0-\sigma_1}+(q(\tau)-1)\,(1+v_1)\times$$
$$\times\left(\frac{(1+v_2)(1-H_0(\tau,v_1)-H_1(\tau,v_1))}{1-\sigma_0-\sigma_1}-1-H_0(\tau,v_1)\right),$$
$$\varepsilon_2(\tau,v_1,v_2)=(1+v_2)(q(\tau)-1)-\frac{(q(\tau)-1)(1+v_2)^2}{1-\sigma_0-\sigma_1}+\frac{(1+v_2)^{\sigma_1}}{(1+v_1)(1-\sigma_0-\sigma_1)}\times$$
$$\times\left\{((1+r_2(\tau,v_1))(1+r_4(\tau,v_1,v_2))-1)+r_3(\tau,v_1,v_2)(1+r_2(\tau,v_1))(1+r_4(\tau,v_1,v_2))\right\},$$
$$\widetilde{V}_1(v_1,v_2)=v_1v_2,\quad \widetilde{V}_2(v_1,v_2)=\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\left(r_5(v_1,v_2)-v_2^2\right),$$
$$r_5(v_1,v_2)=\frac{(1+v_2)^{\sigma_1}}{1+v_1}-1+v_1-\sigma_1v_2.$$

Здесь в силу (44), (47), (48) и (53) имеем $\lim_{\tau\to+\infty}\varepsilon_i(\tau,v_1,v_2)=0$ $(i\in\{1,2\})$ равномерно по $(v_1,v_2)\in V_0$. Кроме того, $\lim_{|v_1|+|v_2|\to0}\frac{\partial\widetilde{V}_i(v_1,v_2)}{\partial v_j}=0$ $(i,j\in\{1,2\})$ и характеристическое уравнение матрицы коэффициетов, стоящих при v_1,v_2 в уравнениях системы, имеет вид $\rho^2-\beta\frac{\sigma_1-2}{1-\sigma_0-\sigma_1}\rho+\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}=0$. Ввиду выполнения одного из условий (17) это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью.

Таким образом, система (54) удовлетворяет всем условиям леммы 3 из работы [15]. Согласно этой лемме у системы дифференциальных уравнений (54) существует хотя бы одно решение $(v_1,v_2)\colon[\tau_3,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(\tau_3\geq\tau_0)$, стремящееся к нулю при $\tau\to+\infty$, причем таких решений существует однопараметрическое семейство, если соблюдается неравенство $1-\sigma_0-\sigma_1<0$, и двухпараметрическое семейство, если соблюдаются неравенства $1-\sigma_0-\sigma_1>0$ и $\beta(\sigma_1-2)<0$.

Каждому такому решению в силу замен (41) соответствует решение $y\colon[t_4,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}$ $(t_4\geq t_0)$ дифференциального уравнения (1), допускающее асимптотические представления (14), (15), (16), причем в силу знака числа β и первого из знаковых условий (13) справедливо утверждение теоремы о количестве таких решений. Кроме того, из вида уравнения (1), условия (11), а также условия $(RN)_1$, которому удовлетворяет функция f, следует справедливость предельного равенства (19), т. е. найденное решение является $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решением уравнения (1). □

Доказательство следствия из теоремы 1. При установлении теоремы 1 было показано, что для существования $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений у дифференциального уравнения (1) необходимо, чтобы соблюдались условия (11)–(13) и чтобы каждое такое решение допускало асимптотические представления (15), (16). Кроме того, было показано, что для таких решений имеют место предельные соотношения (29).

Учитывая, что в соотношении (15) при $t \uparrow \omega$ ввиду (16) $\varphi_1\left(\frac{I_0(t)y(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right) = \varphi_1\left(y'(t)\right)(1+o(1))$, перепишем (15) в силу (4) при $t \uparrow \omega$ в виде

$$\frac{\mu_0|y(t)|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)^2\left|\frac{I_0(t)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)I_1(t)}\right|^{\sigma_1} I_1(t)[1+o(1)]. \tag{55}$$

Поскольку функции φ_i $(i \in \{0,1\})$ удовлетворяют условию S, то в силу предельных соотношений (16), (29) и замечания 1 функции L_i $(i \in \{0,1\})$ из формул (4) допускают при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$L_0(y(t)) = L_0\left(\mu_0|I_1(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)],\ L_1(y'(t)) = L_1\left(\mu_1|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)].$$

Используя эти представления, (55), (16), знаковые условия (13), получаем соотношения (18). □

3. Выводы. В настоящей работе изучается вопрос о существовании и асимптотике, так называемых, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (1) в случае, когда $\lambda_0 = 1$. При этом предполагалось, что правая часть дифференциального уравнения (1) на этих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решениях является эквивалентной при $t \uparrow \omega$ функции вида $\pm p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))$, где $p\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, а $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ — непрерывные и правильно меняющиеся при стремлении аргумента к Y_i $(i \in \{0,1\})$ функции порядков σ_i $(i \in \{0,1\})$ таких, что $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. Также полагали, что Y_i $(i \in \{0,1\})$ равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_{Y_i} — односторонняя окрестность Y_i. При указанных условиях получены (теорема 1) необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений дифференциального уравнения (1) и установлены неявные асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных первого порядка. Кроме того, были указаны дополнительные условия (следствие из теоремы 1), позволяющие переписать эти представления в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Seneta E. Regularly varying functions. – M.: Nauka, 1985. – 144 p. (in Russian)
2. Kiguradze I.T., Chanturia T.A. Asymtptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. – M.: Nauka, 1990. – 440 p. (in Russian)

3. Kostin A.V., Evtukhov V.M. *Asymptotics of solutions of one nonlinear differential equation*// Dokl. An SSSR. – 1976. – V.231, №5. – P. 1059–1062. (in Russian)
4. Evtukhov V.M. *On some nonlinear differential equation of the second order*// Dokl. AN SSSR. – 1977. – V.233, №4. – P. 531–534. (in Russian)
5. Evtukhov V.M. Asymptotic properties of solutions of nonatonomous differential equation of the second order of Emden-Fowler type. – Dis. ... kand. phis.-mat. nauk: 01.01.02, Odessa, 1980. – 154 p. (in Russian)
6. Evtukhov V.M. *Asymptotic representations of solutions of one class nonlinear differential equation of the second order*// Dokl. AN GSSR. – 1982. – V.106, №3. – P. 473–476. (in Russian)
7. Kostin A.V. *On asymptotics of extendible solutions equation of Emden-Fowler type*// Dokl. AN SSSR. – 1971. – V.200, №1. – P. 28–31. (in Russian)
8. Marić V., Tomić M. *Asymptotic properties of solutions of the equation* $y'' = f(x)\Phi(y)$// Mathematische Zeitschrift. – 1976. – V.149. – P. 261–266.
9. Marić V., Regular variation and differential equations. – Lecture notes in mathematics 1726. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. – 128 p.
10. Talliaferro S.D. *Asymptotic behavior of the solutions of the equation* $y'' = \Phi(t)f(y)$// SIAM J. Math. Anal. – 1981. – V.12, №6. – P. 47–59.
11. Evtukhov V.M., Belozerowa M.A. *Asymptotic representations of solutions essential nonlinear non-autonomous differential equation of the second order*// Ukr. mat. gur. – 2008. – V.60, №3. – P. 310–331. (in Russian)
12. Belozerowa M.A. *Asymptotic properties of a class of solutions of essential nonlinear differential equations of the second oder*// Mat. Stud. – 2008. – V.29, №1. – P. 52–62. (in Russian)
13. Evtukhov V.M., Belozerowa M.A. *Asymptotic representations of solutions non-autonomous differential equations of the second order with non-linearities of more general kind of Emden-Fowler non-linearity type*// Nelinijni koluvannja. – 2009. – V.12, №1. – P. 3–15. (in Russian)
14. Evtukhov V.M., Samojlenko A. *Asymptotic representations of the solutions of the nonautonomous with regurlarly varying nonlinearities*// Dif. Eq. – 2011. – V.47, №5. – P. 628–650. (in Russian)
15. Evtukhov V.M., Kusick L.I. *Asymptotic representations of solutions of one class non-linear differential equations of the second order*// Visn. Od. un-ty. Mat. i Mech. – 2009. – V.14, №20. – P. 57–74. (in Russian)

Odessa National Maritime University
ludakusik@mail.ru

Поступило 31.12.2012
После переработки 25.12.2013