УДК 517.2

В. С. Ільків

МІРА МНОЖИНИ РІВНЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ[1]

V. S. Ilkiv. *Measure of the level set for solutions of ordinary differential equations with constant coefficients*, Mat. Stud. **41** (2014), 146–156.

For a real functions $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$ such that $|L_n f(x)| \ge \delta$ on $[a,b]$, where L_n is a differential expression, namely $L_n = (d/dx + \lambda_1)\cdots(d/dx + \lambda_n)$ with real $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, we find a Lebesgue measure estimate for the level set $G_{L_n}(\varepsilon, \delta; f) = \{x \in [a,b] \colon |f(x)| < \varepsilon\}$. In particular, we establish the inequality $\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon,\delta; f) \le \min\{b-a, n\sqrt{2^{n+1}}\sqrt[n]{q_n \varepsilon/\delta}\}$, where $q_n = \prod_{r=1}^n \frac{|\lambda_r|(b-a)/2}{\operatorname{th}|\lambda_r|(b-a)/2}$.

В. С. Ильків. *Мера множества уровня решений обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №2. – С.146–156.

Для действительных функций $f \in \mathcal{C}^n[a,b]$ таких, что $|L_n f(x)| \ge \delta$ на $[a,b]$, где L_n — дифференциальное выражение $L_n(d/dx) = (d/dx + \lambda_1)\cdots(d/dx + \lambda_n)$ с действительными $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, найдена оценка меры Лебега множества уровня $G_{L_n}(\varepsilon,\delta; f) = \{x \in [a,b] \colon |f(x)| < \varepsilon\}$ функции f. В частности, установлено такое неравенство $\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon,\delta; f) \le \min\{b-a, n\sqrt{2^{n+1}}\sqrt[n]{q_n \varepsilon/\delta}\}$, где $q_n = \prod_{r=1}^n \frac{|\lambda_r|(b-a)/2}{\operatorname{th}|\lambda_r|(b-a)/2}$.

1. Вступ. Проблема оцінювання міри множини $\{x \colon |f(x)| < \varepsilon\}$ рівня $\varepsilon > 0$ гладкої функції $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де $[a,b] \subset \mathbb{R}$, часто виникає при розв'язуванні різних задач теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними ([2]–[5]), теорії функцій ([14]–[16], [18]–[20]), теорії міри та інтеграла ([17]), метричної теорії чисел ([10]–[13]).

Лише умов гладкості функції є недостатньо для встановлення змістовної оцінки цієї міри, оскільки для довільного відрізка $[a,b]$ додатної довжини у множині нескінченно диференційовних фінітних на $[a,b]$ функцій існує безліч таких, міра множини рівня ε яких набуває наперед задане значення α з відрізка $[0, b-a)$. Це, наприклад, невід'ємні функції зі значенням ε на відрізку $[a+\alpha/2, b-\alpha/2]$ і довільними меншими значеннями в інших точках відрізка $[a,b]$.

З іншого боку, для неперервно диференційовної функції f, яка на проміжку $[a,b]$ задовольняє умову $|f'(x)| \ge \delta$, для довільних точок α та β з множини рівня ε цієї функції за формулою Лаґранжа

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta - \alpha), \quad \alpha < \gamma < \beta, \quad \gamma = \gamma(\alpha, \beta),$$

отримуємо, що міра Лебега $\operatorname{meas}\{x \in [a,b] \colon |f(x)| < \varepsilon\} \le 2\varepsilon/\delta$. З формули Лагранжа також випливає, що якщо $|f'(x)| \le \delta$ на $[a,b]$ і α та β належать до замикання множини

[1] Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект №54.1/027)
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A24.
Keywords: Lebesgue measure; level sets; small denominators.

рівня $\varepsilon > 0$ і $|f(\alpha)| = |f(\beta)| = \varepsilon$, $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то справджується така ж оцінка, але знизу. Тобто, значення похідної функції f може істотно впливати на величину міри її множини рівня. Подібне стосується і похідних вищого порядку.

Нехай $\mathcal{C}_{\delta,n}[a,b]$ — підмножина функцій f з простору $\mathcal{C}^n[a,b]$ таких, що $|f^{(n)}(x)| \geq \delta$ на проміжку $[a,b]$. В [1] доведено, що

$$\sup\big\{\operatorname{meas}\{x \in [a,b]\colon |f(x)| < \varepsilon\}\colon f \in \mathcal{C}_{\delta,n}[a,b]\big\} = \min\big\{b-a, 4\sqrt[n]{n!/2}\cdot\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оцінку

$$\operatorname{meas}\{x \in [a,b]\colon |f(x)| < \varepsilon\} < C_n\sqrt[n]{\varepsilon/\delta} \tag{1}$$

вперше встановлено у відомій лемі Пяртлі з [4] для функцій $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b] \cap \mathcal{C}_{\delta,n}[a,b]$ і досить малих додатних чисел ε зі сталою $C_n = \sqrt[n]{2}(2n+1)(2^n-2)$. В [5] послаблено умови гладкості функції f і знято обмеження на ε. У подальшому значення сталої C_n неоднаразово уточнювалось ([6]–[13], [21]). Отримане при цьому в [8] найменше значення сталої $C_n = 2n$ мало відрізняється від точного значення $4\sqrt[n]{n!/2}$.

Лема Пяртлі є подібною до леми Картана ([14, 15, 20, 18, 19]), яка встановлює оцінку міри множини рівня для многочленів степеня n на комплексній площині; вказана множина обмежена лемніскатою і називається лемніскатною областю ([14, с. 267–276]). Ця оцінка застосовується при дослідженні властивостей цілих і мероморфних функцій ([14]–[16], [19, 20]), в теорії міри ([17]), де виникають виняткові множини. Такі множини часто мають фрактальну природу і їхня величина оцінюється також розмірністю Хаусдорфа ([22, с. 11]).

Подальші узагальнення леми Пяртлі стосуються перенесення результату на класи функцій та вектор-функцій від багатьох змінних ([7], [9]–[13]) за умови, що деяка похідна, або похідні відмінні від нуля на відрізку $[a,b]$, та для класів функцій, дія диференціального виразу на які не перетворюється в нуль на цьому ж відрізку. Зокрема, для функції f, що задовольняє на відрізку $[a,b]$ умову $|L_n(d/dx)f(x)| \geq \delta$, в [9] доведено таку нерівність

$$\operatorname{meas}\{x \in [a,b]\colon |f(x)| < \varepsilon\} \leq \min\Big\{b-a,\, n\sqrt{2^{n+1}}e^{(b-a)\overline{\lambda}}\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\Big\}, \tag{2}$$

де $L_n(\lambda) = (\lambda+\lambda_1)\cdots(\lambda+\lambda_n)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ — різні дійсні числа, а $\overline{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|$.

Подібні оцінки встановлено в [9] для многочлена L_n з дійсними кратними коренями та диференціальних виразів зі змінними коефіцієнтами

$$L_n\Big(\frac{d}{dx}\Big) = \Big(\frac{d}{dx} + u_1(x)\Big)^{n_1}\cdots\Big(\frac{d}{dx} + u_k(x)\Big)^{n_k},$$

де $n_1 + \dots + n_k = n$, $u_1,\dots,u_k$ — дійсні функції на $[a,b]$.

У даній статті доведемо нерівність, яка істотно покращує оцінку (2), а при $n = 1$ перетворюється у точну рівність.

2. Позначення. Нехай $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ — дійсні числа, при цьому $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Для $j \in \{1,\dots,n\}$ позначимо

$$L_j(-\lambda) = (\lambda_j - \lambda)\cdots(\lambda_1 - \lambda), \quad L_{(j)}(-\lambda) = (\lambda_j - \lambda), \tag{3}$$

$$g_j(x) = L_j\Big(\frac{d}{dx}\Big)f(x), \quad g_{(j)}(x) = L_{(j)}\Big(\frac{d}{dx}\Big)f(x). \tag{4}$$

Нехай $\mathcal{C}_{\delta,M}(S)$ множина функцій $f \in \mathcal{C}^m[a,b]$, що задовольняють умову

$$\Big|M\Big(\frac{d}{dx}\Big)f(x)\Big| \geq \delta, \quad x \in S,$$

де $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $S \subset [a,b]$, $M = M(\frac{d}{dx})$ — диференціальний вираз степеня m.

Розглядаємо задачу встановлення оцінки зверху величини міри множини

$$G_{L_n}(\varepsilon, \delta; f) := \{x \in [a,b] \colon |f(x)| < \varepsilon\}. \tag{5}$$

рівня $\varepsilon > 0$ функції $f \in \mathcal{C}_{\delta,L_n}[a,b]$. Зауважимо, що якщо $f \in \mathcal{C}_{\delta,L_n}[a,b]$, то $g_n(x) \neq 0$ на $[a,b]$, $(-f) \in \mathcal{C}_{\delta,L_n}[a,b]$ і $G_{L_n}(\varepsilon,\delta;-f) = G_{L_n}(\varepsilon,\delta;f)$. Тому, не зменшуючи загальності міркувань, в задачі, що розглядається, досить лише розглянути випадок, коли замість умови $|L_n(\frac{d}{dx})f(x)| \geq \delta$ на функцію $f \in \mathcal{C}_{\delta,L_n}[a,b]$ накладено умову

$$L_n\Big(\frac{d}{dx}\Big)f(x) \geq \delta, \quad x \in [a,b]. \tag{6}$$

3. Основний результат. Додатну парну функцію q від дійсного аргумента λ і невід'ємні числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ задамо формулами

$$q(\lambda) = \frac{\xi(\lambda)}{\operatorname{th}\xi(\lambda)}, \quad q(0) = 1, \quad \xi_1 = \xi(\lambda_1),\ \ldots,\ \xi_n = \xi(\lambda_n), \tag{7}$$

де $\xi(\lambda) = |\lambda|(b-a)/2$, а числа $q_0, q_1, \ldots, q_n$ і $q_1^*, \ldots, q_n^*$ визначимо так:

$$q_1 = q(\lambda_1), \quad q_j = q_{j-1}q(\lambda_j) = q(\lambda_1)\cdots q(\lambda_j), \quad j \in \{2,\ldots,n\},$$
$$q_0 = \frac{\sqrt{2^{1-n}}\,\sqrt[n]{q_n}}{b-a}, \quad q_r^* = \frac{\sqrt{2^{1-n}}\,\sqrt[n]{q_n/q(\lambda_r)}}{b-a} = q_0/\sqrt[n]{q(\lambda_r)}, \quad r \in \{1,\ldots,n\}.$$

Нескладно переконатись, що

$$x < x/\operatorname{th}x < x+1 \quad (x > 0),$$

при цьому пряма $y = x$ є асимптотою для графіка функції $y = x/\operatorname{th}x$.

Основний результат статті сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема 1. *Нехай $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Якщо $\lambda_n \neq 0$, то для довільної функції $f \in \mathcal{C}_{\delta,L_n}[a,b]$ справджується нерівність*

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon,\delta;f) \leq \min\big\{b-a,\ F_n(\varepsilon/\delta,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\big\} = \begin{cases} F_n(\varepsilon/\delta,\lambda_1,\ldots,\lambda_n), & \varepsilon < \varepsilon_n, \\ b-a, & \varepsilon \geq \varepsilon_n, \end{cases} \tag{8}$$

де

$$F_n(\alpha,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = 2^n(b-a)\min_{\pi\in\Pi_n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r\xi_{\pi_r}}\operatorname{arth}\big(2^r q_0\sqrt[n]{\alpha}\ \operatorname{th}\xi_{\pi_r}\big), \tag{9}$$

$\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$ — перестановка чисел $(1,\ldots,n)$, Π_n — множина всіх таких перестановок, а $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\delta,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ — корінь рівняння

$$F_n(\varepsilon_n/\delta,\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = b-a. \tag{10}$$

Зауваження 1. Кожен доданок $\frac{1}{2^r \xi_{\pi_r}} \operatorname{arth}\big(2^r q_0 \sqrt[n]{\alpha}\, \operatorname{th} \xi_{\pi_r}\big)$ у формулі (9) є неперервною парною функцією за змінною ξ_{π_r} з граничним значенням $q^*_{\pi_r}\sqrt[n]{\alpha}$ у точці $\xi_{\pi_r} = 0$. Тому, якщо $|\lambda_\nu| > 0 = \lambda_{\nu+1}$ для деякого $1 \le \nu \le n-1$, то $q_0 = \frac{\sqrt{2^{1-n}}\,\sqrt[n]{q_\nu}}{b-a}$,

$$F_n(\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = F_n(\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, 0, \ldots, 0) = \sqrt{2^{n+1}}(n-\nu)\sqrt[n]{q_\nu \alpha} + \\ + 2^n(b-a) \min_{\pi \in \Pi_\nu} \sum_{r=1}^{\nu} \frac{1}{2^r \xi_{\pi_r}} \operatorname{arth}\big(2^r q_0 \sqrt[n]{\alpha}\, \operatorname{th} \xi_{\pi_r}\big),$$

зокрема, $F_n(\alpha, \lambda_1, 0, \ldots, 0) = \sqrt{2^{n+1}}(n-1)\sqrt[n]{q_1\alpha} + \frac{2^n}{|\lambda_1|} \operatorname{arth}\big(2q_0 \sqrt[n]{\alpha}\, \operatorname{th} \xi_1\big)$, і

$$F_n(\alpha, 0, \ldots, 0) = n\sqrt{2^{n+1}}\sqrt[n]{\alpha}, \quad \varepsilon_n(\delta, 0, \ldots, 0) = \frac{\delta}{\sqrt{2^{n+1}}}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^n.$$

4. Доведення основного результату. Для доведення теореми 1 використаємо наступне твердження, яке встановлює точне значення максимальної величини міри множини $G_{L_1}(\varepsilon, \delta; f)$ для функцій $f \in \mathcal{C}_{\delta, L_1}[a, b]$.

Теорема 2. *Для довільних $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$ справджується рівність*

$$\sup\Big\{\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon, \delta; f)\colon f \in \mathcal{C}_{\delta, L_1}[a, b]\Big\} = \min\Big\{b-a,\, \frac{2}{|\lambda_1|} \operatorname{arth} \frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta}\Big\}, \tag{11}$$

зокрема для $\lambda_1 = 0$ права частина рівності дорівнює відповідному граничному (при $\lambda_1 \to 0$) значенню $\min\{b-a,\, 2\varepsilon/\delta\}$.

Доведення. Нехай $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{1, \widetilde{L}_1}[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$, де $\widetilde{L}_1\Big(\frac{d}{dy}\Big) = \frac{d}{dy} + \widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{b} > \widetilde{a}$, а $y_1 = \inf G_{\widetilde{L}_1}(1, 1; \widetilde{f})$ і $y_2 = \sup G_{\widetilde{L}_1}(1, 1; \widetilde{f})$ — інфімум та супремум множини $G_{\widetilde{L}_1}(1, 1; \widetilde{f})$. Тоді, за формулою (5) маємо $|\widetilde{f}(y_j)| \le 1$ для $j \in \{1, 2\}$. З формули (6) та рівностей

$$\widetilde{g}_1(y) \equiv \widetilde{L}_1\Big(\frac{d}{dy}\Big)\widetilde{f}(y) = \widetilde{f}'(y) + \widetilde{\lambda}_1 \widetilde{f}(y) = e^{-\widetilde{\lambda}_1 y}\big(e^{\widetilde{\lambda}_1 y}\widetilde{f}(y)\big)'$$

при $\widetilde{\lambda}_1 \ne 0$ випливають співвідношення

$$0 < \frac{e^{\widetilde{\lambda}_1 y_2} - e^{\widetilde{\lambda}_1 y_1}}{\widetilde{\lambda}_1} = \int_{y_1}^{y_2} e^{\widetilde{\lambda}_1 y}\, dy \le \int_{y_1}^{y_2} e^{\widetilde{\lambda}_1 y}\widetilde{g}_1(y)\, dy = e^{\widetilde{\lambda}_1 y_2}\widetilde{f}(y_2) - e^{\widetilde{\lambda}_1 y_1}\widetilde{f}(y_1) < e^{\widetilde{\lambda}_1 y_2} + e^{\widetilde{\lambda}_1 y_1},$$

а при $\widetilde{\lambda}_1 = 0$ нерівність $y_2 - y_1 < 2$. Звідси отримуємо нерівність $\operatorname{th} \frac{(y_2 - y_1)|\widetilde{\lambda}_1|}{2} < |\widetilde{\lambda}_1|$ і, за умови $|\widetilde{\lambda}_1| < 1$, оцінку $\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_1}(1, 1; \widetilde{f}) \le y_2 - y_1 < \frac{2}{|\widetilde{\lambda}_1|} \operatorname{arth} |\widetilde{\lambda}_1|$, права частина якої прямує до 2 при $|\widetilde{\lambda}_1| \to 0$ і необмежено зростає при $|\widetilde{\lambda}_1| \to 1$. Отже, доведено нерівність

$$\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_1}(1, 1; \widetilde{f}) \le \min\left\{\widetilde{b} - \widetilde{a},\, \frac{2}{|\widetilde{\lambda}_1|} \operatorname{arth} |\widetilde{\lambda}_1|\right\}. \tag{12}$$

Побудуємо функції, для яких нерівність (12) перетворюється в рівність. У випадку $\widetilde{\lambda}_1 > 0$ розглянемо функцію

$$\widetilde{f}_{13}(y) = 1/\widetilde{\lambda}_1 - \big(1 + 1/\widetilde{\lambda}_1\big)e^{\widetilde{\lambda}_1(\widetilde{a} - y)}, \tag{13}$$

для якої $\widetilde{f}_{13}(\widetilde{a}) = -1$ і $\widetilde{f}_{13}(y) = 1$ у точці $y = \widetilde{a} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1}\ln\frac{1-\widetilde{\lambda}_1}{1+\widetilde{\lambda}_1} = \widetilde{a} + \frac{2}{\widetilde{\lambda}_1}\operatorname{arth}\widetilde{\lambda}_1$.

Функція (13) монотонно зростає ($\widetilde{f}'_{13}(y) = (\widetilde{\lambda}_1 + 1)e^{\widetilde{\lambda}_1(\widetilde{a}-y)} > 0$ на $\mathbb{R}$) та є розв'язком рівняння $\widetilde{L}_1(\frac{d}{dy})\widetilde{f}_{13}(y) = 1$, тобто, $\widetilde{f}_{13} \in \mathcal{C}_{1,\widetilde{L}_1}[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ і для міри $\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_1}(1,1;\widetilde{f}_{13})$ нестрога нерівність (12) справджується як рівність.

Якщо ж $\widetilde{\lambda}_1 < 0$, то використовуємо функцію

$$\widetilde{f}_{14}(y) = 1/\widetilde{\lambda}_1 + \big(1 - 1/\widetilde{\lambda}_1\big)e^{\widetilde{\lambda}_1(\widetilde{b}-y)}. \tag{14}$$

Вона також монотонно зростає ($\widetilde{f}'_{14}(y) = (1-\widetilde{\lambda}_1)e^{\widetilde{\lambda}_1(\widetilde{b}-y)} > 0$ на $\mathbb{R}$), є розв'язком диференціального рівняння $\widetilde{L}_1(\frac{d}{dy})\widetilde{f}_{14}(y) = 1$, $\widetilde{f}_{14}(\widetilde{b}) = 1$ і $\widetilde{f}_{14}(y) = -1$ у точці $y = \widetilde{b} - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_1}\ln\frac{1+\widetilde{\lambda}_1}{1-\widetilde{\lambda}_1} = \widetilde{b} - \frac{2}{\widetilde{\lambda}_1}\operatorname{arth}\widetilde{\lambda}_1$. Тому, $\widetilde{f}_{14} \in \mathcal{C}_{1,\widetilde{L}_1}[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ і в (12) маємо рівність.

У випадку $\widetilde{\lambda}_1 = 0$ екстремальні властивості мають, наприклад, функції $\widetilde{f}_{15}$, які отримуються граничним переходом з функцій $\widetilde{f}_{13}$ та $\widetilde{f}_{14}$, відповідно, при $\widetilde{\lambda}_1 \to 0$:

$$\widetilde{f}_{15}(y) = y - \widetilde{a} - 1, \quad \widetilde{f}_{15}(y) = y - \widetilde{b} + 1. \tag{15}$$

При цьому $\widetilde{L}_1(\frac{d}{dy})\widetilde{f}_{15}(y) = 1$, $\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_1}(1,1;\widetilde{f}_{15}) = \min\{\widetilde{b} - \widetilde{a}, 2\}$, $\widetilde{f}_{15}(\widetilde{a}) = -1$, $\widetilde{f}_{15}(\widetilde{b}) = 1$, відповідно.

Теорему 2 доведено для $\varepsilon = \delta = 1$ і довільного відрізка $[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ та $\widetilde{\lambda}_1$. Доведення теореми 2 для довільних значень $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$ отримуємо за допомогою такої леми.

Лема 1. *Нехай* $f \in \mathcal{C}_{\delta,L_n}[a,b]$, $\widetilde{f}(y) = \frac{1}{\varepsilon}f\big(y\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\,\big)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, *а змінну* y *та сталі* $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{\lambda}_1,\dots,\widetilde{\lambda}_n$ *визначає така система рівностей* $\frac{y}{x} = \frac{\widetilde{a}}{a} = \frac{\widetilde{b}}{b} = \frac{\lambda_1}{\widetilde{\lambda}_1} = \dots = \frac{\lambda_n}{\widetilde{\lambda}_n} = \sqrt[n]{\delta/\varepsilon}$. *Якщо* $\widetilde{L}_n(\frac{d}{dy}) = (\frac{d}{dy} + \widetilde{\lambda}_1)\cdots(\frac{d}{dy} + \widetilde{\lambda}_n)$, *то* $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{1,\widetilde{L}_n}[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ *і*

$$\operatorname{meas} G_{L_n}(\varepsilon,\delta;f) = \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\cdot\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_n}(1,1;\widetilde{f}). \tag{16}$$

Доведення леми 1. При відображенні $x \mapsto y = x\sqrt[n]{\delta/\varepsilon}$, яке є бієктивним, довжина кожного відрізка домножується на число $\sqrt[n]{\delta/\varepsilon}$. Якщо $\widehat{x} \in G_{L_n}(\varepsilon,\delta;f)$, то $\widehat{y} = \widehat{x}\sqrt[n]{\delta/\varepsilon} \in [\widetilde{a},\widetilde{b}]$ і

$$|\widetilde{f}(\widehat{y})| = \frac{1}{\varepsilon}\big|f\big(\widehat{y}\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\,\big)\big| = \frac{1}{\varepsilon}\big|f\big(\widehat{x}\big)\big| \le 1.$$

Якщо $L_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=1}^n \varphi_j\lambda^{n-j}$, то $\widetilde{L}_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=1}^n(\varepsilon/\delta)^{j/n}\varphi_j\lambda^{n-j}$ і з рівностей $\frac{d^j\widetilde{f}(y)}{dy^j} = \frac{1}{\varepsilon}(\frac{\varepsilon}{\delta})^{j/n}f^{(n)}\big(y\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\,\big)$, де $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$, випливає, що

$$\Big|\widetilde{L}_n\Big(\frac{d}{dy}\Big)\widetilde{f}(y)\Big| = \Big|\widetilde{f}^{(n)}(y) + \sum_{j=1}^n\Big(\frac{\varepsilon}{\delta}\Big)^{j/n}\varphi_j\widetilde{f}^{(n-j)}(y)\Big| = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{\delta}\Big|L_n\Big(\frac{d}{dy}\Big)f(y)\Big| \ge \frac{1}{\delta}\cdot\delta = 1,$$

тобто, $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{1,\widetilde{L}_n}[\widetilde{a},\widetilde{b}]$ і $\widehat{y} \in G_{\widetilde{L}_n}(1,1;\widetilde{f})$. □

З формули (16) для $n = 1$ та $\widetilde{f}(y) = \frac{1}{\varepsilon}f(y\varepsilon/\delta)$ і формули (12) маємо

$$\operatorname{meas} G_{L_1}(\varepsilon,\delta;f) = \frac{\varepsilon}{\delta}\ \operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_1}(1,1;\widetilde{f}) \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{\delta}\min\left\{\widetilde{b} - \widetilde{a}, \frac{2}{|\widetilde{\lambda}_1|}\operatorname{arth}|\widetilde{\lambda}_1|\right\} = \min\left\{b - a, \frac{2}{|\lambda_1|}\operatorname{arth}\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta}\right\}.$$

Рівність у формулі (11) досягається на функціях $f_\alpha(x) = \varepsilon \widetilde{f}_\alpha(x\delta/\varepsilon)$, де залежно від знаку числа λ_1 індекс α дорівнює 13, 14 або 15. $\square$

Для доведення теореми 1 тепер достатньо розглянути лише значення $\varepsilon = 1$ і $\delta = 1$, функцію $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{1,\widetilde{L}_n}[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ і оператор $\widetilde{L}_n$ з леми 1.

Доведення теореми 1. Якщо $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{1,\widetilde{L}_n}[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$, $\lambda_n \neq 0$ і

$$\widetilde{g}_n = \widetilde{L}_n(d/dx)\widetilde{f} = \widetilde{L}_{(n)}(d/dx)\widetilde{L}_{n-1}(d/dx)\widetilde{f} = \widetilde{L}_{(n)}(d/dx)\widetilde{g}_{n-1},$$

то $\widetilde{\lambda}_n \neq 0$ і функція $\widetilde{g}_{n-1}$ належить до множини $\mathcal{C}_{1,\widetilde{L}_{(n)}}[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$. Таку властивість використовуємо далі у доведенні теореми.

Для цього поділимо відрізок $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ на $2^{n+1} - 1$ частин — не більше, ніж 2^n, замкнених і не більше, ніж $2^n - 1$, відкритих проміжків ненульової довжини, або одноточкових чи порожніх множин. Інтервали (чи, відповідно, порожні множини) позначаємо I_α^β, де $\alpha \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, а $\beta \in \{1, \ldots, 2^{n-\alpha-1}\}$, і вибираємо їх, виконуючи n кроків і вводячи $n-1$ додатних параметрів $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

На першому кроці вибираємо множину I_{n-1}^1. Нехай $I_{n-1}^1 = I_{n-1}^1(\sigma_{n-1})$ — опукла оболонка множини тих $x \in [\widetilde{a}, \widetilde{b}]$, що $|\widetilde{g}_{n-1}(x)| < \sigma_{n-1}$, де σ_{n-1} — додатний параметр, значення якого буде вибрано далі. Отже, I_{n-1}^1 є або інтервалом, на кінцях якого $\widetilde{g}_{n-1}$ не перевищує σ_{n-1}, або порожньою множиною. У залежності від σ_{n-1} множина $[\widetilde{a}, \widetilde{b}] \setminus I_{n-1}^1$ є диз'юнктним об'єднанням двох замкнених проміжків додатної довжини (лівого J_{n-1}^1 і правого J_{n-1}^2), якщо I_{n-1}^1 — проміжок, що не має спільних кінців з проміжком $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$, в іншому випадку одна з множин J_{n-1}^1 та J_{n-1}^2, або обидві множини є порожніми чи одноточковими множинами. Якщо J_{n-1}^r — проміжок, де $r \in \{1, 2\}$, то $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\sigma_{n-1},\widetilde{L}_{n-1}}(J_{n-1}^r)$.

Перший крок можна зобразити (рис. 1) у вигляді бінарного графа (дерева) і списку з трьох вершин J_{n-1}^1, I_{n-1}^1 та J_{n-1}^2, отриманого обходом графа зліва направо (*inorder*), які (знову зліва направо) зображають порядок поділу відрізка $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ на три частини.

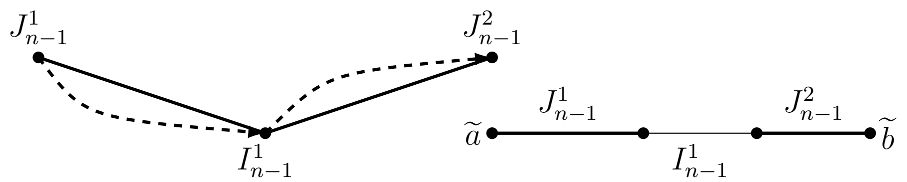

Рис. 1: Граф і поділ відрізка $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ на першому кроці.

На другому кроці поділимо на три частини кожну з двох множин J_{n-1}^1 та J_{n-1}^2, зокрема, частини J_{n-2}^1, I_{n-2}^1, J_{n-2}^2 і J_{n-2}^3, I_{n-2}^2, J_{n-2}^4, де $I_{n-2}^r = I_{n-2}^r(\sigma_{n-1})$ для $r \in \{1, 2\}$ є опуклою оболонкою множини тих $x \in J_{n-1}^r$, що $|\widetilde{g}_{n-2}(x)| < \sigma_{n-2}$, тобто інтервалом, на кінцях якого $|\widetilde{g}_{n-2}|$ не перевищує σ_{n-2}, або порожньою чи одноточковою множиною. За побудовою $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\sigma_{n-2},\widetilde{L}_{n-2}}(J_{n-2}^r)$ для $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Перші два кроки зобразимо у вигляді графа на рис. 2.

На кроці з номером j поділимо кожну з множин J_{n-j+1}^r, де $r \in \{1, \ldots, 2^{j-1}\}$, на три частини J_{n-j}^{2r-1}, I_{n-j}^r, J_{n-j}^{2r}, де $I_{n-j}^r = I_{n-j}^r(\sigma_{n-j})$, при цьому множина I_{n-j}^r є опуклою оболонкою тих $x \in J_{n-j+1}^r$, що $|\widetilde{g}_{n-j}(x)| < \sigma_{n-j}$, а σ_{n-j} — додатний параметр. Тобто, I_{n-j}^r або інтервал зі значеннями функції $|\widetilde{g}_{n-j}(x)|$ на кінцях не більшими від σ_{n-j}, або

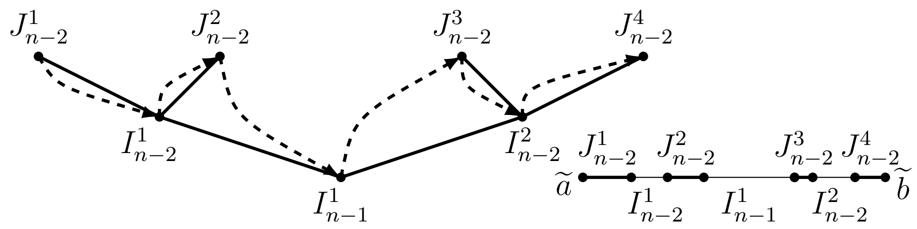

Рис. 2: Граф і поділ відрізка $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ на другому кроці.

порожня чи одноточкова множина. Аналогічно до попереднього, на проміжках J^r_{n-j}, де $r \in \{1, \ldots, 2^j\}$, виконується умова $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\sigma_{n-j}, \widetilde{L}_{n-j}}(J^r_{n-j})$.

У результаті j кроків отримуємо бінарний граф з $2^{j+1} - 1$ вершиною, зокрема такий граф для $j = 3$ зображено на рис. 3.

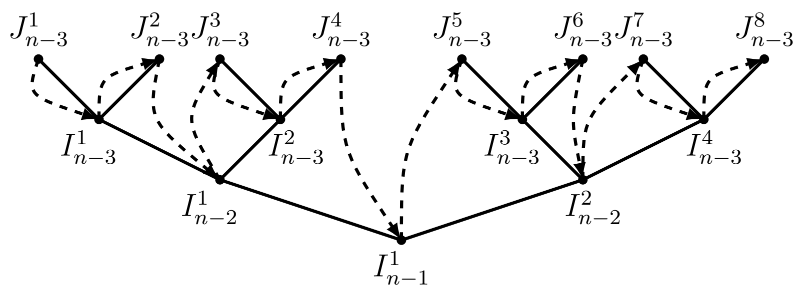

Рис. 3: Граф на третьому кроці — бінарне дерево з 15-ма вершинами. Обхід вершин за штриховими стрілками.

Для отримання послідовного (зліва направо) розташування отриманих частин розбиття відрізка $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ здійснюємо обхід відповідного графа зліва направо.

На n-му кроці отримуємо 2^{n-1} множин $I^r_0 = I^r_0(\sigma_0)$ і на кінцях інтервалів I^r_0 функція $|\widetilde{f}|$ не перевищує σ_0, а також $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\sigma_0, \widetilde{L}_0}(J^r_0)$, де $\widetilde{L}_0$ — одиничний оператор. Тому, вибираючи $\sigma_0 = 1$, маємо 2^n множин J^r_0, де $r \in \{1, \ldots, 2^n\}$, які не перетинаються (мають порожній перетин) з множиною $G_{\widetilde{L}_n}(1, 1; \widetilde{f})$.

Звідси отримуємо рівність

$$G_{\widetilde{L}_n}(1, 1; \widetilde{f}) = \bigsqcup_{\alpha=0}^{n-1} \bigsqcup_{\beta=1}^{2^{n-\alpha-1}} \big(G_{\widetilde{L}_n}(1, 1; \widetilde{f}) \cap I^\beta_\alpha\big),$$

де знак $\bigsqcup$ позначає диз'юнктне об'єднання множин, і, отже, рівність мір

$$\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_n}(1, 1; \widetilde{f}) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{2^{n-\alpha-1}} \operatorname{meas} \big(G_{\widetilde{L}_n}(1, 1; \widetilde{f}) \cap I^\beta_\alpha\big).$$

Оцінюючи зверху, перейдемо до нерівності

$$\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_n}(1, 1; \widetilde{f}) \le \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sum_{\beta=1}^{2^{n-\alpha-1}} \operatorname{meas} I^\beta_\alpha. \tag{17}$$

Кожна з множин I_α^β має нульову міру, або є інтервалом, на кінцях якого $|\widetilde{g}_\alpha|$ не перевищує σ_α, і $\widetilde{g}_\alpha \in \mathcal{C}_{\sigma_{\alpha+1},\widetilde{L}_{(\alpha+1)}}(I_\alpha^\beta)$ для всіх $\beta \in \{1,\dots,2^{n-\alpha-1}\}$, де вибираємо $\sigma_n = 1$. За теоремою 2 для всіх множин I_α^β з формули (17) отримаємо оцінку

$$\operatorname{meas} I_\alpha^\beta \le \operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_{(\alpha+1)}}(\sigma_\alpha,\sigma_{\alpha+1};\widetilde{g}_\alpha) \le \min\left\{\widetilde{b}-\widetilde{a}, \frac{2}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}\frac{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}}\right\}. \tag{18}$$

Нерівності (17) і (18) гарантують нерівність

$$\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_n}(1,1;\widetilde{f}) \le \min\left\{\widetilde{b}-\widetilde{a}, \sum_{\alpha=0}^{n-1}\frac{2^{n-\alpha}}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}\frac{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}}\right\}$$

для всіх векторів $\vec{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$ з додатними компонентами, де $\sigma_0 = \sigma_n = 1$, з якої випливає оцінка

$$\operatorname{meas} G_{\widetilde{L}_n}(1,1;\widetilde{f}) \le \min\left\{\widetilde{b}-\widetilde{a}, \inf_{\vec{\sigma}>0}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\frac{2^{n-\alpha}}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}\frac{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}}\right\}. \tag{19}$$

На інтервалі $(0, \frac{1}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{th}\xi(\lambda_{\alpha+1}))$ змінної τ функція $\frac{1}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\tau$ монотонно зростає від 0 до $(\widetilde{b}-\widetilde{a})/2$, а функція $q(\lambda_{\alpha+1})\tau - \frac{1}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\tau$ є додатною і перетворюється в нуль на кінцях інтервалу, тому, для додатних σ_α і $\sigma_{\alpha+1}$ можна написати нерівність

$$\frac{2^{n-\alpha}}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}\frac{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}} \le 2^{n-\alpha}q(\lambda_{\alpha+1})\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}}, \quad \alpha \in \{0,1,\dots,n-1\},$$

з якої випливає така оцінка

$$\begin{aligned}\inf_{\vec{\sigma}>0}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\frac{2^{n-\alpha}}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}\frac{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}} &\le \sum_{\alpha=0}^{n-1}\frac{2^{n-\alpha}}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}\frac{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\sigma_\alpha^*}{\sigma_{\alpha+1}^*} \le \\ &\le \sum_{\alpha=0}^{n-1}2^{n-\alpha}q(\lambda_{\alpha+1})\frac{\sigma_\alpha^*}{\sigma_{\alpha+1}^*} = \inf_{\vec{\sigma}>0}\sum_{\alpha=0}^{n-1}2^{n-\alpha}q(\lambda_{\alpha+1})\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}}.\end{aligned} \tag{20}$$

Для знаходження точки $\vec{\sigma}^* = (\sigma_1^*,\dots,\sigma_{n-1}^*)$ інфімуму у формулі (20) перейдемо до вектора нових додатних змінних $\vec{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_{n-1})$ покладаючи $\gamma_1 = 2q(\lambda_n)\sigma_{n-1}$, $\gamma_\alpha = 2^\alpha q(\lambda_{n-\alpha+1})\frac{\sigma_{n-\alpha}}{\sigma_{n-\alpha+1}}$, $\alpha \in \{2,\dots,n-1\}$. Тоді для $\alpha \in \{1,\dots,n-1\}$ справджуються рівності

$$\sigma_{n-\alpha} = \frac{\gamma_\alpha}{2^\alpha q(\lambda_{n-\alpha+1})}\sigma_{n-\alpha+1} = \frac{\gamma_1\cdots\gamma_\alpha}{\sqrt{2^{(\alpha+1)\alpha}}\,q(\lambda_{n-\alpha+1})\cdots q(\lambda_n)},$$

зокрема, $\sigma_1 = \frac{\gamma_1\cdots\gamma_{n-1}q_1}{\sqrt{2^{(n-1)n}}\,q_n}$, і рівність

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}2^{n-\alpha}q(\lambda_{\alpha+1})\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_{\alpha+1}} = \gamma_1+\dots+\gamma_{n-1}+\frac{\sqrt{2^{(n+1)n}}\,q_n}{\gamma_1\cdots\gamma_{n-1}}.$$

Далі використаємо таку лему (лема 1 з [7]).

Лема 2. *Нехай* $\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1}$ — *додатні змінні,* $M>0$, $p=p_1+\dots+p_r$, $r,p_1,\dots,p_r$ — *натуральні числа. Тоді функція змінної* $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1})$

$$R(\vec{\gamma})=p_1\gamma_1+\dots+p_{r-1}\gamma_{r-1}+p_rT(\vec{\gamma}),$$

де $T(\vec{\gamma})=\sqrt[p_r]{M/\gamma_1^{p_1}\dots\gamma_{r-1}^{p_{r-1}}}$, *набуває в точці* $\vec{\gamma}^*=(\gamma_*,\dots,\gamma_*)$, $\gamma_*=\sqrt[p]{M}$, *свого єдиного мінімального значення* $R(\vec{\gamma}^*)=p\gamma_*=p\sqrt[p]{M}$.

Тоді, з леми 2, де $p=n$, $M=\sqrt{2^{(n+1)n}}\,q_n$ і $p_1=\dots=p_n=1$, випливає формула для $\vec{\gamma}^*=(\gamma_1^*,\dots,\gamma_{n-1}^*)$:

$$\inf_{\vec{\gamma}>0}\left\{\gamma_1+\dots+\gamma_{n-1}+\frac{\sqrt{2^{(n+1)n}}\,q_n}{\gamma_1\cdots\gamma_{n-1}}\right\}=n\sqrt{2^{n+1}}\sqrt[n]{q_n}=n\gamma_1^*=\dots=n\gamma_{n-1}^*. \tag{21}$$

З формул, які пов'язують вектори $\vec{\sigma}$ і $\vec{\gamma}$, для $\alpha=0,1,\dots,n-1$ маємо рівності

$$\frac{\sigma_\alpha^*}{\sigma_{\alpha+1}^*}=\frac{\gamma_{n-\alpha}^*}{2^{n-\alpha}q(\lambda_{\alpha+1})}=\frac{\sqrt{2^{n+1}}\sqrt[n]{q_n}}{2^{n-\alpha}q(\lambda_{\alpha+1})}=\frac{2^{\alpha+1}q_0}{\sqrt{2^{n-1}}|\lambda_{\alpha+1}|}\operatorname{th}\xi_{\alpha+1},$$

як і рівність

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1}\frac{2^{n-\alpha}}{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|}\operatorname{arth}\frac{|\widetilde{\lambda}_{\alpha+1}|\sigma_\alpha^*}{\sigma_{\alpha+1}^*}=2^n(\widetilde{b}-\widetilde{a})\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r\xi_r}\operatorname{arth}\left(2^rq_0\sqrt[n]{\varepsilon/\delta}\,\operatorname{th}\xi_r\right).$$

Тепер за допомогою леми 1 з оцінки (19) міри множини $G_{\widetilde{L}_n}(1,1;\widetilde{f})$ і формули (20) маємо

$$\begin{aligned}\operatorname{meas}G_{\widetilde{L}_n}(\varepsilon;\delta,f)&=\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\operatorname{meas}G_{\widetilde{L}_n}(1,1;\widetilde{f})\le\\ &\le\min\left\{b-a,\,2^n(b-a)\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r\xi_r}\operatorname{arth}\left(2^rq_0\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}\,\operatorname{th}\xi_r\right)\right\}.\end{aligned}$$

Така ж нерівність справджується і для кожної перестановки чисел $\xi_1,\dots,\xi_n$.

З формул (19)–(21) встановлюємо дещо слабшу, ніж (8) оцінку

$$\operatorname{meas}G_{\widetilde{L}_n}(\varepsilon,\delta,f)\le\min\left\{b-a,\,n\sqrt{2^{n+1}}\sqrt[n]{q_n\frac{\varepsilon}{\delta}}\right\}. \tag{22}$$

Теорему 1 доведено. □

5. Порівняння результатів. У доведенні основної теореми 1 встановлено, що функція $F_n(\alpha,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ не перевищує величини $n\sqrt{2^{n+1}}\sqrt[n]{q_n\alpha}$, яка є меншою за величину $n\sqrt{2^{n+1}}e^{(b-a)\overline{\lambda}}\sqrt[n]{\alpha}$. Останнє випливає з нерівностей $e^{2x}>e^x>1+x>x/\operatorname{th}x$ $(x>0)$, власне,

$$e^{(b-a)\overline{\lambda}}=\prod_{j=1}^{n}e^{2\xi_j/n}>\prod_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\xi_j/\operatorname{th}\xi_j}=\prod_{j=1}^{n}\sqrt[n]{q(\lambda_j)}=\sqrt[n]{q_n}.$$

На рисунку 4 для випадку $n=2$, зокрема, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1/2$, $b-a=11$, подано графіки правих частин нерівностей (2) і (22), причому перший графік зі зменшеною

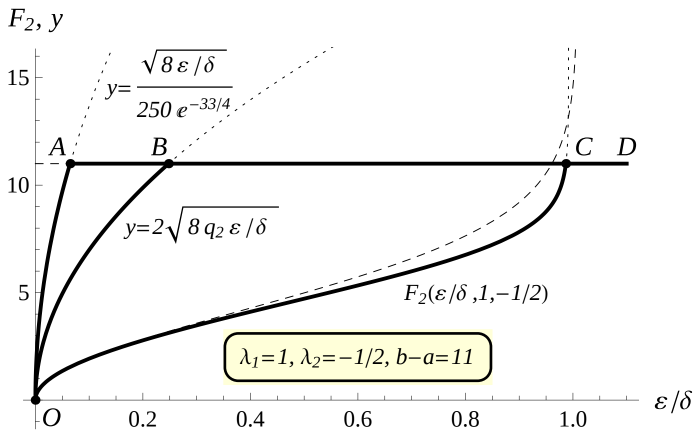

Рис. 4: Графік правої частини нерівності (2) — дуга OAD, нерівності (22) — дуга OBD, нерівності (8) — дуга OCD для $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1/2$, $b-a = 11$. Криволінійні частини OA, OB і OC цих ліній продовжено вище рівня $b - a = 11$ пунктирними дугами.

у 500 разів ординатою, а також графіки правих частин нерівності (8), які стосуються двох можливих перестановок (λ_1, λ_2) та (λ_2, λ_1). Оптимальною у цьому випадку є друга перестановка (λ_2, λ_1). Графік функції, яка стосується перестановки (λ_1, λ_2), зображено штриховою лінією.

Обидва графіки з нерівності (8), разом із графіком з нерівності (22), показують, що оцінки (8) та (22) є істотно точнішими, ніж відома оцінка (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. Ilkiv V.S., Maherovska T.V. *Exact estimate for the measure of the level set of the modulus of a function with high-order constant-sign derivative*// Mat. Stud. – 2010. – V.34, №1. – P. 57–64.
2. Ptashnyk B.Yo. Ill-posed boundary-value problems for partial differential equations. – Naukova dumka, Kiev, 1984. (in Russian)
3. Ptashnyk B.Yo., Ilkiv V.S., Kmit I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary-value problems for partial differential equations. – Naukova dumka, Kiev, 2002. (in Ukrainian)
4. Pyartli A.S. *Diophantine approximation on submanifolds of euclidean space*// Funkts. Anal. Priloz. – 1969. –V.3, №4. (in Russian)
5. Bernik V.I., Ptashnik B.I., Salyga B.O. *An analog of a multipoint problem for a hyperbolic equation with constant coefficients*// Differ. Equations. – 1977. – V.13, №4. – P. 637–645.
6. Ilkiv V.S. *A generalization of a Pyartli lemma*// In: Mater. 10th conf. mol. uchen. Inst. of appl. probl. mech. and math. AN USSR, part 2, Lviv, 1984. – P. 96–99.
7. Ilkiv V.S. *Analogies of Piartly's lemma with absolute constant*// Mat. methods and fys.-mekh. polya. – 1999. – V.42, №4. – P. 68–74.
8. Il'kiv V.S., Maherovska T.V. *On the constant in the Pyartli lemma*// J. Lviv politech. nation. univ. "Phys. and math. sci." – 2007. – V.601. – P. 12–17.
9. Symotyuk M.M. *On the estimates of the measures of sets where the modulus of a smooth function is the upper bound*// Mat. methods and fys.-mekh. polya. – 1999. – V.42, №4. – P. 90–95.
10. Beresnevich V.V. *A Groshev type theorem for convergence on manifolds*// Acta Math. Hungar. – 2002. – V.94, №1–2, P. 99–130.

11. Beresnevich V.V., Bernik V.I., Kleinbock D.Y., Margulis G.A. *Metric Diophantine approximation: the Khintchine–Groshev theorem for nondegenerate manifolds*// Moskow Math. Journ. – 2002. – V.2, №2. – P. 203–225.
12. Dani S.G., Margulis G.A. *Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms*// Adv. in Soviet Math. – 1993. – V.16. – P. 91–137.
13. Kleinbock D., Margulis G.A. *Flows on homogeneous spaces and diophantine approximation on manifold*// Ann. Math. – 1998. – V.148. – P. 339–360.
14. Baker G.A.Jr., Graves-Morris P., Padé approximants. – Addison–Wesley, London, 1986.
15. Kondratiuk A.A. *The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth. III*// Math. sbornik. – 1983. – V.120(162). – P. 331–343.
16. Skaskiv O.B. *Random gap series and Wiman's inequality*// Mat. Stud. – 2008. – V.30, №1. – P. 101–106.
17. Benvenuti P., Mesiar R., Vivona D. Monotone set functions-based integrals. – Handbook of measure theory, Elsevier, Amsterdam, 2002.
18. Cartan H. *Sur les systèmes de founctions holomorphes à variétés linéaires et leurs applications*// Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1928. – V.45, №3.
19. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. – GITTL, 1956. (in Russian)
20. Levin B.Ya. Lectures on entire functions. – Amer. Math. Society, 1966, V.150.
21. Ilkiv V.S., Maherovska T.V. *On inequalities between norms of derivatives of functions and area measure*// Int. Conf. "Functional methods in approximation theory and operator theory III", dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk, 2009, Volyn, Ukraine. – P. 48–49.
22. Bernik V.I., Melnichuk Yu.V. Diophantine approximations and Hausdorff dimension. – Nauka i technika, Minsk, 1988. (in Russian)

Lviv Polytechnic National University
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
ilkivv@i.ua

Надійшло 2.10.2013
Після переробки 24.04.2014