УДК 519.61

С. М. Шахно, Г. П. Ярмола

ПРО ДВОКРОКОВИЙ МЕТОД ТИПУ ХОРД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

S. M. Shakhno, H. P. Yarmola. *On the two-step secant type method for solving nonlinear equations*, Mat. Stud. **42** (2014), 84–88.

In the paper the two-step secant type method for solving nonlinear operator equations under the generalized Lipschitz condition for divided difference is investigated. The convergence order and the radius of the convergence domain of the iterative process are established.

С. М. Шахно, Г. П. Ярмола. *О двухшаговом методе типа хорд для решения нелинейных уравнений* // Мат. Студії. – 2014. – Т.42, №1. – С.84–88.

В работе исследован двухшаговый метод типа хорд для решения нелинейных операторных уравнений при условии, что разделеные разности удовлетворяют обобщенное условие Липшица. Определены порядок и радиус области сходимости итерационного процесса.

1. Вступ. Розглянемо нелінійне рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де оператор F визначений на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Для чисельного розв'язування рівняння (1) нами запропоновано двокроковий метод типу хорд ([7])

$$\begin{gathered} x_{k+1} = x_k - F(u_k; v_k)^{-1} F(x_k), \\ y_{k+1} = x_{k+1} - F(u_k; v_k)^{-1} F(x_{k+1}),\ k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \end{gathered} \tag{2}$$

де $u_k = x_k + a_k(y_k - x_k)$, $v_k = x_k + b_k(y_k - x_k)$, $a_k \in [-1, 1]$, $b_k \in [0, 1]$, $F(u_k; v_k)$ — поділена різниця першого порядку оператора F, побудована за точками u_k та v_k. Частковими випадками методу (2) є відомі методи. Вибираючи $a_k = 0.5$, $b_k = 0.5$ у формулі (2), отримаємо диференціальний метод з порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$ ([1, 6, 9]), при $a_k = 0$, $b_k = 1$, матимемо різницевий метод з порядком збіжності $1 + \sqrt{2}$ ([2, 4, 9]), якщо ж $a_k = 0$, $b_k = 0$, то отримуємо класичний метод Ньютона-Канторовича ([3, 8]).

Особливістю двокрокових методів є те, що на кожній ітерації потрібно лише один раз знаходити оператор, обернений до поділеної різниці (похідної), і з його допомогою обчислити x_{k+1} і y_{k+1}. Оскільки основні обчислювальні затрати йдуть на знаходження оберненого оператора, то кількість арифметичних операцій на кожній ітерації зростає неістотно у порівнянні з однокроковими методами.

2. Аналіз збіжності. У цьому повідомленні за узагальнених умов Ліпшиця на поділені різниці досліджено збіжність методу типу хорд (2) і встановлено квадратичну швидкість збіжності ітераційного процесу для сталих параметрів, а при деякому виборі параметрів отримано порядок збіжності $1 + \sqrt{2}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 65H10.
Keywords: nonlinear operator equation; iterative process; Lipschitz condition.

Нехай x і y — дві фіксовані точки з D. Лінійний оператор $F(x;y)$ з X в Y називатимемо *поділеною різницею першого порядку* для оператора F, побудованою за точками x і y, якщо виконується рівність ([5])

$$F(x;y)(x-y) = F(x) - F(y).$$

Вважатимемо, що $F(x;x) = F'(x)$, де F' — похідна Фреше оператора F.

Через $B(x^*, r) = \{x \in D : \|x - x^*\| < r\}$ позначимо кулю радіуса r з центром в точці x^*, $\rho(x) = \|x - x^*\|$.

Лема 1. *Нехай додатна локально інтегровна на $[0, +\infty)$ функція L та $r > 0$ задовольняють умову*

$$\int_0^{(2-a+|a|)r} L(z)dz \le 1, \ a \in [-1, 1].$$

Припустимо, що F має неперервну похідну в $B(x^*, r)$, існує $F'(x^*)^{-1}$ і $F'(x^*)^{-1}F(x;y)$ задовольняє умову

$$(\forall x, y \in D) : \ \|F'(x^*)^{-1}F(x;y) - I\| \le \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(z)dz.$$

Тоді $F(x;y)$ оборотна в D і

$$\left\|F(x;y)^{-1}F'(x^*)\right\| \le \Big(1 - \int_0^{\rho(x)+\rho(y)} L(z)dz\Big)^{-1}.$$

Лема 2. *Нехай L — додатна інтегровна та монотонно неспадна функція на $[0, +\infty)$. Тоді функція $h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t L(z)dz$ є монотонно неспадною відносно t.*

Доведення леми 1 проводиться повністю подібно, як в [5, 6], а твердження леми 2 є елементарним.

Наступна теорема встановлює порядок і радіус області збіжності методу (2) для фіксованих параметрів $a_k = a \in [-1, 1]$ і $b_k = b \in [0, 1]$.

Теорема 1. *Нехай F — оператор, визначений на відкритій опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Припустимо, що:*

1) *рівняння (1) має розв'язок $x^* \in D$, існує похідна за Фреше $F'(x^*)$ і вона є оборотна;*
2) *додатна локально інтегровна на $[0, +\infty)$ функція L та числа $r > 0$ і a задовольняють умову*
$$0 < \int_0^{(3-a+|a|)r} L(z)dz \Big/ \Big(1 - \int_0^{(2-a+|a|)r} L(z)dz\Big) \le 1; \tag{3}$$
3) *в D оператор F має поділені різниці першого порядку $F(x;y)$, які задовольняють узагальнену умову Ліпшиця*
$$(\forall x, y, u, v \in D) : \ \left\|F'(x^*)^{-1}[F(x;y) - F(u;v)]\right\| \le \int_0^{\|x-u\|+\|y-v\|} L(z)dz. \tag{4}$$

Тоді послідовності $\{x_k\}_{k\ge 0}$, $\{y_k\}_{k\ge 0}$, визначені рекурентними співвідношеннями (2), збігаються до x^* для всіх $x_0,\ y_0 \in B(x^*,r)$, при цьому

$$\|x_{k+1}-x^*\| \le q_1 \frac{(1+|a|-b)\rho(x_k)+(|a|+b)\rho(y_k)}{(1+2|a|)\rho_{\max}}\rho(x_k) \quad (k\ge 0), \tag{5}$$

$$\|y_{k+1}-x^*\| \le \frac{q_2}{\rho(x_1)}\rho(x_k)\rho(x_{k+1}) \quad (k\ge 0), \tag{6}$$

де $\rho_{\max}=\rho(x_0)$, *а*

$$q_1=\frac{\int\limits_0^{(1+2|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{(2-a+|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}<1, \quad q_2=\frac{\int\limits_0^{\rho(x_1)+(2-a+|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{(2-a+|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}<1.$$

Порядок збіжності ітераційного процесу (2) не нижчий, ніж 2.

Доведення. Виберемо довільні $x_0,\ y_0 \in B(x^*,r)$, де r задовольняє (3), і перевіримо, що $q_1<1$ і $q_2<1$. Справді, враховуючи лему 2, отримаємо

$$q_1=\frac{\int\limits_0^{(1+2|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{(2-a+|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}\frac{(1+2|a|)\rho_{\max}}{(1+2|a|)\rho_{\max}} \le$$

$$\le \frac{\int\limits_0^{(1+2|a|)r} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{(2-a+|a|)r} L(z)dz}\frac{(1+2|a|)\rho_{\max}}{(1+2|a|)r} \le \frac{\rho_{\max}}{r}<1,$$

$$q_2=\frac{\int\limits_0^{\rho(x_1)+(2-a+|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{(2-a+|a|)\rho_{\max}} L(z)dz}\frac{\rho(x_1)+(2-a+|a|)\rho_{\max}}{\rho(x_1)+(2-a+|a|)\rho_{\max}} \le$$

$$\le \frac{\int\limits_0^{(3-a+|a|)r} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{(2-a+|a|)r} L(z)dz}\frac{(3-a+|a|)\rho_{\max}}{(3-a+|a|)r} \le \frac{\rho_{\max}}{r}<1.$$

Якщо $x_k,\ y_k \in B(x^*,r)$, то за формулами (2) одержуємо

$$x_{k+1}-x^* = x_k-x^*-F(u_k;v_k)^{-1}F(x_k) = F(u_k;v_k)^{-1}F(x^*;x^*)\times$$
$$\times F(x^*;x^*)^{-1}[F(u_k;v_k)-F(x_k;x^*)](x_k-x^*),$$
$$y_{k+1}-x^* = x_{k+1}-x^*-F(u_k;v_k)^{-1}F(x_{k+1}) = F(u_k;v_k)^{-1}F(x^*;x^*)\times$$
$$\times F(x^*;x^*)^{-1}[F(u_k;v_k)-F(x_{k+1},x^*)](x_k-x^*).$$

Позначимо $g_k = (1+|a|-b)\rho(x_k) + (|a|+b)\rho(y_k)$, $t_k = (2-a-b)\rho(x_k) + (|a|+b)\rho(y_k)$, $g_{\max} = (1+2|a|)\rho_{\max}$, $t_{\max} = (2-a+|a|)\rho_{\max}$. Тоді, за лемою 1 і умовою (4) отримаємо

$$\|x_{k+1}-x^*\| = \left\|x_k - x^* - F(u_k;v_k)^{-1}F(x_k)\right\| \leq$$
$$\leq \left\|F(u_k;v_k)^{-1}F(x^*;x^*)\right\| \left\|F(x^*;x^*)^{-1}[F(u_k;v_k)-F(x_k;x^*)](x_k-x^*)\right\| \leq$$
$$\leq \frac{\int\limits_0^{\|u_k-x_k\|+\|v_k-x^*\|} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{\|u_k-x^*\|+\|v_k-x^*\|} L(z)dz}\rho(x_k) \leq \frac{\int\limits_0^{g_k} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{t_k} L(z)dz}\rho(x_k),$$
$$\|y_{k+1}-x^*\| = \left\|x_{k+1} - x^* - F(u_k;v_k)^{-1}F(x_{k+1})\right\| \leq$$
$$\leq \left\|F(u_k;v_k)^{-1}F(x^*;x^*)\right\| \left\|F(x^*;x^*)^{-1}[F(u_k;v_k)-F(x_{k+1};x^*)](x_{k+1}-x^*)\right\| \leq$$
$$\leq \frac{\int\limits_0^{\|u_k-x_{k+1}\|+\|v_k-x^*\|} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{\|u_k-x^*\|+\|v_k-x^*\|} L(z)dz}\rho(x_{k+1}) \leq \frac{\int\limits_0^{\rho(x_{k+1})+t_k} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{t_k} L(z)dz}\rho(x_{k+1}).$$

Прийнявши $k=0$, отримаємо

$$\|x_1-x^*\| \leq q_1\|x_0-x^*\| < \|x_0-x^*\| < r,\ \|y_1-x^*\| \leq q_2\|x_1-x^*\| < \|x_1-x^*\| < r.$$

Тобто, $x_1,\ y_1 \in B(x^*,r)$. Повторюючи це міркування, за методом математичної індукції встановлюємо, що, визначені за допомогою (2), x_k, y_k $(k \geq 0)$ належать до $B(x^*,r)$, а $\rho(x_k)$ і $\rho(y_k)$ монотонно спадають. Далі, за лемою 2, для всіх $k \in \{0,1,\ldots\}$ маємо

$$\|x_{k+1}-x^*\| \leq \frac{\int\limits_0^{g_k} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{t_k} L(z)dz}\rho(x_k)\frac{g_k}{g_k} \leq \frac{\int\limits_0^{g_{\max}} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{t_{\max}} L(z)dz}\rho(x_k)\frac{g_k}{g_{\max}} =$$
$$= q_1\frac{(1+|a|-b)\rho(x_k)+(|a|+b)\rho(y_k)}{(1+2|a|)\rho_{\max}}\rho(x_k),$$
$$\|y_{k+1}-x^*\| \leq \frac{\int\limits_0^{\rho(x_{k+1})+t_k} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{t_k} L(z)dz}\rho(x_{k+1})\frac{\rho(x_{k+1})+t_k}{\rho(x_{k+1})+t_k} \leq$$
$$\leq \frac{\int\limits_0^{\rho(x_1)+t_{\max}} L(z)dz}{1-\int\limits_0^{t_{\max}} L(z)dz}\rho(x_{k+1})\frac{\rho(x_{k+1})+t_k}{\rho(x_1)+t_{\max}} \leq \frac{q_2}{\rho(x_1)}\rho(x_k)\rho(x_{k+1}).$$

Отже, справджуються оцінки (5) і (6). Оскільки $\rho(y_k) \leq \rho(x_k)$ і $\rho(x_{k+1}) \leq \rho(x_k)$, то

$$\|x_{k+1}-x^*\| \leq \frac{q_1}{\rho_{\max}}\|x_k-x^*\|^2,\ \|y_{k+1}-x^*\| \leq \frac{q_2}{\rho(x_1)}\|x_k-x^*\|^2.$$

Звідси випливає, що порядок збіжності ітераційного процесу (2) не нижчий, ніж 2. $\square$

Наслідок 1. *У випадку $a_k = O(\|y_k - x^*\|)$ та $b_k = 1$ порядок збіжності методу (2) дорівнює $1+\sqrt{2}$.*

Доведення. Справді, з оцінок (5) і (6) маємо

$$\|x_{k+1} - x^*\| \le \frac{(1 + a_0 + O(1)\rho(x_0))}{(1 + 2a_0)\rho_{\max}} q_1 \rho(y_k)\rho(x_k), \quad \|y_{k+1} - x^*\| \le \frac{q_2}{\rho(x_1)} \rho(x_k)\rho(x_{k+1}). \quad (7)$$

Позначимо

$$\alpha_k = \|x_k - x^*\|,\ \beta_k = \|y_k - x^*\|,\ C_1 = \frac{(1 + a_0 + O(1)\rho(x_0))}{(1 + 2a_0)\rho(y_0)} q_1,\ C_2 = \frac{q_2}{\rho(x_1)}.$$

З (7) отримаємо $\alpha_{k+1} \le C_1\alpha_k\beta_k$, $\beta_{k+1} \le C_2\alpha_{k+1}\alpha_k$. Тоді існують стала $C > 0$ і номер $N \ge 0$ такі, що для $k \ge N$ $\alpha_{k+1} \le C\alpha_k^2\alpha_{k-1}$. З цієї нерівності отримуємо рівняння для визначення порядку збіжності $t^2 - 2t - 1 = 0$. Звідси випливає, що порядок збіжності методу (2)(єдиний додатний корінь рівняння) дорівнює $1+\sqrt{2}$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Bartish M.Ya. *About one iterative method of solving functional equations*// Dop. AN URSR. Ser. A. – 1968. – V. 5. – P. 387–391. (in Ukrainian)
2. Bartish M.Ya., Shcherbyna Yu.M. *About one difference method of solving operator equations*// Dop. AN URSR. Ser. A. – 1972. – V.7. – P. 579–582. (in Ukrainian)
3. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis. Moscow: Nauka, 1984. (in Russian)
4. Shakhno S.M. *On an iterative algorithm with superquadratic convergence for solving nonlinear operator equations*// J. Comp. App. Math. – 2009. – V.231. – P. 222–235.
5. Shakhno S.M. *Secant method under the generalized Lipschitz conditions for the first-order divided differences*// Mathematical bulletin of the Shevchenko scientific society. – 2007. – V.4. – P. 296–305. (in Ukrainian)
6. Shakhno S.M. *Convergence of the two-step Newton type method for solving of nonlinear equations under the generalized Lipschitz conditions*// Physico-mathematical modelling and informational technologies. – 2012. – V.16. – P. 163–172. (in Ukrainian)
7. Shakhno S.M., Grab S.I., Yarmola H.P. *Twoparametric secant type methods for solving nonlinear equations*// Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science. – 2009. – V.15. – P. 117–127. (in Ukrainian)
8. Wang X. *Convergence of Newton's method and uniquiness of the solution of equations in Banach space*// IMA Journal of Numerical Analysis. – 2000. – V.20. – P. 123–134.
9. Werner W. *Über ein Verfahren der Ordnung $1+\sqrt{2}$ zur Nullstellenbestimmung*// Numer. Math. – 1979. – V.32. – P. 333–342.

Ivan Franko National University of Lviv
s_shakhno@franko.lviv.ua

Надійшло 17.04.2014
Після переробки 7.10.2014