УДК 517.5

А. Л. Шидліч, С. О. Чайченко

ДЕЯКІ ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ В ПРОСТОРАХ ОРЛИЧА

A. L. Shidlich, S. O. Chaichenko. *Some extremal problems in the Orlicz spaces*[1], Mat. Stud. **42** (2014), 21–32.

We obtained the exact values of analogues of the best n-term approximations and the basis widths in the Orlicz spaces $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ of classes of non-negative functions, which can be represented as the product of a fixed function and functions from the unit balls of the spaces $L_p(\mathbb{A}; d\mu)$ and $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$, respectively.

А. Л. Шидлич, С. О. Чайченко. *Некоторые экстремальные задачи в пространствах Орлича* // Мат. Студії. – 2014. – Т.42, №1. – С.21–32.

Получены точные значения аналогов наилучших n-членных приближений и базисных поперечников в пространствах Орлича $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ классов неотрицательных функций, представимых в виде произведения некоторой фиксированной функции и функций из единичных шаров пространств $L_p(\mathbb{A}; d\mu)$ и $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ соответственно.

Вступ. Нехай $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}, d\mu)$, $m \geq 1$, — m-вимірний евклідовий простір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, визначений на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}$ підмножин з $\mathbb{R}^m$, зі скінченною σ-адитивною неперервною мірою $d\mu$, $\mathbb{A}$ — μ-вимірна підмножина з $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}, d\mu)$, μ-міра якої дорівнює a, де a — скінченне число, або ж $a = +\infty$: $\mu(\mathbb{A}) = |\mathbb{A}|_\mu = a,\ a \in (0, +\infty]$; $Y = Y(\mathbb{A}, d\mu)$ — множина всіх заданих на $\mathbb{A}$ функцій $f = f(\mathbf{x})$, вимірних відносно міри $d\mu$.

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орлича, тобто, неспадна опукла вниз функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Позначимо через $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ множину всіх функцій $f \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, які задовольняють умову $(\forall C > 0)\colon \int_{\mathbb{A}} M(C|f(\mathbf{x})|)\, d\mu < +\infty$. Лінійний простір $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ є банаховим з нормою Люксембурга

$$\|f\|_{L_M(\mathbb{A};\, d\mu)} := \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_{\mathbb{A}} M\Big(|f(\mathbf{x})|/\alpha\Big)\ d\mu \leq 1\Big\}$$

і називається *простором Орлича.*

Зауважимо, що у випадку, коли $M(t) = t^p$, $p \geq 1$, простори $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ збігаються з відомими просторами Лебега $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, які складаються з функцій $f \in Y(\mathbb{A}, d\mu)$, для яких є скінченною величина

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{A};\, d\mu)} = \Big(\int_{\mathbb{A}} |f(\mathbf{x})|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

[1]Робота виконана за часткової підтримки програми FP7-People-2011-IRSES номер проекту 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences), а також Державного фонду фундаментальних досліджень (номер державної реєстрації теми: № 0112U000372).
2010 *Mathematics Subject Classification:* 26A42, 41A65, 46E30.
Keywords: Orlicz spaces; best n-term approximations; basis widths.

Нехай, далі, $f \in L_M(\mathbb{A}; d\mu)$, σ — деяке фіксоване додатне число, і $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(\mathbb{A})$ — множина всіх μ-вимірних множин $\gamma_\sigma \subset \mathbb{A}$, μ-міра яких дорівнює σ.

Основним предметом вивчення у даній статті є величини

$$e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \|f - \chi_{\gamma_\sigma} f\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} =$$
$$= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \inf \Big\{\alpha > 0 : \int_{\mathbb{A}} M\Big(|f(\mathbf{x})|/\alpha\Big)\, d\mu - \int_{\gamma_\sigma} M\Big(|f(\mathbf{x})|/\alpha\Big)\, d\mu \le 1\Big\}, \tag{1}$$

де $\chi_{\gamma_\sigma} = \chi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ — характеристична функція множини γ_σ, яка набуває значення 1 при $\mathbf{x} \in \gamma_\sigma$ і значення 0 при $\mathbf{x} \notin \gamma_\sigma$. Ідея введення цих величин бере свій початок від статті С. Б. Стєчкіна ([1]), в якій з'явилося відоме поняття найкращого квадратичного наближення даного елемента за допомогою n-членних поліномів по заданій системі. Наведемо означення цього поняття.

Нехай $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормований базис гільбертового простору H, $f \in H$, і

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k$$

— розклад елемента f в ортогональний ряд за системою φ.

Розглядаються всі n-членні ($n \in \mathbb{N}$) поліноми за системою φ вигляду

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} d_k \varphi_k,$$

де γ_n — довільний набір з n різних натуральних чисел, а d_k — довільні комплексні числа.

Величину

$$e_n(f, \varphi)_H = \inf_{P_{\gamma_n}} \|f - P_{\gamma_n}\|_H = \inf_{\gamma_n,\, d_k} \Big\| f - \sum_{k \in \gamma_n} d_k \varphi_k \Big\|_H \tag{2}$$

називають *найкращим квадратичним наближенням елемента f за допомогою n-членних поліномів за системою φ.*

За рівністю Парсеваля для довільного елемента $f \in H$ маємо

$$\|f - P_{\gamma_n}\|_H^2 = \sum_{k \bar{\in} \gamma_n} |f_k|^2 + \sum_{k \in \gamma_n} |f_k - d_k|^2 \ge \sum_{k \bar{\in} \gamma_n} |f_k|^2.$$

Звідси випливає, що

$$e_n^2(f, \varphi)_H = \inf_{\gamma_n} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|^2 - \sum_{k \in \gamma_n} |f_k|^2 \Big).$$

Порівняння останньої рівності з рівністю (1) дає змогу зробити висновок, що величини $e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ можна розглядати як аналоги величин $e_n(f, \varphi)_H$ в просторах $L_M(\mathbb{A}; d\mu)$.

У випадку, коли $M(t) = t$, тобто, коли $L_M(\mathbb{A}; d\mu) = L_1(\mathbb{A}, d\mu)$, величини (1) для невід'ємних функцій f збігаються з відомими величинами

$$e_\sigma(f)_{L_1(\mathbb{A};d\mu)} = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \Big| \int_A f(\mathbf{x}) d\mu - \int_{\gamma_\sigma} f(\mathbf{x}) d\mu \Big| \tag{3}$$

найкращих наближень інтегралів функцій інтегралами скінченного рангу σ (див., наприклад, [2], [3]).

У статті [1] досліджувалась абсолютна збіжність ортогональних рядів і в термінах величин (2) сформульовано критерій того, щоб для даного елемента $f \in H$ збігався ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k|$, де $f_k = (f, \varphi_k)$. У статті [3] в термінах величин вигляду (3) встановлено подібні умови належності функцій $f \in L_p(\mathbb{A}, d\mu)$ до просторів $L_s(\mathbb{A}, d\mu)$, $s \neq p$. Проте, дані величини є цікавими також з точки зору наближення функцій. Дослідження поведінки точних верхніх меж величин вигляду (2) для різноманітних класів періодичних функцій від однієї та багатьох змінних проводились багатьма авторами. З бібліографією робіт, в яких отримуються подібні результати, можна ознайомитись, наприклад, в [4] та [5]. Апроксимаційні властивості величин вигляду (3) вивчались, зокрема, у статтях [2], [3].

У даній статті досліджуємо апроксимаційні властивості величин вигляду (1). Зокрема, встановлено значення точних верхніх меж таких величин на класах функцій, які зображуються у вигляді добутку деякої фіксованої функції та функцій з одиничної кулі простору $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$. Крім цього, у даній статті знайдено точні значення аналогів базисних поперечників класів функцій, які зображаються у вигляді добутку деякої фіксованої функції та функції з одиничної кулі простору $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$.

1. Основні результати.

1.1. Величини $e_\sigma(\varphi, p)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$. Нехай

$$U_p(\mathbb{A}) = \Big\{ y \in Y(\mathbb{A}, d\mu) : \ \|y\|_{L_p(\mathbb{A}, d\mu)} \le 1 \Big\}$$

— одинична куля у просторі $L_p(\mathbb{A}, d\mu)$, $0 < p < +\infty$, $U_p^+(\mathbb{A})$ — підмножина всіх невід'ємних функцій з $U_p(\mathbb{A})$ і $\varphi(\mathbf{x})$ — невід'ємна істотно обмежена на $\mathbb{A}$ функція, для якої у випадку необмеженої множини $\mathbb{A}$ припускаємо, що $\lim_{|\mathbf{x}|\to+\infty} \varphi(\mathbf{x}) = 0$ (у такому випадку пишемо $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$).

Розглядатимемо величини вигляду (1) за умови, що $f = \varphi \cdot y$, де $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а y — деяка невід'ємна функція. У цьому випадку вони матимуть вигляд

$$e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf\{\|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma} \varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \colon \gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma\}.$$

Наступна теорема дає точні значення величин

$$e_\sigma(\varphi, p)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \sup\{e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \colon y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})\} \tag{4}$$

де $\mathcal{U}_p(\mathbb{A}) = U_p^+(\mathbb{A}) \cap L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ у випадку, коли $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, $p \in (0, +\infty)$, а M — довільна функція Орлича така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича.

Теорема 1. *Нехай $p \in (0, +\infty)$, $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а M — деяка функція Орлича така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича. Тоді для будь-якого $\sigma \in (0, a)$*

$$e_\sigma(\varphi, p)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \sup\Big\{ \Big(\int_0^s \bar{\varphi}^{-p}(t)dt \Big)^{-\frac{1}{p}} \Big/ M^{-1}\Big(\frac{1}{s-\sigma}\Big) \colon s \in (\sigma, a] \Big\}, \tag{5}$$

де M^{-1} — функція, обернена до функції M, $\bar{\varphi}(t)$ — незростаюча перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому точна верхня межа в правій частині (5) досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Точна верхня межа у співвідношенні (4) реалізується функцією

$$y^*(\mathbf{x}) = \frac{\chi_{\mathbb{E}}(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \Big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t}) d\mu \Big)^{-\frac{1}{p}} \tag{6}$$

де $\mathbb{E}$ — довільна вимірна підмножина множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) \ge \bar{\varphi}(s^*-)\}$ μ-міри s^*, яка містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(s^*-)\}$, а $\chi_{\mathbb{E}}(\cdot)$ — характеристична функція множини $\mathbb{E}$.

Зазначимо, що з умови $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ випливає, що для функції $\varphi(\mathbf{x})$ її функція розподілу

$$m_\varphi(y) := \mu(\mathbb{E}_y), \quad \mathbb{E}_y = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq y\Big\}, \quad y \geq 0,$$

набуває лише скінченних значень з проміжку $[0, a]$. Тому, за означенням спадної (а посуті незростаючої) перестановки (див., наприклад [3, §1]) величина $\bar{\varphi}(t)$ визначена для довільного $t > 0$.

1.2. Величини $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ та $D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$. Поряд з величинами (1) для довільної функції $f \in L_M(\mathbb{A}; d\mu)$ і будь-якої фіксованої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ природно розглянути також величини $E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \|f - \chi_{\gamma_\sigma} f\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$. Нехай

$$U_M(\mathbb{A}) = \Big\{y \in Y(\mathbb{A}, d\mu) : \ \|y\|_{L_M(\mathbb{A},d\mu)} \leq 1\Big\}$$

— одинична куля у просторі $L_M(\mathbb{A}, d\mu)$, а $U_M^+(\mathbb{A})$ — підмножина всіх невід'ємних функцій з $U_M(\mathbb{A})$. Нехай також γ_σ — деяка фіксована множина з Γ_σ.

Розглянемо величини $E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ для функцій $f = \varphi \cdot y$, де $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, а y — довільна функція з множини $U_M^+(\mathbb{A})$. У цьому випадку вони матимуть вигляд

$$E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma} \varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}.$$

Наступне твердження дає точні значення величин

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \sup\{E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \colon y \in U_M^+(\mathbb{A})\}$$

і величин

$$D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} := \inf\{E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \colon \gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma\}.$$

Теорема 2. *Нехай $\varphi \in \Phi(A)$ і M — довільна функція Орлича. Тоді для довільних $\sigma \in (0, a)$ та $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$*

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+), \tag{7}$$

де $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(t)$ — незростаюча перестановка функції

$$\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in A \setminus \gamma_\sigma; \\ 0, & \mathbf{x} \in \gamma_\sigma, \end{cases} \tag{8}$$

$$D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \bar{\varphi}(\sigma+), \tag{9}$$

де $\bar{\varphi}$ — незростаюча перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$. При цьому в Γ_σ міститься множина γ_σ^*, для якої виконується рівність

$$E_{\gamma_\sigma^*}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \bar{\varphi}(\sigma+).$$

Зокрема, в ролі γ_σ^* можна взяти довільну вимірну підмножину множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq \bar{\varphi}(\sigma+)\}$ μ-міри σ, яка містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A} : \ \varphi(\mathbf{x}) > \bar{\varphi}(\sigma+)\}$.

Зазначимо, що у випадку наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами величинам $E_{\gamma_\sigma}(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ можна поставити у відповідність найкраще наближення функції f поліномами степеня σ, величині $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ — точну верхню межу таких наближень по заданій множині, а величина $D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ нагадує тригонометричний (базисний) поперечник порядку σ заданої множини функцій.

Зазначимо також, що у просторах $L_p(\mathbb{A}; d\mu)$ твердження, подібні до теорем 1 та 2, отримано відповідно у статтях [2] та [6], а у дискретних просторах Орлича l_M — в [7]. При доведенні теорем 1 та 2 здебільшого застосовуватимемо прийоми та позначення зі статей [2], [3], [6] та [7].

2. Доведення теореми 1.

2.1. Перед доведенням теореми 1 доведемо лему 1. Для її формулювання введемо такі позначення. Нехай M — довільна функція Орлича, $L_M(0,a)$, $a \in (0,+\infty]$, — простір Орлича всіх вимірних на $(0,a)$ за Лебегом функцій $f(t)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_M(0,a)} := \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_0^a M\Big(|f(t)|/\alpha\Big)\,dt \le 1\Big\},$$

і $L_p(0,a)$, $0 < p < +\infty$, — простір всіх вимірних на $(0,a)$ за Лебегом функцій $f(t)$ таких, що

$$\|f\|_{L_p(0,a)} := \Big(\int_0^a |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Нехай також $U_p(0,a)$ — одинична куля у просторі $L_p(0,a)$, а Ω — множина всіх незростаючих додатних функцій $\omega(t)$, істотно обмежених на проміжку $(0,a)$, для яких у випадку, коли $a = +\infty$, $\lim_{t\to+\infty}\omega(t) = 0$.

Нехай, далі, ω — довільна функція з Ω, і для даного $p \in (0,+\infty)$ $\mathcal{M}_p^\omega$ — множина всіх невід'ємних функцій $m = m(t)$ з $U_p(0,a)$, для яких добуток $\omega(t)m(t)$ на проміжку $(0,a)$ не зростає і набуває скінченну кількість значень. Для кожного $\sigma \in (0,a)$ і для довільних функцій $\omega \in \Omega$ і $m \in \mathcal{M}_p^\omega$ розглянемо аналоги величин $e_\sigma(f)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M} &:= e_\sigma(\omega\, m)_{L_M(0;a)} = \inf\{\|\omega(t)m(t) - \chi_{\delta_\sigma}(t)\omega(t)m(t)\|_{L_M(0;a)} \colon \delta_\sigma \subset (0,a)\} = \\ &= \inf\Big\{\inf\Big\{\alpha > 0 \colon \int_{(0;a)\setminus\delta_\sigma} M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha\Big)\,dt \le 1\Big\} \colon \delta_\sigma \subset (0,a)\Big\},\end{aligned} \tag{10}$$

де δ_σ — підмножини з $(0;a)$, міри яких дорівнюють σ, та аналоги величин (4)

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\omega,\omega)_{L_M} := \sup\{\mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M} \colon m \in \mathcal{M}_p^\omega\} = \sup\{e_\sigma(\omega\, m)_{L_M(0;a)} \colon m \in \mathcal{M}_p^\omega\}. \tag{11}$$

Лема 1. *Нехай $\omega \in \Omega$, $p \in (0,+\infty)$ і $M(t)$ — функція Орлича така, що $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича. Тоді, для кожного $\sigma \in (0,a)$*

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\omega,\omega)_{L_M} = \sup\Big\{\Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}} \Big/ M^{-1}\Big(\frac{1}{s-\sigma}\Big) \colon s \in (\sigma, a]\Big\}. \tag{12}$$

При цьому точна верхня межа в правій частині рівності (12) завжди досягається в деякій скінченній точці $s^* \in (\sigma, a]$. Точна верхня межа в правій частині співвідношення (11) реалізується функцією $m^* = m^*(t)$ з $\mathcal{M}_p^\omega$, де

$$m^*(t) = \frac{\chi_{(0,\,s^*)}(t)}{\omega(t)}\Big(\int_0^{s^*} \omega^{-p}(x)dx\Big)^{-\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

а $\chi_{(0,s^*)}(t)$ — характеристична функція множини $(0, s^*)$.

Доведення леми 1. Нехай m — довільна функція з множини $\mathcal{M}_p^\omega$. Тоді добуток $\omega(t)m(t)$ при деякому $n \in \mathbb{N}$ зображається у вигляді

$$\omega(t)m(t) = y_k,\ t \in (s_{k-1}, s_k),\ k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, \tag{14}$$

де $y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y_{n+1} = 0$ — деякі числа, і $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n \le s_{n+1} = a$. Звідси, при $\Delta_k = s_k - s_{k-1}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, маємо

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0 :\ \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha\Big)\ dt \le 1\Big\} =$$

$$= \inf\Big\{\alpha > 0 :\ \sum_{k=1}^n M(y_k/\alpha)\Delta_k - \int_0^\sigma M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha\Big)\ dt \le 1\Big\}.$$

Переконаємось, що можна вважати, що довжина Δ_1 проміжку $(0, s_1)$, на якому добуток $\omega(t)m(t)$ набуває свого найбільшого значення, не менша за σ. Якщо це не так, то через k_σ, $k_\sigma \in [1, n+1]$, позначимо найменше натуральне число таке, що $s_{k_\sigma} > \sigma$, і покладемо $\widetilde{s}_0 = 0$, $\widetilde{s}_1 = s_{k_\sigma}$, $\widetilde{y}_1 = y_{k_\sigma}$; $\widetilde{s}_k = s_{k_\sigma+k-1}$ і $\widetilde{y}_k = y_{k_\sigma+k-1}$, де $k \in \{2, \dots, n-k_\sigma+1\}$. Розглянемо функцію $\widetilde{m}(t)$ таку, що $\widetilde{m}(t) = 0$, коли $t > \widetilde{s}_{n-k_\sigma+1}$, і

$$\omega(t)\,\widetilde{m}(t) = \widetilde{y}_k, \quad t \in (\widetilde{s}_{k-1}, \widetilde{s}_k), \quad k \in \{1, 2, \dots, n-k_\sigma+1\}.$$

Для цієї функції $\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{s}_1 - \widetilde{s}_0 = s_{k_\sigma} > \sigma$, $\|\widetilde{m}\|_{L_p(0,a)} \le \|m\|_{L_p(0,a)} \le 1$, тобто, $\widetilde{m} \in \mathcal{M}_p^\omega$ і

$$\mathcal{E}_\sigma(\widetilde{m}, \omega)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0\colon M(\widetilde{y}_1/\alpha)(\widetilde{\Delta}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} M(\widetilde{y}_k/\alpha)\Delta_k \le 1\Big\} =$$

$$= \inf\Big\{\alpha > 0 :\ M(y_{k_\sigma}/\alpha)(s_{k_\sigma} - \sigma) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} M(y_k/\alpha)\Delta_k \le 1\Big\} = \mathcal{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M}.$$

Тому, надалі будемо вважати, що довжина проміжку $(0, s_1)$ не менша за σ. В такому випадку

$$\mathcal{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0 :\ M(y_1/\alpha)(\Delta_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^n M(y_k/\alpha)\Delta_k \le 1\Big\}. \tag{15}$$

Внаслідок (14) для кожного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$m_k := \int_{s_{k-1}}^{s_k} m^p(t)\ dt = y_k^p \int_{s_{k-1}}^{s_k} \omega^{-p}(t)\ dt,$$

і, тому, $y_k = \omega(t)m(t) = \omega_k m_k^{\frac{1}{p}}$, $t \in [s_{k-1}, s_k)$, де

$$\omega_k := \Big(\int_{s_{k-1}}^{s_k} \omega^{-p}(t)\ dt\Big)^{-\frac{1}{p}}.$$

Звідси, рівність (15) можна записати у вигляді $\mathcal{E}_\sigma(m, \omega)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0 : F_\sigma(m, \alpha) \le 1\Big\}$, де

$$F_\sigma(m, \alpha) := F_\sigma(m, \omega, \alpha, M) = M\Big(\omega_1 m_1^{\frac{1}{p}}/\alpha\Big)(\Delta_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^n M\Big(\omega_k m_k^{\frac{1}{p}}/\alpha\Big)\Delta_k.$$

Покладемо $N(t) = M(t^{1/p})$, $p_k = \omega_k^{-p}$, $a_k = \omega_k^p m_k/\alpha^p$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, і виберемо числа b_k так, що $b_1 = (\Delta_1 - \sigma)\omega_1^p$ та $b_k = \Delta_k \omega_k^p$ при $k \in \{2, \dots, n\}$. Тоді, для оцінки величини $F_\sigma(m, \alpha)$ можна застосувати таку, доведену у статті [8] (див. також [9]), наступну лему.

Лема A ([8]). *Нехай $g\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}_0^+$ та $p\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ — деякі інтегровні функції, $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}_0^+$ — незростаюча функція. Тоді для довільної опуклої вниз функції $N\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, такої що $N(0) = 0$, виконується співвідношення*

$$\sum_{k=1}^n p_k b_k N(a_k) \le \max\Big\{N\Big(\frac{\sum_{k=1}^n p_k a_k}{\sum_{k=1}^l p_k}\Big)\sum_{k=1}^l p_k b_k \colon l \in [1,n]\Big\}.$$

Скориставшись лемою A, отримаємо

$$F_\sigma(m,\alpha) = \sum_{k=1}^n p_k b_k N(a_k) \le \max\Big\{N\Big(\frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\alpha^p \sum_{k=1}^l \omega_k^{-p}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^l \Delta_k - \sigma\Big)\colon l \in [1,n]\Big\} =$$
$$= \max\Big\{M\Big(\frac{\|m\|_{L_p(0,a)}}{\alpha(\int_0^{s_l} \omega^{-p}(t)\,dt)^{1/p}}\Big)(s_l - \sigma)\colon l \in [1,n]\Big\}$$

і оскільки $\|m\|_{L_p(0,a)} \le 1$, а функція M неспадна, то для довільного $\alpha > 0$

$$F_\sigma(m,\alpha) \le \sup\Big\{(s-\sigma)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha)\colon s \in (\sigma, a]\Big\}, \text{ де } \widetilde{\omega}_s := \Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)\,dt\Big)^{-\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $a < +\infty$, існує число $s_\alpha \in (\sigma, a]$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (16). Якщо ж $a = +\infty$, то беручи до уваги монотонне прямування до нуля при $t \to +\infty$ функції $\omega(t)$, неспадання частки $M(t^{1/p})/t$, $t > 0$, та нерівність $M(t/\mu) \le M(t)/\mu$, яка виконується для довільної функції Орлича $M(t)$ та будь-яких чисел $\mu \ge 1$ і $t \ge 0$ (див., наприклад, [7]), для довільного фіксованого $\alpha > 0$ отримуємо

$$\lim_{s\to+\infty}(s-n)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha) = \lim_{s\to+\infty}(s-\sigma)M\Big(\frac{1}{\alpha}\Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) \le$$
$$\le K\lim_{s\to+\infty}\omega(s/2)\frac{M(1/s^{1/p})}{1/s} = 0. \tag{17}$$

Тому, і в цьому випадку знайдеться принаймні одне число $s_\alpha > \sigma$, яке реалізує точну верхню межу в правій частині співвідношення (16). Отже, з врахуванням (16) маємо

$$F_\sigma(m,\alpha) \le \sup\{(s-\sigma)M(\widetilde{\omega}_s/\alpha)\colon s \in (0,a]\} = (s_\alpha - \sigma)M(\widetilde{\omega}_{s_\alpha}/\alpha). \tag{18}$$

Далі, для довільної функції $m \in \mathcal{M}_p^\omega$ покладемо

$$\alpha_m := \mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha\Big)\,dt \le 1\Big\}, \tag{19}$$

і розглянемо функцію $\bar{m} = \bar{m}(t)$ таку, що

$$\bar{m}(t) = \begin{cases} \big(\int_0^s \omega^{-p}(\tau)\,d\tau\big)^{-1}\omega^{-1}(t), & t \in (0;s]; \\ 0, & t \in (s;a), \end{cases} \tag{20}$$

де $s = s_{\alpha_m}$, число s_{α_m} визначається співвідношенням (18) при $\alpha = \alpha_m$. Тоді, очевидно, що $\bar{m} \in \mathcal{M}_p^\omega$, і виконується співвідношення

$$F_\sigma(m, \alpha_m) = \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)m(t)/\alpha_m\Big)\; dt \le \int_\sigma^a M\Big(\omega(t)\bar{m}(t)/\alpha_m\Big)\; dt = F_\sigma(\bar{m}, \alpha_m),$$

звідки, з врахуванням (19), випливає, що $\mathcal{E}_\sigma(m;\omega)_{L_M} \le \mathcal{E}_\sigma(\bar{m};\omega)_{L_M}$.

Позначимо через $\bar{\mathcal{M}}_p^\omega$ множину всіх функцій $\bar{m} \in \mathcal{M}_p^\omega$, для кожної з яких існує таке число $s \in (\sigma; a)$, $s = s(\bar{m})$, що має місце зображення (19). Тоді,

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\omega, \omega)_{L_M} = \sup\{\mathcal{E}_\sigma(\bar{m};\omega)_{L_M} :\; \bar{m} \in \bar{\mathcal{M}}_p^\omega\}.$$

Звідси, на підставі (20) отримуємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^\omega, \omega)_{L_M} = \sup_{s\in(\sigma;a)} \inf\Big\{\alpha > 0 : (s-\sigma)M\Big(\Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}/\alpha\Big) \le 1\Big\} = \sup_{s\in(\sigma;a)} \xi_s,$$

де числа ξ_s визначаються рівністю

$$\xi_s := \Big(\int_0^s \omega^{-p}(t)\; dt\Big)^{-\frac{1}{p}} \Big/ M^{-1}\Big(\frac{1}{s-\sigma}\Big),$$

M^{-1} — функція, обернена до M. При цьому внаслідок (17) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число s_ε, що для всіх $s > s_\varepsilon$ величина $(s-\sigma)M(\widetilde{\omega}_s/\varepsilon) < 1$ і, тому, для всіх $s > s_\varepsilon$, $\xi_s < \varepsilon$. Звідси випливає, що завжди існує таке число s^*, що $\sup\{\xi_s = \xi_{s^*} : s > \sigma\}$.

Для завершення доведення леми 1 достатньо помітити, що функція m^*, визначена рівністю (13), належить до множини $\mathcal{M}_p^\omega$, і для неї

$$\mathcal{E}_\sigma(m^*, \omega)_{L_M} = \Big(\int_0^{s^*} \omega^{-p}(t)\; dt\Big)^{-\frac{1}{p}} \Big/ M^{-1}\Big(\frac{1}{s^*-\sigma}\Big). \qquad \square$$

2.3. Доведення теореми 1. Нехай $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$, $p \in (0, +\infty)$ і M — деяка функція Орлича така, що функція $M(t^{1/p})$ теж є функцією Орлича. Через $G_\sigma = G_\sigma(\varphi, p)$ позначимо праву частину співвідношення (5). Доведемо спочатку, що для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$ виконується нерівність

$$e_\sigma(\varphi\, y) \le G_\sigma. \tag{21}$$

Для цього розглянемо функції y_n, які визначаються рівністю

$$\varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & \mathbf{x} :\; \frac{k}{n} \le \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) < \frac{k+1}{n},\; k \in \{0, 1, \ldots, n^2-1\}; \\ n, & \mathbf{x} :\; \varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \ge n. \end{cases} \tag{22}$$

Бачимо, що $y_n \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) \ge \varphi(\mathbf{x})y_n(\mathbf{x})$ для довільних $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ та $n \in \mathbb{N}$. Тому, $e_\sigma(\varphi\, y_n)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \le e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$. Внаслідок того, що $\varphi \in \Phi(\mathbb{A})$ і $y \in L_M(\mathbb{A}; d\mu)$, маємо

$$\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Оскільки для фіксованої множини $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$

$$\|\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \le \|\varphi\, y - \varphi y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} + \|\varphi\, y_n - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} +$$
$$+ \|\chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \le 2\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} + \|\varphi\, y_n - \chi_{\gamma_\sigma}\varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)},$$

то, звідси отримуємо

$$|e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} - e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}| \le 2\|\varphi\, y - \varphi\, y_n\|_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Тому, якщо довести нерівність (21) для всіх функцій y_n вигляду (22), то звідси випливатиме, що ця нерівність виконується і для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$.

Насправді ми доведемо загальніший факт. Для даної функції φ через $\mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ позначимо множину всіх функцій $y \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, для яких добуток $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x})$ набуває на множині $\mathbb{A}$ тільки скінченну кількість значень (зрозуміло, що у випадку, коли $\mathrm{mes}_\mu \mathbb{A} = +\infty$, ці значення не дорівнюють нулю лише на множинах скінченної міри), і переконаємось, що нерівність (21) виконується для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$.

Отже, нехай функція $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ така, що при деякому $n \in \mathbb{N}$ добуток $\varphi(\mathbf{x})y(\mathbf{x}) =: f(\mathbf{x})$ набуває на множині $\mathbb{A}$ лише n різних відмінних від нуля значень f_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, які для зручності впорядкуємо за спаданням $f_1 > f_2 > \ldots > f_n > 0$, і покладемо $\mathbb{A}_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{A} :\ f(\mathbf{x}) = f_k\}$, $\mu(\mathbb{A}_k) =: \mu_k$.

Тоді,

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf\Big\{ \inf\Big\{ \alpha > 0\colon \int_{A\setminus\gamma_\sigma} M\Big(f(\mathbf{x})/\alpha\Big)\, d\mu \Big\} \colon \gamma_\sigma \Big\} =$$

$$= \inf\Big\{ \alpha > 0 :\ \sum_{k=1}^{n} M(f_k/\alpha)\mu_k - \sup_{\gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} M\Big(f(\mathbf{x})/\alpha\Big)\, d\mu \Big\}. \tag{23}$$

Переконаємось, що можна вважати $\mu_1 = \mu(A_1) \ge \sigma$. З цією метою для даного $\sigma \in (0, a)$ через k_σ позначимо найменше натуральне число таке, що $\sum_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k \ge \sigma$, і покладемо $\widetilde{\mathbb{A}}_1 = \cup_{i=1}^{k_\sigma} \mathbb{A}_i$, $\widetilde{f}_1 = f_{k_\sigma}$; $\widetilde{\mathbb{A}}_k = \mathbb{A}_{k_\sigma+k-1}$ и $\widetilde{f}_k = f_{k_\sigma+k-1}$, де $k \in \{2, \dots, n-k_\sigma+1\}$. Розглянемо функцію $\widetilde{y}(\mathbf{x})$ таку, що $\widetilde{y}(\mathbf{x}) = 0$ при $t \in \mathbb{A} \setminus \cup_{i=1}^{n-k_\sigma+1} \widetilde{\mathbb{A}}_i$, і

$$\varphi(\mathbf{x})\, \widetilde{y}(\mathbf{x}) = \widetilde{f}_k, \quad \mathbf{x} \in \widetilde{\mathbb{A}}_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, n - k_\sigma + 1\}.$$

Для цієї функції $\mu(\widetilde{\mathbb{A}}_1) \ge \sigma$, $\|\widetilde{y}\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le \|y\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le 1$, тобто, $\widetilde{y} \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ і

$$e_\sigma(\varphi\, \widetilde{y})_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf\Big\{ \alpha > 0 :\ M\Big(\frac{\widetilde{f}_1}{\alpha}\Big)(\mathrm{mes}_\mu \widetilde{\mathbb{A}}_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n-k_\sigma+1} M\Big(\frac{\widetilde{f}_k}{\alpha}\Big)\mu(\widetilde{\mathbb{A}}_k) \Big\} =$$

$$= \inf\Big\{ \alpha > 0 :\ M\Big(\frac{f_{k_\sigma}}{\alpha}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{k_\sigma} \mu_k - \sigma\Big) + \sum_{k=k_\sigma+1}^{n-1} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k \Big\} = e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}.$$

Тому, надалі вважатимемо, що μ-міра множини $\mathbb{A}_1$ не менша за σ.

На проміжку $t \in (0, a)$ розглянемо функцію

$$m'(t) = m'(y, t) = \begin{cases} \bar{\varphi}^{-1}(t) f_k, & t \in (a_{k-1}, a_k],\ k \in \{1, \dots, n\}; \\ 0, & t \in (a_n, a), \end{cases} \tag{24}$$

де $\bar{\varphi}(t)$ — незростаюча перестановка функції $\varphi(\mathbf{x})$, і $a_k := \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, $a_0 := 0$. Переконаємось, що функція $m' \in U_p(0, a)$ у просторі $L_p(0, a)$ і для неї виконується співвідношення

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf_{\delta_\sigma \in (0,a)} \inf\Big\{ \alpha > 0 :\ \int_{(0;a)\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\bar{\varphi}(t) m'(t)/\alpha\Big)\, dt \Big\} = \mathcal{E}_\sigma(m', \bar{\varphi})_{L_M}. \tag{25}$$

Цим задачу про оцінку величини $e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)}$ для $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ буде зведено до дослідження величин $\mathcal{E}_\sigma(m', \bar\varphi)_{L_M}$ на множині всіх функцій $m' \in U_p(0,a)$ вигляду (24).

Враховуючи, що $a_1 = \mu_1 \ge \sigma$, маємо

$$\mathcal{E}_\sigma(m', \bar\varphi)_{L_M} = \inf\Big\{\alpha > 0:\ M\Big(\frac{f_1}{\alpha}\Big)(a_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)(a_k - a_{k-1})\Big\} =$$
$$= \inf\Big\{\alpha > 0:\ M\Big(\frac{f_1}{\alpha}\Big)(\mu_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k\Big\}. \tag{26}$$

З іншого боку, внаслідок (23)

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf\Big\{\alpha > 0:\ \sum_{k=1}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k - \sup_{\gamma_\sigma}\int_{\gamma_\sigma} M\Big(f(\mathbf{x})/\alpha\Big)\ d\mu\Big\} =$$
$$= \inf\Big\{\alpha > 0:\ M\Big(\frac{f_1}{\alpha}\Big)(a_1 - \sigma) + \sum_{k=2}^{n} M\Big(\frac{f_k}{\alpha}\Big)\mu_k\Big\}. \tag{27}$$

Порівнюючи вирази в правих частинах співвідношень (26) та (27), бачимо, що, справді, $e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \mathcal{E}_\sigma(m', \bar\varphi)_{L_M}$. Нерівність $\|m'\|_{L_p(0,a)} \le \|y\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le 1$ доводиться цілком подібно до доведення рівності (3.23) у статті [3].

Нехай, далі, $\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}$ — множина всіх невід'ємних функцій $m \in U_p(0,a)$, для яких добуток $\bar\varphi(t)m(t)$ на проміжку $(0,a)$ не зростає і набуває лише скінченну кількість значень. З (24) та нерівності $\|m'\|_{L_p(0,a)} \le \|y\|_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} \le 1$ випливає, що $m' \in \mathcal{M}_p^{\bar\varphi}$, і, тому, враховуючи (25), для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$ отримуємо

$$e_\sigma(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \le \sup_{m\in\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}}\ \inf_{\gamma_\sigma\in(0,a)} \inf\Big\{\alpha > 0: \int_{(0;a)\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\frac{\bar\varphi(t)m(t)}{\alpha}\Big)dt\Big\} = \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi)_{L_M}. \tag{28}$$

Для знаходження величини $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}; \bar\varphi)_{L_M}$ скористаємося доведеною вище лемою 1. Покладаючи $\omega(t) = \bar\varphi(t)$, $t \in (0,a)$, бачимо, що $\omega \in \Omega$, і з (12) отримуємо

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{M}_p^{\bar\varphi}, \bar\varphi)_{L_M} = \sup\Big\{\Big(\int_0^s \bar\varphi^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big/ M^{-1}\Big(\frac{1}{s-\sigma}\Big):\ s \in (\sigma, a]\Big\}. \tag{29}$$

При цьому точна верхня межа в правій частині останнього співвідношення досягається при деякому скінченному значенні $s = s^*$. Об'єднуючи (28) та (29), приходимо до висновку, що нерівність (21) виконується для довільної функції $y \in \mathcal{U}_p^\varphi(\mathbb{A})$, а отже, і для довільної функції y з множини $\mathcal{U}_p(\mathbb{A})$.

Для завершення доведення теореми 1 досить переконатись, що існує така функція $y^* = y^*(\mathbf{x}, \bar\varphi, \sigma, p) \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$, що

$$e_\sigma(\varphi\, y^*)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \Big(\int_0^{s^*} \bar\varphi^{-p}(t)dt\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big/ M^{-1}\Big(\frac{1}{s^*-\sigma}\Big).$$

З цією метою виділимо з множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}:\ \varphi(\mathbf{x}) \ge \bar\varphi(s^*-)\}$ довільну вимірну підмножину $\mathbb{E}$ μ-міри s^*, яка містить множину $\{\mathbf{x} \in \mathbb{A}:\ \varphi(\mathbf{x}) > \bar\varphi(s^*-)\}$, і розглянемо функцію y^*, визначену співвідношенням (6). Для неї маємо: $y^* \in L_M(\mathbb{A}, d\mu)$ і

$$\|y^*\|^p_{L_p(\mathbb{A},d\mu)} = \int_{\mathbb{A}} y^*(\mathbf{x})^p\ d\mu = \int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})\ d\mu\Big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{t})\ d\mu\Big)^{-1} = 1,$$

тобто, $y^* \in \mathcal{U}_p(\mathbb{A})$. Оскільки для довільного числа $h \geq 0$ μ-міра множини $\{\mathbf{x} \in \mathbb{E} : \varphi(\mathbf{x}) \geq h\}$ дорівнює мірі Лебега множини $\{t \in (0, s^*) :\ \bar{\varphi}(t) \geq h\}$, то

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x})\ d\mu = \int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t)\ dt,$$

і, тому,

$$e_\sigma(\varphi\, y^*)_{L_M} = \inf_{\gamma_\sigma} \inf \Big\{\alpha > 0 :\ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi(\mathbf{x}) y^*(\mathbf{x})/\alpha\Big)\ d\mu \leq 1\Big\} =$$

$$= \inf \Big\{\alpha > 0 :\ (s^* - \sigma) M\Big(\frac{1}{\alpha}\Big(\int_{\mathbb{E}} \varphi^{-p}(\mathbf{x}) d\mu\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big) \leq 1\Big\} =$$

$$= \inf \Big\{\alpha > 0 :\ M\Big(\frac{1}{\alpha}\Big(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt\Big)^{-\frac{1}{p}}\Big) \leq \frac{1}{s^* - \sigma}\Big\} = \frac{\Big(\int_0^{s^*} \bar{\varphi}^{-p}(t) dt\Big)^{-\frac{1}{p}}}{M^{-1}(\frac{1}{s^*-\sigma})}.$$

Отже, співвідношення (5) справді є рівністю і теорему 1 доведено.

3. Доведення теореми 2. Функція $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x})$ істотно обмежена на $\mathbb{A}_\sigma := \mathbb{A} \setminus \gamma_\sigma$. Тому, її неспадна перестановка обмежена і виконується рівність

$$\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = \lim_{v \to 0+} \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v) =: y_\sigma.$$

Якщо при цьому $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+) = y_\sigma = 0$, то майже скрізь на $\mathbb{A}_\sigma$ $\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) = 0$, і в такому випадку $E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = 0 = \bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)$. Якщо ж $y_\sigma > 0$, то при кожному $y > 0$ покладемо $e_y = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}_\sigma : \varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) \geq y\}$. Тоді при $y > y_\sigma$ μ-міра множини e_y дорівнює нулю, і $\mu(e_y) > 0$ при $0 < y < y_\sigma$. Звідси, зокрема, випливає, що $y_\sigma = \operatorname{ess\,sup}\{\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{t}) \colon \mathbf{t} \in \mathbb{A}_\sigma\}$.

Для довільної функції $h \in U_M^+(\mathbb{A})$ маємо

$$\int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi(\mathbf{x}) h(\mathbf{x})/y_\sigma\Big)\ d\mu \leq \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M(h(\mathbf{x}))\ d\mu \leq 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf \Big\{\alpha > 0\ :\ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi(\mathbf{x}) h(\mathbf{x})/\alpha\Big)\ d\mu \leq 1\Big\} \leq y_\sigma$$

і, тому,

$$E_{\gamma_\sigma}(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \sup\{E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} \colon y \in U_M^+(\mathbb{A})\} \leq y_\sigma. \tag{30}$$

Для доведення (7) лишається встановити, що строгої нерівності в останньому співвідношенні бути не може.

Нехай y — довільне число з проміжку $(0, y_\sigma)$ і $\bar{e}_y$ — довільна підмножина множини e_y, міра якої не перевищує одиниці: $\text{mes}_\mu \bar{e}_y \leq 1$. Покладемо

$$h_y(\mathbf{x}) = \begin{cases} M^{-1}\Big((\text{mes}_\mu\ \bar{e}_y)^{-1}\Big), & \mathbf{x} \in \bar{e}_y; \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{A} \setminus \bar{e}_y. \end{cases}$$

Тоді, $h_y \in U_M^+(\mathbb{A})$, і водночас

$$y \leq E_{\gamma_\sigma}(\varphi\, h_y)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf \Big\{\alpha > 0\ :\ \int_{\mathbb{A}\setminus\gamma_\sigma} M\Big(\varphi_{\gamma_\sigma}(\mathbf{x}) h_y(\mathbf{x})/\alpha\Big)\ d\mu \leq 1\Big\} \leq y_\sigma.$$

Спрямовуючи y до y_σ, бачимо, що справді, в (30) строгої нерівності бути не може, і, тому, це завершує доведення (7).

Розглядаючи точні нижні межі по множині Γ_σ обох частин (7), отримуємо

$$D_\sigma(\varphi, M)_{L_M(\mathbb{A};d\mu)} = \inf\{\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)\colon \gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma\}.$$

Враховуючи співвідношення (8), робимо висновок, що найменше значення величини $\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)$ отримаємо у випадку, коли $\gamma_\sigma = \gamma_\sigma^*$, і це значення дорівнює $\bar{\varphi}(\sigma+)$

$$\inf\{\bar{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+)\colon \gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma\} = \bar{\varphi}(\sigma+),$$

тобто, співвідношення (9) доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Stechkin S.B. *On absolute convergence of orthogonal series*// Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1955. – V.102, №1. – P. 37–40. (in Russian)
2. Stepanets A.I., Shidlich A.L. *Best approximations of integrals by integrals of finite rank*// J. Approx. Theory. – 2010. – V.162. – P. 323–348.
3. Stepanets A.I., Shidlich A.L. *Extremal problems for integrals of nonnegative functions*// Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. – 2010. – V.74, №3. – P. 169–224. (in Russian)
4. De Vore R. *Nonlinear approximation*// Acta Numer. – 1998. – V.7. – P. 51–150.
5. Romanyuk A.S. *Best M-term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables*// Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. – 2003. – V.67, №2. – P. 61–100. (in Russian)
6. Stepanets A.I. *Extremal problems of approximation theory in linear spaces*// Ukrain. Mat. Zh. – 2003. – V.55, №10. – P. 1378–1410. (in Russian)
7. Shidlich A.L., Chaichenko S.O. *Approximative properties of diagonal operators in Orlicz spaces*// arXiv preprint. – 2014. – arXiv:1405.1542. – 11 p.
8. Shidlich A.L., Chaichenko S.O. *On some inequalities of Chebyshev type*, in press.
9. Shidlich A.L., Chaichenko S.O. *On some inequalities of Chebyshev type*// arXiv preprint. – 2014. – arXiv:1405.1256. – 6 p.

Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences
andy709@list.ru, shidlich@imath.kiev.ua
Donbas State Pedagogical University
stolch@mail.ru

Надійшло 1.10.2014