Математичні Студії. Т.42, №2 Matematychni Studii. V.42, No.2

УДК 519.63

А. А. Кіндибалюк

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ЛІ-АЛГЕБРАЇЧНИХ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

A. A. Kindybaliuk. *Application of generalized method of Lie algebraic discrete approximations for solving Cauchy problem with heat transfer equation*, Mat. Stud. **42** (2014), 181–194.

Approximation properties and conditions of convergence of numerical scheme for solving Cauchy problem with heat transfer equation by means of generalized method of Lie-algebraic discrete approximations have been proved. Reduction of the Cauchy problem into system of linear algebraic equations provides power rates of convergence by all variables in equation.

А. А. Киндыбалюк. *Применение обобщенного метода Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций к решению задачи Коши для уравнения теплопроводымости* // Мат. Студії. – 2014. – Т.42, №2. – С.181–194.

Доказаны аппроксимационные свойства и условия сходимости вычислительной схемы обобщенного метода Ли-алгебраических дискретных аппроксимаций для решения задачи Коши с уравнением теплопроводности. Редукция задачи Коши для уравнения адвекции к системе линейных алгебраических уравнений обеспечивает степенную сходимость по всех переменных, входящих в уравнение.

1. Вступ. Багато важливих явищ природи, задач техніки та фізики описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними (ДРЧП). Незважаючи на наявність багатьох аналітичних методів, розв'язки таких рівнянь, як правило, не можна знайти в явному вигляді (точно), тому для дослідження таких задач широко використовуються різні наближені числові та аналітично-числові методи. Одним з таких є метод Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій ([2, 5, 6, 9, 11–17, 19–23]), який вперше застосував Ф. Калоджеро у 1983 році для обчислення власних значень диференціальних операторів для спектральної задачі ([15, 16]). Цей метод базується на використанні деякої алгебри Лі та її квазізображення.

У 1988 році запропоновано застосування ([6, 9]) Лі-алгебраїчного методу для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними, яке отримало назву *"Лі-алгебраїчна дискретна апроксимація"*. Ідея даного методу полягає у редукції ДРЧП до системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з використанням квазіпредставлень алгебри Лі ([6, 9]). У [6] представлено метод без аналізу збіжності алгоритму. Збіжність обчислювальної схеми для лінійного еволюційного ДРЧП встановлено в [9] шляхом дослідження еволюції похибки. У 1996 році Ф. Казас ([17]) також запропонував розв'язування задач Коші для ДРЧП на основі представлень алгебр Лі, проте за

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K05, 41A05, 41A10, 41A25, 41A65, 65M06, 65M15, 65M70.
Keywords: method of Lie-algebraic discrete approximations; power convergence; heat transfer equation.

допомогою такого методу можна розв'язати лише обмежений клас диференціальних рівнянь. У [21] знайдено оцінку порядку збіжності для диференціального оператора другого порядку за допомогою поліномів Лагранжа.

У [6], [13] розглянуто задачу Коші для системи еволюційних рівнянь із частинними похідними

$$\begin{cases} u_t = K(t,x,\partial)u + f(t,x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^q,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi \in B, \end{cases} \tag{1}$$

де B — деякий простір Банаха, оператор $K\colon B \to B$ — деякий (заданий) лінійний диференціальний оператор у просторі Банаха.

У якості базової алгебри вибрано алгебру Гайзенберга-Вейля

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{j=1}^{q} \{x_j, \partial/\partial x_j, 1\},$$

яка є скінченновимірною алгеброю Лі.

Як і в методі Калоджеро, запропоновано розглядати лінійні оператори

$$X_j^{(n)}, Z_j^{(n)}, I^{(n)} \in \bigotimes_{j=1}^{q} \mathbb{R}^{n_j}$$

як "квазізображення" операторів алгебри Гайзенберга-Вейля $x_j, \partial/\partial x_j, 1,\ j = \overline{1,q}$ відповідно.

Шляхом побудови квазізображення диференціального оператора K у просторі лінійних операторів над $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{Z}_+$, задача (1) зводиться до задачі Коші для системи ЗДР вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{du_{(n)}}{dt} = K_{(n)}(t)u_{(n)} + f_{(n)}(t), \\ u_{(n)}|_{t=0} = \varphi_{(n)} \in B_{(n)}, \end{cases} \tag{2}$$

де $B_{(n)}$ — скінченновимірний простір, що ізоморфний $\mathbb{R}^N, N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_q$. Як і в методі Калоджеро, редукція (2) задачі (1) на простір $B_{(n)}$ отримана шляхом q-вимірної алгебраїчної інтерполяції на q-вимірному кубі $D \supset \Omega$.

При використанні цього методу зроблено важливе припущення про те, що диференціальний оператор K належить до універсальної огортуючої алгебри $U(\mathcal{G})$ алгебри $\mathcal{G}$ Гайзенберга-Вейля. На практиці це означає, що оператор K можна подати як суму деяких суперпозицій операторів $x_j, \partial/\partial x_j, 1$. Це, зокрема, означає, що для безпосереднього застосування схеми Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій необхідно, щоб диференціальний оператор K був лінійним оператором.

Для розв'язування задачі Коші (1) та зредукованої задачі (2) у [3] запропоновано узагальнений метод розв'язування шляхом зведення задач до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, для чого введено додатково тривимірну алгебру Лі $\mathcal{G}_t := \{t, \partial/\partial t, 1\}$, для якої побудовано скінченновимірні квазізображення $X_t^{(n)}, Z_t^{(n)}, I_t^{(n)}$.

Оскільки, згідно припущення, оператор K є лінійним оператором, то розв'язок задач (1) і (2) можна отримати як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Якщо коефіцієнти диференціального оператора не змінюються при зміні обчислювального експерименту, а змінюються лише початкові умови чи функція у правій частині, то розв'язування задачі Коші зводиться до множення оберненої матриці на вектор ([3]).

Зазначимо, що у [6] схему Лі-алгебраїчних апроксимацій запропоновано розглядати у контексті загальної апроксимаційної схеми, викладеної у В. А. Треногіна, хоча відповідні умови теореми про збіжність загальної апроксимаційної схеми не були перевірені. У [19] для збіжності припускали, що оператор A_h має таку властивість

$$\exists\alpha > 0\colon \|A_h u_h\|_{C_h} \geq \alpha \|u_h\|_{B_h},$$

де B_h, C_h — деякі скінченновимірні простори, а в [5] умовою збіжності було існування обмеженого оберненого оператора задачі, і оцінка норми похибки залежала від норми оберненого оператора задачі.

Окреслимо мету даної роботи:

1. Узагальнення методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші для еволюційних рівнянь шляхом дискретизації як за просторовими змінними так і за часовою змінною.
2. Дослідження апроксимаційних властивостей узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій та доведення його збіжності.
3. Проведення числових тестів розв'язування задачі Коші узагальненим методом Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій та порівняння з методом скінченних різниць та класичним методом Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій.

Структура роботи відповідає сформульованій меті, а саме у другому пункті сформульовано модельну задачу Коші для рівняння теплопровідності, у третьому пункті за допомогою введеної алгебри Лі та побудованих квазізображень елементів алгебри Лі побудовано схему наближеного відшукання розв'язку задачі. Досліджено ранг скінченновимірного квазізображення задачі. У четвертому пункті отримано оцінки такого квазізображення. У п'ятому пункті доведено збіжність побудованої схеми. Порівняння чисельних схем подано у шостому пункті.

2. Формулювання задачі. Розглянемо область $\Omega = (0, 1)$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$, $T < +\infty$, простори Банаха у вигляді $V = C^\infty_{x,t}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q_T}\right)$ та $C = C^\infty_{x,t}(Q_T)$. Сформулюємо задачу Коші для одновимірного рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} \text{задано коефіцієнт теплопровідності } a \in \mathbb{R}, a > 0, \\ \text{початкову температуру } \varphi = \varphi(x) \in C^\infty_x(\Omega), \\ \text{знайти таку функцію } u = u(x,t) \in V, \text{ що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \tag{3}$$

Здійснивши підстановку $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ у (3), отримаємо задачу Коші для функції $v(x,t)$ з однорідною початковою умовою

$$\begin{cases} \text{Задано коефіцієнт теплопровідності } a \in \mathbb{R}, a > 0. \\ \text{Знайти таку функцію } v = v(x,t) \in V, \text{ що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\dfrac{d^2 \varphi}{dx^2}, \ \forall (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язок задачі (4) шукаємо у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$. Ввівши для задачі (4) позначення

$$A := \frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial^2}{\partial x^2},\; f := a\frac{d^2\varphi}{dx^2} \in C(Q_T), \tag{5}$$

отримаємо задачу для операторного рівняння

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A\colon B \to C \text{ та елемент } f \in C. \\ \text{Знайти елемент } v \in B \text{ такий, що } Av = f. \end{cases} \tag{6}$$

Задачу Коші зведено до задачі для операторного рівняння, яку розв'яжемо узагальненим методом Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій.

3. Побудова обчислювальної схеми. Введемо алгебру Гайзенберга-Вейля

$$\mathcal{G} := \{x, \partial/\partial x, 1\} \bigoplus \{t, \partial/\partial t, 1\},$$

яка є алгеброю Лі. Оскільки оператор A належить універсальній огортуючій алгебрі $U(\mathcal{G})$ алгебри $\mathcal{G}$, то він є лінійною комбінацією базових поліномів над алгеброю Гайзенберга-Вейля. Квазізображення A_h оператора A побудуємо як лінійну комбінацію скінченновимірних квазіпредставлень алгебри $\mathcal{G}$. З цією метою зафіксуємо два натуральні числа N_x та N_t, де N_x — кількість вузлів за змінною x, N_t — кількість вузлів за змінною t. Згідно з теоремою Вейєрштрасса ([4], [10]), множина довільних поліномів з дійсними коефіцієнтами є щільною множиною в просторі $C(Q_T)$, тому розв'язок (6) шукатимемо у вигляді інтерполяційного полінома.

Для кожного вузла x_j за змінною x асоційовано базисний поліном Лагранжа $l_j(x)$, який задовольняє умову $l_j(x_i) = \delta_{ij}$, де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для кожного вузла t_j за змінною t асоційовано поліном Лагранжа $l_j(t)$ такий, що $l_j(t_i) = \delta_{ij}$,

Нехай $M_j = (x_{jx}, t_{jt})$ — вузли області Q_T, де j_x — номер вузла на осі x, j_t — номер вузла на осі t. Набір таких вузлів позначимо $Q_{T,h}$. Очевидно, що $Q_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{N_x} \times \{t_j\}_{j=1}^{N_t}$. Вузли занумеруємо у спосіб $j = (j_t - 1)N_x + j_x$. Тоді поліном Лагранжа, що асоційований з вузлом M_j, має вигляд $l_j(x,t) = l_{jx}(x)l_{jt}(t)$. Отже, апроксимація розв'язку (6) набуде вигляду

$$v_h(x,t) = \sum_{j_t=1}^{N_t}\sum_{j_x=1}^{N_x} v_j l_{j_x}(x) l_{j_t}(t) = \overline{v}\left(l(t) \otimes l(x)\right), \tag{7}$$

де $\overline{v} = \{v_j\}_{j=1}^{N_x N_t}$ — відповідний вектор значень апроксимації, символ $\otimes$ позначає тензорний добуток, $l(x) = \{l_1(x), l_2(x), \dots, l_{N_x}(x)\}^\top$, $l(t) = \{l_1(t), l_2(t), \dots, l_{N_t}(t)\}^\top$ — відповідні набори поліномів Лагранжа за змінними x, t, $\top$ — знак траспонування.

Для побудови обчислювальної схеми розв'язування задачі (4), підставимо (7) у операторне рівняння (6) і отримаємо $\overline{v}\,(l'(t)\otimes l(x) - al(t)\otimes l''(x)) = f(x,t)$. Якщо послідовно для кожної змінної вибрати $i_x, j_x = \overline{1, N_x}$, $i_t, j_t = \overline{1, N_t}$, то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) вигляду $A_{1,h}v_h = F_h$, де

$$A_{1,h} := Z_t \otimes I_x - aI_t \otimes Z_x^2,\ F_h = \{f(x_{i_x}, t_{j_t})\}_{i_x=1, j_t=1}^{N_x, N_t},$$

— скінченновимірні квазізображення $Z_x, Z_x^2, Z_t, I_x, I_t$, які побудовано за такими правилами

$$Z_{x,ij} = l_j'(x_i),\ i,j = \overline{1, N_x},\ Z_x^2 = Z_x Z_x,\ Z_{t,ij} = l_j'(t_i),\ i,j = \overline{1, N_t},$$
$$I_{x,ij} = l_j(x_i) = \delta_{ij},\ i,j = \overline{1, N_x},\ I_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij}, i,j = \overline{1, N_t}.$$

На підставі теореми про ранг скінченновимірного зображення ([14]) ранги відповідних квазіпредставлень мають значення

$$\mathrm{rank}(Z_t) = N_t - 1,\ \mathrm{rank}(I_x) = N_x,\ \mathrm{rank}(I_t) = N_t,\ \mathrm{rank}\, Z_x^2 = N_x - 2.$$

Ранги матриць $Z_t \otimes I_x, I_t \otimes Z_x^2$ набудуть значень

$$\mathrm{rank}\,(Z_t \otimes I_x) = (N_t - 1)N_x,\ \mathrm{rank}\left(I_t \otimes Z_x^2\right) = (N_x - 2)N_t.$$

Так як при побудові матриці ми врахували усі вузли, то кількість рядків матриці становить $N_x N_t$. Ранг матриці квазізображення є менший ніж розмірність матриці, отже, ми не можемо отримати розв'язок.

Оскільки початкові умови однорідні, то вважатимемо, що базисом простору апроксимації є множина поліномів Лагранжа, без поліномів асоційованих з початковим моментом часу. Тобто множина поліномів Лагранжа для часової змінної є $\tilde{l}(t) = \{l_2(t), l_3(t), \ldots, l_{N_t}(t)\}$, причому

$$\forall l_i \in \tilde{l}(t)\colon l_i|_{t=0} = 0 \Rightarrow \forall l_i \in \tilde{l}(t)\colon l_i \in B,\ i = \overline{2, N_t}.$$

Розмірність $\dim \tilde{l}(t) = N_t - 1$. Оскільки система функцій $l_x \otimes \tilde{l}_t \in B$ лінійно незалежна, то вважатимемо, що вона формує базис простору апроксимацій B_h.

Вилучивши вузли, що асоційовані з початковим моментом часу, отримаємо нову систему вузлів $\tilde{Q}_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{N_x} \times \{t_j\}_{j=2}^{N_t}$.

Отже, скінченновимірні квазізображення в просторі B_h мають вигляд

$$Z_{x,ij} = l_j'(x_i),\ i,j = \overline{1, N_x},\ \tilde{Z}_{t,ij} = l_j'(t_i),\ i,j = \overline{2, N_t},$$
$$I_{x,ij} = l_j(x_i) = \delta_{ij},\ i,j = \overline{1, N_x},\ \tilde{I}_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij},\ i,j = \overline{2, N_t}.$$

Ранги скінченновимірних квазіпредставлень $\tilde{Z}_t \otimes I_x, I_t \otimes Z_x^2$ набули значень

$$\mathrm{rank}\left(\tilde{Z}_t \otimes I_x\right) = (N_t - 1)N_x,\ \mathrm{rank}\left(\tilde{I}_t \otimes Z_x^2\right) = (N_x - 2)(N_t - 1).$$

Скінченновимірне квазізображення оператора задачі (6) набуде вигляду

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_x - a\tilde{I}_t \otimes Z_x^2. \tag{8}$$

Кількість рядків у матриці (8) становить $(N_t - 1)N_x$.

Лема 1. *Матриця* $\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2$ *нільпотетна.*

Доведення. На підставі властивості тензорного добутку ([18]) матриць A і B

$$(A \otimes B)\,(A \otimes B) = A^2 \otimes B^2$$

переконуємося, що справедливе співвідношення $(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2)^k = (\tilde{Z}_t^{-1})^k \otimes (Z_x)^{k+1}$. Зважаючи на те, що при $k = N_x$ маємо $(Z_x)^k = 0$, $(Z_x^2)^{k-1} = (Z_x)^k = 0$, отже

$$\forall k \geq N_x - 1\colon \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2\right)^k = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^k \otimes (Z_x)^{k+1} = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^k \otimes 0 = 0,$$

що доводить лему. □

Позначимо I^N одиничну матрицю $\tilde{I}_t \otimes I_x$.

Лема 2. *Матриця* $I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2$ *має обернену матрицю і її ранг є* $(N_t - 1)N_x$.

Доведення. Запишемо обернену матрицю $(I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2)^{-1}$ у вигляді формального ряду

$$\left(I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2\right)^k.$$

Оскільки матриця $\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2$ на підставі леми 1 є нільпотентна, то

$$\left(I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{N_x-1} \left(a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2\right)^k. \tag{9}$$

Ряд (9) є скінченний, отже, матриця $I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2$ має обернену і її ранг дорівнює кількості рядків у матриці, тобто $\operatorname{rank}(I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2) = (N_t - 1)N_x$. □

Теорема 1. *Ранг скінченновимірного квазізображення* A_h *є* $N_x(N_t - 1)$.

Доведення. Запишемо матрицю (8) у вигляді

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_x \left(\tilde{I}_t \otimes I_x - a\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_x^{-1}\right)\left(\tilde{I}_t \otimes Z_x^2\right)\right) = \tilde{Z}_t \otimes I_x \left(I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2\right).$$

У лемі 2 з'ясовано, що

$$\operatorname{rank}\left(I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2\right) = N_x(N_t - 1),\ \operatorname{rank}\left(\tilde{Z}_t \otimes I_x\right) = N_x(N_t - 1).$$

Оскільки для рангу двох матриць A, B виконується властивість

$$\operatorname{rank}(AB) = \min\left\{\operatorname{rank}(A),\ \operatorname{rank}(B)\right\},$$

то ранг скінченновимірного зображення набув значення

$$\operatorname{rank}(A_h) = \operatorname{rank}(\tilde{Z}_t \otimes I_x(I^N - a\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x^2)) = \min\left\{N_x(N_t - 1), N_x(N_t - 1)\right\} = N_x(N_t - 1),$$

що доводить теорему. □

Апроксимацію розв'язку (7) подамо у вигляді $v_h(x,t) = \sum_{j=N_x}^{N_x N_t} v_j l_j(x,t), \ \forall\,(x,t) \in Q_T$, або

$$v_h(M) = \sum_{j=N_x}^{N_x N_t} v_j l_j(M), \, \forall M \in Q_T, \tag{10}$$

де l_j — відповідний поліном Лагранжа, що асоційований з вузлом $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$.

Зазначимо, що оскільки $v_h|_{t=0} = 0$, то $v_h \in B_h \subset B$.

Підставивши (10) у операторне рівняння (6), отримаємо рівняння

$$\sum_{j=1}^{N_x N_t} v_j A\left(l_j(M)\right) = f(M), \, \forall M \in Q_T.$$

Вибравши послідновно $M := M_i \in \tilde{Q}_{T,h} \subset Q_T$, отримаємо СЛАР

$$\sum_{j=N_x}^{N_x N_t} v_j A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i} = f(M_i), \ i = \overline{1, N_x N_t}, \tag{11}$$

для визначення невідомих компонент вектора $\overline{v}$. Введемо позначення

$$A_{h,ij} = A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i}, \ f_{h,i} = f(M_i), \ i,j = \overline{N_x, N_x N_t}.$$

Зазначимо, що матриця A_h співпадає з скінченновимірним квазізображенням (8). Отже, ми отримали дискретне формулювання операторного рівняння

$$\begin{cases} \text{Задано оператор } A_h \colon B_h \to C_h \text{ та елемент } f_h \in C_h. \\ \text{Знайти такий елемент } v_h \in B_h, \text{ що } A_h v_h = f_h. \end{cases} \tag{12}$$

4. Апроксимаційні властивості схеми. Нехай N — розмірність просторів B_h, C_h. Введемо циліндричну норму [10] в просторах B_h, C_h

$$\|v\|_{B_h} = \|v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j^2}, \tag{13}$$

причому $\lim\limits_{N\to\infty} \|v\|_{B_h}^2 = \int_{Q_t} v^2 dxdt$.

Нехай $v \in W^{n_x n_t, \infty} = \{v \colon Q_t \to \mathbb{R} \colon D^\alpha v \in L^\infty(Q_t), \forall |\alpha| \le n_x n_t\}$, тобто функція v разом зі своїми всіма можливими похідними до $n_x n_t$ порядку належить до простору $L^\infty(Q_t)$.

Позначимо інтерполяційний поліном Лагранжа $v_I = v_I(x,t)$ розв'язку $v = v(x,t)$ задачі (4). Запишемо залишковий член ([1]) інтерполяційного полінома Лагранжа v_I

$$v(x,t) - v_I(x,t) = \frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\partial^{n_x} v(\xi,t)}{\partial x^{n_x}} + \frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_t} v(x,\eta)}{\partial t^{n_t}} - \frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_x+n_t} v(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^{n_x}\partial t^{n_t}}, \tag{14}$$

де $\omega_{n_x}(x) = \prod\limits_{i=1}^{n_x}(x - x_i)$, $\omega_{n_t}(t) = \prod\limits_{i=1}^{n_t}(t - t_i)$, $\xi \in \Omega, \eta \in (0,T], (\xi_1,\eta_1) \in Q_T$.

Теорема 2. *Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A на елементі $v \in B \cap W^{n_x n_t,\infty}(Q_t)$, причому похибка апроксимації в нормі простору C_h характеризується оцінкою*

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leq \ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |a|\ln(n_x)\ln(n_x-1)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-2}}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty. \tag{15}$$

Доведення. Так як норма простору C_h визначена як норма вектора, то подамо різницю $Av - A_h v$, $\forall v \in B$ у вигляді вектора.

Для виразу $Av \in C$ отримаємо вектор $\{Av(M_i)\}_{i=1}^N$, де $M_i \in \tilde{Q}_{T,h}$.

Для елемента $v \in B$ знаходимо вектор-стовпець $\{v(M_j)\}_{j=1}^N$, де $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$. Розглянемо i-ту компоненту вектора $A_h v$

$$\begin{aligned}(A_h v)_i &= (A(l_1)(M_i), \ldots, A(l_N)(M_i)) \,.\, (v(M_1), \ldots, v(M_N)))^\top = \\ &= \sum_{j=1}^N v(M_j) A\,(l_j)\,(M_i) = (Av_I)(M_i).\end{aligned}$$

Отже, врахувавши отримане співвідношення $(A_h v)_i = (Av_I)(M_i)$, у підсумку отримаємо $(Av - A_h v)_i = (Av(M) - Av_I(M))\,|_{M=M_i}$.

Покажемо, що

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leq \|A\,(v - v_I)\,\|_\infty. \tag{16}$$

Справді,

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left((Av(M) - Av_I(M))\,|_{M=M_i}\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left(\sup_{M \in Q_T} |A\,(v(M) - v_I(M))|\right)^2} \leq \|A\,(v - v_I)\,\|_\infty.$$

Діючи оператором $A = \partial/\partial t - a\partial^2/\partial x^2$ на залишковий член інтерполяційного полінома Лагранжа (14), отримаємо таке наближення

$$A\,(v - v_I) \approx a\frac{\omega''_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\partial^{n_x}v(\xi_1, y, t)}{\partial x^{n_x}} + \frac{\omega'_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_t}v(x, \eta)}{\partial t^{n_t}}.$$

Врахувавши, що $v \in W^{n_x n_t,\infty}$, отримаємо оцінку

$$\|A\,(v - v_I)\,\|_\infty \leq \frac{|\omega'_{n_t}(t)|}{(n_t)!}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |a|\frac{|\omega''_{n_x}(x)|}{(n_x)!}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty.$$

Оскільки значення полінома $\omega''_{n_x}(x)$ залежить від положення вузлів, тоді у випадку рівновіддалених вузлів отримаємо, що $|\omega''_{n_x}(x)| \leq (n_x)!\ln(n_x)\ln(n_x-1)(\frac{1}{(n_x-1)})^{n_x-2}$.

Аналогічну оцінку отримуємо для $\omega'_{n_t}(t)$, тобто

$$|\omega'_{n_t}(t)| \leq (n_t)!\ln(n_t)\left(\frac{1}{(n_t-1)}\right)^{n_t-1}.$$

Отже

$$\|A\,(v-v_I)\,\|_\infty \le \ln(n_t)\left(\frac{1}{n_t-1}\right)^{n_{t-1}}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + |a|\ln(n_x)\ln(n_x-1)\left(\frac{1}{n_x-1}\right)^{n_{x-2}}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty. \tag{17}$$

Врахувавши (16) та (17), приходимо до оцінки (15), що доводить теорему. □

5. Збіжність обчислювальної схеми. Нехай B, C — простори Банаха. Розглянемо задачу для абстрактного операторного рівняння

$$\begin{cases}\text{задано оператор } A\colon B \to C \text{ та елемент } f \in C,\\ \text{знайти такий елемент } u \in B, \text{ що } Au = f.\end{cases} \tag{18}$$

Нехай побудовано скінченновимірне зображення задачі (18)

$$\begin{cases}\text{задано оператор } A_h\colon B_h \to C_h \text{ та елемент } f_h \in C_h,\\ \text{знайти такий елемент } u_h \in B_h, \text{ що } A_h u_h = f_h,\end{cases} \tag{19}$$

де скінченновимірне зображення оператора A задається матрицею $A_h\colon B_h \to C_h$, $B_h \subset B$, $C_h \subset C$ — такі скінченновимірні простори, що $\lim_{h\to 0} B_h = B$, $\lim_{h\to 0} C_h = C$, $f_h \in C_h$ — апроксимація елемента $f \in C$, $u_h \in B_h$ — апроксимація розв'язку задачі (18).

Припустимо, що оператор A_h апроксимує оператор A на елементі $u \in B$ у сенсі

$$\lim_{h\to 0}\|Au - A_h u\|_C = 0,\ \forall u \in B. \tag{20}$$

Для доведення збіжності апроксимаційної схеми, нам потрібно показати, що схема Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій задовольняє умови **теореми Канторовича** (*про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми*) та теореми *про ознаку обмеженого оберненого оператора* ([4]).

Згідно з теоремою Канторовича ([7]) про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми, співвідношення $\lim_{h\to 0}\|u - u_h\|_B = 0$ справедливе, якщо виконується:

1. $\forall f \in C$, $\exists! u \in B\colon Au = f$.
2. $\forall A_h$, $\exists A_h^{-1}\colon \|A_h^{-1}\| \le M < +\infty$.
3. $\forall u \in D(A) \subset B\colon \lim\limits_{h\to 0}\|Au - A_h u\|_C = 0$.

Згідно з теоремою про ознаку обмеженого оберненого оператора ([4]), якщо лінійний оператор $A\colon B \to C$ такий, що

$$\exists \alpha = \mathrm{const} > 0\colon \|Au\|_C \ge \alpha\|u\|_B\,\forall u \in D(A), \tag{21}$$

то тоді існує лінійний обмежений обернений оператор.

У [5] для доведення збіжності припустили, що обернений оператор задачі обмежений, а в [19] припущено, що апроксимація оператора задачі та й сам оператор задачі обмежені знизу.

Зрозуміло, що знаходження константи $\alpha > 0$ є нетривіальною задачею. Крім того послідовність операторів A_h є нескінченною. Проте для практичного застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій потрібно визначити додаткові або еквівалентні ознаки існування обмеженого оберненого оператора. Достатні умови існування обмеженого оберненого оператора для квазізображення дає наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо ранг скінченновимірного матричного квазізображення A_h оператора A дорівнює розмірності простору апроксимації, тобто $\operatorname{rank} A_h = \dim B_h$, то тоді існує лінійний обмежений обернений оператор A_h^{-1}, причому*

$$\forall A_h,\ \exists M > 0,\ \exists A_h^{-1}:\ \|A_h^{-1}\| \le M < +\infty. \tag{22}$$

Доведення. Оскільки норма задовольняє властивостям невід'ємності та невиродженості, тобто $\|A_h u\|_{C_h} \ge 0, \forall u \in D(A_h)$, причому $\|A_h u\|_{C_h} = 0 \Leftrightarrow u = 0_{B_h}$, то

$$\forall u \in D(A_h)\backslash\{0_{B_h}\}\colon \|A_h u\|_{C_h} > 0.$$

Справді, нехай $\|A_h u\|_{C_h} = 0$. Оскільки норма задовольняє аксіому невиродженості, то такий випадок можливий лише тоді, коли $A_h u = 0_{C_h}$. Для ненульового елементу $u \in B_h$ це можливо лише тоді, коли $\det A_h = 0$, тобто $\operatorname{rank} A_h < \dim B_h$. Оскільки оператор A_h такий, що $\operatorname{rank} A_h = \dim B_h, \det A_h \ne 0$, то рівність $\|A_h u\|_{C_h} = 0$ можлива тоді і тільки тоді, коли $u = 0_{B_h}$.

Величини $\|A_h u\|_{C_h}$ і $\|u\|_{B_h}$ строго додатні для $\forall u \in D(A_h)\backslash\{0_{B_h}\}$. Це означає, що можна знайти сталу $\alpha > 0$, для якої виконується $\|A_h u\|_{C_h} \ge \alpha \|u\|_{B_h}$.

Оскільки оператор A_h має обернений, то

$$\|A_h u_h\|_{C_h} \ge \frac{\|u_h\|_{B_h}}{\|A_h^{-1}\|},$$

де $\alpha = \frac{1}{\|A_h^{-1}\|}$. З другого боку $\|A_h^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha}$.

Поклавши $M > 0$ як $M = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$, отримаємо нерівність $\|A_h^{-1}\| \le M < +\infty$. □

Наступна теорема дає достатні умови збіжності абстрактної схеми Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови:*

1) *послідовність операторів $\{A_h\}$ апроксимує оператор A задачі (18);*
2) *усі оператори з послідовності $\{A_h\}$ є невироджені;*
3) *апроксимація елемента $f \in C$ задовольняє умову*

$$\lim_{h \to 0} \|f - f_h\|_{C_h} = 0, \tag{23}$$

то послідовність u_h, що визначена схемою (19) відшукання розв'язку задачі (18), є збіжною до точного розв'язку, тобто $\lim\limits_{h \to 0} \|u - u_h\|_{B_h} = 0$.

Доведення. Розглянемо $\|u - u_h\|_{B_h}$. Маємо

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{B_h} = \|A_h^{-1} A_h (u - u_h)\|_{B_h} \le \|A_h^{-1}\| \|A_h (u - u_h)\|_{C_h} = \\ = \|A_h^{-1}\| \|A_h (u - u_h) + Au - Au\|_{C_h} = \\ = \|A_h^{-1}\| \|(A_h u - Au) + (Au - A_h u_h)\|_{B_h} \le \|A_h^{-1}\| \left(\|Au - A_h u\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h}\right). \end{aligned}$$

Так як згідно з умовою теореми оператор A_h^{-1} є обмежений, то тоді

$$\|u - u_h\|_{B_h} \le M \left(\|Au - A_h u\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h}\right),$$

Врахувавши умови апроксимаційності оператора (20) та елемента $f \in C$ (23), в границі отримаємо

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{B_h} \le M \left(\lim_{h\to 0} \|Au - A_h u\|_{C_h} + \lim_{h\to 0} \|f - f_h\|_{C_h} \right) = 0.$$

Тобто $\lim\limits_{h\to 0} \|u - u_h\|_{B_h} = 0$, що доводить теорему. □

За використання рівномірної сітки вузлів інтерполювання справедлива наступна теорема про збіжність схеми методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій для задачі Коші з одновимірним рівнянням теплопровідності.

Теорема 5. *Послідовність u_h, що визначена схемою (12) відшукання наближеного розв'язку задачі (6), збігається до точного розв'язку задачі (3), причому норма похибки характеризується величиною*

$$\|u-u_h\|_{B_h} \le M \left(\ln(n_t) \left(\frac{1}{n_t - 1} \right)^{n_{t-1}} \left\| \frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}} \right\|_\infty + |a| \ln(n_x) \ln(n_x - 1) \left(\frac{1}{n_x - 1} \right)^{n_{x-2}} \left\| \frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}} \right\|_\infty \right),$$

де число $M > 0$ таке, що $A_h\colon \|A_h^{-1}\| \le M$.

Доведення. Справедливість теореми випливає з теорем 2 та 4. □

6. Оцінки швидкості збіжності. Для проведення числових експериментів вважатимемо, що область $Q_T := (0,1) \times (0,1)$, тобто $x \in (0,1)$, $t \in (0,1)$. Норму похибки апроксимації точного розв'язку $u - u_h = u(x,t) - u_h(x,t)$ в просторі $L^2(Q_T)$ обчислюємо за формулою $\|u-u_h\|^2_{L^2(Q_T)} = \int_{Q_T} (u - u_h)^2\, dxdt$, в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$: $\|u-u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})} = \sup\limits_{(x,t)\in Q_{T,h}} |u(x,t) - u_h(x,t)|$, а в просторі Соболєва $W^{1,2}(Q_T)$ ([4])

$$\|u - u_h\|^2_{W^{1,2}(Q_T)} = \int_{Q_T} \left[(u - u_h)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t} \right)^2 \right] dxdt.$$

Порядок збіжності у нормі простору $L^2(Q_T)$ визначається формулою

$$p_{h,L^2(Q_T)} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{L^2(Q_T)}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^2(Q_T)}} \right),$$

порядок збіжності у нормі простору $L^\infty(Q_{T,h})$

$$p_{h,L^\infty(Q_{T,h})} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})}}{\|u - u_{h/2}\|_{L^\infty(Q_{T,h})}} \right),$$

а порядок збіжності у нормі простору $W^{1,2}(Q_T)$

$$p_{h,W^{1,2}(Q_T)} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{W^{1,2}(Q_T)}}{\|u - u_{h/2}\|_{W^{1,2}(Q_T)}} \right).$$

Якщо $\|u - u_h\| = 0$ і $\|u - u_{h/2}\| = 0$, то невизначеність $0/0$ подаємо у таблицях як NaN (*not a number*).

Модельні задачі для рівняння теплопровідності досліджено нами з використанням методу скінченних різниць (МСР), методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксмацій

(МЛАДА) та узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксмацій (УМЛАДА). Зазначимо, що у випадку застосування методу МЛАДА, розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь здійснено з використанням вбудованих функцій пакету символьного обчислення Mathematica.

Позначимо $\Delta x = \frac{1}{(n_x-1)}$ — крок дискретизації за просторовою змінною, та $\Delta t = \frac{1}{(n_t-1)}$ — крок дискретизації за часовою змінною. Якщо крок дискретизації за просторовою та часовою змінними вибрані однаковими, то $h = \Delta x = \Delta t$.

У випадку методу МЛАДА h позначає крок дискретизації тільки за просторовою змінною, оскільки розв'язування задачі Коші для системи ЗДР здійснюється з використанням пакету Mathematica, де кількість вузлів за часовою змінною вибирається автоматично.

Для модельної задачі ([13]) вигляду

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u = u(x,t) \text{ таку, що} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x. \end{cases} \tag{24}$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 1–4.

Точний розв'язок задачі (24) має вигляд $u(x,t) = e^{-t}\sin x$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (24) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } v = v(x,t) \text{ таку, що} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \sin x,\ (x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,t)$ задачі (25), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,t)$ задачі (24) за допомогою формули $u_h(x,t) = \sin x + v_h(x,t)$.

Табл. 1. Значення норми похибок в просторі $L^2(Q_T)$.

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0419804	0.129574	0.0479767
$h = 1/4$	0.0199765	0.051718	0.0146769
$h = 1/8$	0.00965197	0.00343672	0.000637523
$h = 1/16$	$2.05974 \cdot 10^{10}$	3019.86	$1.83044 \cdot 10^{-7}$

Табл. 2. Значення норми похибок в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$.

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0904097	0.46952	0.23476
$h = 1/4$	0.0414633	0.249107	0.085016
$h = 1/8$	0.0200078	0.0226241	0.0046676
$h = 1/16$	$4.19664 \cdot 10^{11}$	18151.3	$1.7980 \cdot 10^{-6}$

Табл. 3. Значення норми похибок в просторі $W^{1,2}(Q_T)$.

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.119842	0.452594	0.202487
$h = 1/4$	0.0594391	0.2167	0.0727922
$h = 1/8$	0.0294888	0.0197359	0.00419756
$h = 1/16$	$1.24976 \cdot 10^{12}$	24988.7	$1.85966 \cdot 10^{-6}$

Табл. 4. Значення порядків збіжності в просторі $L^2(Q_T)$.

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.07141	1.32504	1.70879
$h = 1/4$	1.04941	3.91156	4.52493
$h = 1/8$	-40.9567	-19.745	11.7661

Табл. 5. Значення порядків збіжності в просторі $L^\infty(Q_T)$.

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.12464	0.91442	1.46539
$h = 1/4$	1.05128	3.46084	4.18698
$h = 1/8$	-44.2537	-19.6138	11.3421

Табл. 6. Значення порядків збіжності в просторі $W^{1,2}(Q_T)$.

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.01165	1.06252	1.47598
$h = 1/4$	1.01124	3.45681	4.11616
$h = 1/8$	-45.2685	-20.272	11.1403

У [13] норму похибки апроксимації точного розв'язку обчислювали за формулою

$$\|u - u_h\|_{BL} = \max_{i=\overline{1,n_t}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n_x} (u(x_j, t_i) - u_h(x_j, t_i))^2}. \tag{26}$$

Для випадку $n_x = 10, n_t = 10$ у [13] класичним методом Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій отримано $\|u - u_h\|_{BL} = 7,75 \cdot 10^{-3}$. Із застосуванням пропонованого нами узагальненого методу Лі-алгебраїчних дискретних апроксимацій за такої ж кількості вузлів та у тій же ж нормі (26) отримано $\|u - u_h\|_{BL} = 2,69 \cdot 10^{-3}$, що у $2,88104$ разів точніше ніж результат отриманий з використанням класичного методу.

Зростання ж похибок у класичному МЛАДА зумовлено тим, що ДРЧП зведено до системи ЗДР, яка є жорсткою і вимагає великої кількості вузлів за часовою змінною для коректного розв'язання задачі.

7. Висновки. Запропоновано застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші з рівнянням теплопровідності.

Знайдено значення рангу скінченновимірного квазізображення диференціального оператора рівняння теплопровідності, досліджено апроксимаційні властивості та доведено факторіальну збіжність схеми узагальненого методу за двома змінними. Встановлено ознаки існування обмеженого оберненого оператора для абстрактної апроксимаційної схеми. Визначено умови, які гарантують збіжність схеми УМЛАДА.

Для тестової задачі узагальнений метод виявився майже у три рази точніший ніж класичний метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій за однакових значень вузлів, для яких можна отримати адекватний результат з використанням класичного методу.

Виявлений запас точності узагальненого методу пов'язаний з тим, що дискретизація рівняння здійснюється за усіма змінними, що входять до рівняння та використання двовимірного інтерполювання Лагранжа.

ЛІТЕРАТУРА

1. I.S. Berezin, N.P. Zhydkov, Numerical methods, V.1, M: Fismathyz, 1962. (in Russian)
2. O. Bihun, M. Prytula, *The method of Lie algebraic discrete approximations in the theory of dynamical systems*, Mat. Visnyk NTSH, **1** (2004), 24–31. (in Ukrainian)
3. A.A. Kindybaliuk, M.M. Prytula, *Generalization of the scheme of the Lie algebraic discrete approximations for Cauchy problem*, XIX National ukrainian scientific conferece: Modern problems of applied mathematics and informatics. Theses. L'viv, (2013), 73–74. (in Ukrainian)
4. L.A. Liusternik, V.I. Sobolev, Elements of functional analysis, M.: Nauka, 1965. (in Russian)
5. M. Lustyk, A. Prykarpatski, M. Prytula, M. Vovk, *Functional-operator analysis of converegence problems for F.Calogero's method of discrete approximations in Banach spaces*, Math. Visnyk NTSH, **9** (2012), 168–179. (in Ukrainian)
6. Ya A. Mytropolski, A.K. Prykarpatski, V.Hr. Samoylenko, *Algebraic scheme of discrete approximations of linear and nonlinear dynamical systems of mathematical phisics*, Ukr. Mat. Journ., **40** (1988), 453–458. (in Russian)
7. R. Richtmyer, Difference methods for solving boundary-value problems, M.: Mir, 1972. (in Russian)
8. A.A. Samarskii, A.V. Gulin, Numerical methods: Handbook for students, M.: Nauka, 1989. (in Russian)
9. V.Hr. Samoylenko, *Algebraic scheme of discrete approximations for dynamical systems of mathematical phisics and estimations of its precision*, Asymptotic methods in math-phisics problems K.: Mathematical institute AN USSR, (1988), 144–151. (in Russian)
10. V.A. Trenogin, Functional analysis, M: FIZMATLIT, 2002. (in Russian)
11. O.H. Bihun, *Approximation properties of the Lie-algebraic scheme*, Mat. Stud., **20** (2003), №1, 85–91.
12. O.H. Bihun *Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations*, Mat. Stud., **20** (2003), №2, 179–184.
13. O.H. Bihun, M. Luśtyk, *Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations*, Visnyk of the Lviv University. Series of Applied Mathematics and Computer Science, **6** (2003), 3–10.
14. O. Bihun, M. Prytula, *The rank of projection-algebraic representations of some differential operators*, Mat. Stud. **35** (2011), №1, 9–21.
15. F. Calogero, *Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension*, Lett. Nuovo Cimento, **38** (1983), №13, 453–459.
16. F. Calogero, E. Franko, *Numerical tests of a novel technique to compute the eigen values of differential operators*, Il Nuovo Cins., **89** (1985), №2, 161–208.
17. F. Casas, *Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic method*, Journ. of Comp. Appl. Math., **76** (1996), 159–170.
18. R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
19. M. Luśtyk, *Lie-algebraic discrete approximation for nonlinear evolution equations*, Journ. of Mathem. Sc., **109** (2002), №1, 1169–1172.
20. M. Luśtyk, *The Lie-algebraic discrete approximation scheme for evolution equations with Dirichlet/ Neumann data*, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, **40** (2002), 117—124.
21. A.K. Prykarpatsky, M.M. Prytula, O.O. Yerchenko, *The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis*, Volyn Mathematical Bulletin, **3** (1996), 113–116.
22. J. Wei, E. Norman, *On global representations of the solution of linear differential equations as a product of exponentials*, Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 327–334.
23. F. Wolf, *Lie algebraic solutions of linear Foker-Plank equations*, Journ. Math. Phys., **29** (1988), 305–307.

Ivan Franko National University of Lviv
a.kindybaluk@mail.ru

Надійшло 17.05.2014