УДК 517.5

Р. В. Шанин

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ФЕФФЕРМАНА–СТЕЙНА

R. V. Shanin. *On a generalization of the Fefferman–Stein theorem*, Mat. Stud. **42** (2014), 209–219.

We investigate the conditions under which membership of the maximal function of C. Fefferman and E. M. Stein to the class $\varphi(L)$ implies that the Hardy–Littlewood function belong to the same class. We obtain the best possible in some sense, conditions on the function φ defining these classes.

Р. В. Шанин. *Об одном обобщении теоремы Феффермана–Стейна* // Мат. Студії. – 2014. – Т.42, №2. – С.209–219.

Изучаются условия при которых из принадлежности максимальной функции Феффермана–Стейна классу $\varphi(L)$ следует принадлежность этому же классу функции Харди–Литтлвуда. Получены, в некотором смысле, окончательные условия на функцию φ, определяющую эти классы.

1. Введение. Измеримую на множестве $E \subseteq \mathbb{R}^n$ функцию f будем называть локально суммируемой на E и писать $f \in L_{\mathrm{loc}}(E)$, если f суммируема на всех компактных подмножествах E. Пусть Φ — совокупность всех четных, неотрицательных на $\mathbb{R}$, неубывающих на $[0,+\infty)$ функций φ таких, что $\varphi(+\infty)=+\infty$. Для $\varphi \in \Phi$ и измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ через $\varphi(L(E))$ $(\varphi(L_{\mathrm{loc}}(E)))$ обозначим класс всех измеримых на E функций f, для которых $\varphi(f)$ суммируема (локально суммируема) на E. Если $E=\mathbb{R}^n$, то соответствующий класс будем обозначать $\varphi(L)$ $(\varphi(L_{\mathrm{loc}}))$. Если $\varphi(t)=|t|^p$, $p>0$, то получим общеизвестные классы Лебега $L^p(E)$ $(L^p_{\mathrm{loc}}(E))$.

Говорят, что $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2–условию $(\varphi \in \Delta_2)$, если существует такое $A \ge 1$, что
$$\varphi(2t) \le A\varphi(t), \quad 0<t<+\infty.$$
Отсюда следует, что
$$\varphi(s) \le A\left(\frac{s}{t}\right)^{\log_2 A}\varphi(t), \quad 0<t<s<\infty. \tag{1}$$
Для $\varphi \in \Phi$ положим
$$\varphi_0 = \varlimsup_{\tau\to 0}\frac{\varphi(2\tau)}{\varphi(\tau)}, \quad \varphi_\infty = \varlimsup_{\tau\to\infty}\frac{\varphi(2\tau)}{\varphi(\tau)}.$$
Легко видеть, что $\varphi \in \Delta_2$ тогда и только тогда, когда $\varphi_0<\infty$ и $\varphi_\infty<\infty$.

Пусть $p \ne 0$ и $f \in L^p(Q)$. Средним p-ого порядка функции f на кубе $Q \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

2010 *Mathematics Subject Classification:* 42B25.
Keywords: Hardy–Littlewood maximal function; Fefferman–Stein maximal function; equimeasurable rearrangement.

$$A_p(f,Q)=\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

где $|Q|$ обозначает n-мерный объем куба. Для $f\in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ классическая максимальная функция Харди–Литтлвуда ([1]) определяется равенством

$$Mf(x)=\sup_{Q\ni x} A_1(f,Q),$$

где верхняя грань берется по всем кубам $Q\subset\mathbb{R}^n$, содержащим точку x. Эта функция имеет многочисленные приложения в разных разделах анализа, в частности, в теории интерполяции операторов и оценках сингулярных интегралов.

В 1972 году Ч. Фефферман и Е. М. Стейн в статье [2] для $f\in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ввели следующую, измеряющую рост локальных средних колебаний функции f, максимальную функцию

$$f^{\#}(x)=\sup_{Q\ni x} A_1(f-f_Q,Q),\quad \text{где}\ \ f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$$

и верхняя грань берется по всем кубам $Q\subset\mathbb{R}^n$, содержащим точку x. Несложно доказать, что $f^{\#}(x)\le 2Mf(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}^n$ и убедиться, что обратная поточечная оценка не имеет места. Тем не менее, в [2] получена следующая теорема.

Теорема 1 ([2])**.** *Пусть* $1<p<\infty$, $1\le p_0\le p$, $f\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ *и* $f^{\#}\in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Тогда* $Mf\in L^p(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\int_{\mathbb{R}^n} M^p f(x)dx\le C_p\int_{\mathbb{R}^n}(f^{\#}(x))^p dx.$$

В своей кандидатской диссертации [3] А. А. Кореновский обобщил теорему 1 на случай пространств $\varphi(L)$, а именно, доказал, что если $\varphi\in\Delta_2$ и функция $f\in L_{\text{loc}}$, такая, что $Mf(+\infty)=0$, то $f^{\#}\in\varphi(L(\mathbb{R}^n))$ влечет $Mf\in\varphi(L(\mathbb{R}^n))$ и при этом имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(Mf(x))dx\le C_\varphi\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\Omega f(x)\right)dx.$$

Там же доказано, что условие $\varphi\in\Delta_2$, при дополнительных условиях налагаемых на скорость роста функции φ в нуле и на бесконечности, является необходимым.

В данной статье мы получаем аналог теоремы 1 для максимальных функций, определяемых через средние p-ого порядка, в пространстве $\varphi(L)$. Дадим необходимые определения.

Пусть $0<p<\infty$, E — куб в $\mathbb{R}^n$ или $E=\mathbb{R}^n$. Для $f\in L^p_{\text{loc}}(E)$ определим две функции

$$M_{p,E}f(x)=\sup_{Q\ni x,\ Q\subset E} A_p(f,Q),\qquad \Omega_{p,E}f(x)=\sup_{Q\ni x,\ Q\subset E}\inf_{c\in\mathbb{R}} A_p(f-c,Q),$$

где верхняя грань берется по всем кубам $Q\subset E$, содержащим точку x. В случае, если $E=\mathbb{R}^n$ будем писать M_pf, Ω_pf. Функция $M_{p,E}f$ является обобщением максимальной функции Харди–Литтлвуда, а функция $\Omega_{p,E}f$ — обобщением функции Феффермана–Стейна. Очевидно, что $\Omega_{p,E}f(x)\le M_{p,E}f(x)$, $x\in E$. Отметим, что в определении функции $\Omega_{p,E}f$ при $p\ge 1$ можно было бы вычитать и f_Q, но при $0<p<1$ вычитать f_Q уже нельзя, так как f не обязана быть суммируемой на кубе Q.

Основные результаты работы сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi\in\Delta_2$ *и* $0<p\le 1$.
1) *Если функция* $f\in L^p(I)$ *для некоторого куба* $I\subset\mathbb{R}^n$, $\Omega^p_{p,I}f\in\varphi(L(I))$, *то* $M^p_{p,I}f\in\varphi(L(I))$ *и*

$$\int_I \varphi(M^p_{p,I}f(x) - (M^p_{p,I}f)^*(|I|))dx \le C_1 \int_I \varphi\left(\Omega^p_{p,I}f(x)\right)dx,$$

где C_1 *зависит только от* φ *и* n.
2) *Если функция* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}$, $(M_pf)^*(+\infty) = 0$ *и* $\Omega^p_pf \in \varphi(L)$, *то* $M^p_pf \in \varphi(L)$ *и*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(M^p_pf(x))dx \le C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\Omega^p_pf(x)\right)dx, \tag{2}$$

где C_2 *зависит только от* φ *и* n.

Теоремы 3 и 4 указывают на то, что условия $\varphi_\infty < \infty$ и $\varphi_0 < \infty$ в теореме 2 отбросить, вообще говоря, нельзя.

Теорема 3. *Пусть куб* $I \subset \mathbb{R}^n$, $0 < p \le 1$, $\varphi \in \Phi$. *Если* $\varphi_\infty = +\infty$ *и*

$$t^{-1-\varepsilon}\varphi(t) \uparrow +\infty, \quad t \to +\infty, \tag{3}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, *то существует такая функция* f, *что* $\Omega^p_{p,I} \in \varphi(L(I))$, *но* $M^p_{p,I}f \notin \varphi(L(I))$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < p \le 1$, $I = [0, +\infty)$, $\varphi \in \Phi$. *Если* $\varphi_0 = +\infty$ *и*

$$t^{-1-\varepsilon}\varphi(t) \uparrow, \quad t \in (0, 1), \tag{4}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, *то существует такая функция* $f \in L^\infty(I)$, *что* $(M^p_{p,I}f)^*(+\infty) = 0$, $\Omega^p_{p,I}f(x) \in \varphi(L(I))$, *но* $M^p_{p,I}f \notin \varphi(L(I))$.

2. Предварительные замечания. Несложно доказать, что при $0 < p < \infty$ для функции $f \in L^p(Q)$ существует такое число $f_{p,Q} \in \mathbb{R}$, что $A_p(f - f_{p,Q}, Q) = \inf\{A_p(f - c, Q),\ c \in \mathbb{R}\}$. Очевидно также, что $|f_{p,Q}|^p \le A^p_p(f, Q) + A^p_p(f - f_{p,Q}, Q)$ для $0 < p \le 1$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится понятие равноизмеримой перестановки функции (см., например, [4]). Напомним ее определение и некоторые свойства. Для измеримой на множестве $E \subset \mathbb{R}$ функции f невозрастающей функцией распределения называется

$$\lambda_f(y) = |\{x \in E :\ |f(x)| > y\}| = |E(|f| > y)|, \quad 0 \le y < \infty.$$

В случае, когда $|E| = +\infty$, дополнительно предполагаем, что $\lambda_f(y) < +\infty$ для $y > 0$. Легко видеть, что функция λ_f непрерывна справа. Равноизмеримой невозрастающей перестановкой функции f называется невозрастающая на $(0, |E|)$ функция f^* такая, что $|\{x \in E\colon |f(x)| > y\}| = |\{t \in (0, |E|)\colon f^*(t) > y\}|$ для любого $y \ge 0$. Так как этим равенством перестановка определяется с точностью до ее значений в точках разрыва, то будем дополнительно предполагать, что f^* непрерывна справа на $(0, |E|)$. Тогда через функцию распределения λ_f равноизмеримая перестановка f^* выражается следующим равенством $f^*(t) = \sup\{y > 0\colon \lambda_f(y) > t\}$, $0 < t < |E|$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма о покрытии.

Лемма 1. *Пусть множество* G *открытое относительно куба* I, $G \subset I$. *Тогда существуют такие двоичные относительно куба* I *кубы* Q_j, $j \ge 1$, *с попарно непересекающимися внутренностями, что* $Q_j \cap (Q_0 \setminus \Omega) \ne \varnothing$ *для всех* $j \ge 1$ *и*

$$G \subset \bigcup_j Q_j, \quad |G| \le \sum_j |Q_j| \le 2^n|G|.$$

Доказательство этой леммы проводится тем же способом, что и доказательство леммы 1.1 из [5] и поэтому мы его опустим.

В следующей лемме устанавливается неравенство для функций $\varphi \in \Delta_2$, играющее ключевую роль в доказательстве теоремы 2.

Лемма 2 ([6]). *Пусть функция $\varphi \in \Delta_2$. Тогда для любой монотонно неубывающей последовательности положительных чисел λ_k*
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varphi(\lambda_{k+1}-\lambda_1) \le B\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varphi(\lambda_{k+1}-\lambda_k),$$
где постоянная B зависит лишь от функции φ.

Лемма 3 играет важную роль при доказательстве теоремы 2. В ней получена оценка скорости роста перестановки $M^p_{p,I}f$ относительно перестановки $\Omega^p_{p,Q}f$. Эта лемма в частном случае $p=1$ для максимальных функций Харди–Литтлвуда и Феффермана–Стейна была получена в [5].

Лемма 3. *Пусть $0<p\le 1$, куб $I\subset\mathbb{R}^n$, $f\in L^p(I)$. Тогда*
$$(M^p_{p,I}f)^*(t)-(M^p_{p,I}f)^*(2t)\le (4\cdot 6^n+1)(\Omega^p_{p,Q}f)^*(2t) \tag{5}$$
для любого $0<t<|I|/2$.

Доказательство. Множество
$$G=\{x\in I:\Omega_{p,I}f(x)>(\Omega_{p,I}f)^*(2t)\}\cup\{x\in I: M_{p,I}f(x)>(M_{p,I}f)^*(2t)\}$$
является открытым относительно куба I и имеет меру $|G|\le 4t$. Применив лемму 1 к множеству G получим кубы Q_j, $j\ge 1$, с попарно непересекающимися внутренностями. Обозначим $F=I\setminus(\cup_j Q_j)$, и определим
$$g(x)=\sum_j (f(x)-f_{p,Q_j})\chi_{Q_j}(x),\quad h(x)=\sum_j f_{p,Q_j}\chi_{Q_j}(x)+f(x)\chi_F(x).$$

Тогда $f=g+h$. Покажем, что $h\in L^\infty(I)$. Для произвольной точки $x_j\in Q_j\cap(I\setminus G)$ имеем $|f_{p,Q_j}|^p\le M^p_{p,I}f(x_j)+\Omega^p_{p,I}f(x_j)\le (M^p_{p,I}f)^*(2t)+(\Omega^p_{p,I}f)^*(2t)$ и, таким образом,
$$\|h\|^p_{L^\infty(I)}=\max\Big(\||f|^p\chi_F\|_{L^\infty(Q_0)},\sup_{Q_j}|f_{p,Q_j}|^p\Big)\le$$
$$\le\max\big(\|(M^p_{p,I}f)\chi_F\|_{L^\infty(I)},(M^p_{p,I}f)^*(2t)+(\Omega^p_{p,I}f)^*(2t)\big)\le (M^p_{p,I}f)^*(2t)+(\Omega^p_{p,I}f)^*(2t).$$

Отсюда, применяя известное неравенство слабого типа $(1-1)$, получим
$$(M^p_{p,I}f)^*(t)\le (M^p_{p,I}g)^*(t)+\lim_{t\to 0+}(M^p_{p,I}h)^*(t)\le 3^n t^{-1}\|g\|^p_{L^p(I)}+\|h\|^p_{L^\infty(I)}.$$

Так как $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)-f_{p,Q_j}|^p dx\le \Omega^p_{p,I}f(x_j)\le(\Omega^p_{p,I}f)^*(2t)$, то
$$\|g\|^p_{L^p(I)}=\sum_j\int_{Q_j}|f(x)-f_{p,Q_j}|^p dx\le\sum_j|Q_j|(\Omega^p_{p,I}f)^*(2t)\le 2^n 4t(\Omega^p_{p,I}f)^*(2t)$$
и, окончательно, $(M^p_{p,I}f)^*(t)-(M^p_{p,I}f)^*(2t)\le(4\cdot 6^n+1)(\Omega^p_{p,I}f)^*(2t)$. □

3. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 2. 1) Пусть $\Omega^p_{p,I}f \in \varphi(L(I))$. Полагая $t = |Q|2^{-k}$ в (5), получим $(M^p_{p,I}f)^*(2^{-k}|I|) - (M^p_{p,I}f)^*(2^{-k+1}|I|) \le (4\cdot 6^n+1)(\Omega^p_{p,I}f)^*(2^{-k+1}|I|)$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $b_I = (M^p_{p,I}f)^*(|I|)$. Применяя лемму 2 и учитывая полученное только что неравенство, а также неравенство (1) и монотонность φ, получим, что

$$\int_I \varphi(M^p_{p,I}f(x) - b_I)dx \le |I| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varphi((M^p_{p,I}f)^*(2^{-k}|I|) - b_I) \le$$
$$\le B|I| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varphi((M^p_{p,I}f)^*(2^{-k}|I|) - (M^p_{p,I}f)^*(2^{-k+1}|I|)) \le AB(4\cdot 6^n+1)^{\log_2 A}|I| \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\varphi\left((\Omega^p_{p,I}f)^*(2^{-k+1}|I|)\right) \le C_1 \int_0^{|I|} \varphi\left((\Omega^p_{p,I}f)^*(t)\right)dt = C_1 \int_I \varphi\left(\Omega^p_{p,I}f(x)\right)dx,$$

где $C_1 = AB(4\cdot 6^n+1)^{\log_2 A}$.

2) Если f не эквивалентна нулю и $\varphi(+0) > 0$, то правая часть в (2) бесконечна. Предположим, что $\varphi(+0) = 0$.

Выберем последовательность таких кубов I_k, $k \ge 1$, что $I_{k+1} \supset I_k$, $\cup_{k\ge 1} I_k = \mathbb{R}^n$,

$$b_k = (M^p_{p,I_k}f)^*(|I_k|) \downarrow 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Применяя к каждому кубу I_k уже доказанную часть теоремы, получим

$$\int_{I_k} \varphi(M^p_{p,I_k}f(x) - b_k)dx \le C_1 \int_{I_k} \varphi\left(\Omega^p_{p,I_k}f(x)\right)dx \le$$
$$\le C_1 \int_{Q_k} \varphi\left(\Omega^p_p f(x)\right)dx \le C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\Omega^p_p f(x)\right)dx. \tag{6}$$

Зафиксируем произвольные куб $I \subset \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ и найдем такое k, что $I \subset I_k$ и $\varphi(b_k)|I| < \varepsilon$. Тогда, в силу Δ_2–условия и неравенства (6)

$$\int_I \varphi(M^p_{p,I}f(x))dx \le \int_I \varphi(M^p_{p,I_k}f(x))dx \le$$
$$\le A\Big(\int_I \varphi(M^p_{p,I_k}f(x) - b_k)dx + \varphi(b_k)|I|\Big) \le AC_1 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\Big(\Omega^p_p f(x)\Big)dx + A\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получим $\int_I \varphi(M^p_{p,I}f(x))dx \le C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\Omega^p_p f(x)\right)dx$, где $C_2 = AC_1 = A^2B(4\cdot 6^n+1)^{\log_2 A}$. Так как последнее неравенство выполнено для любого куба I, то для $I_k \supset I$ будем иметь

$$\int_I \varphi(M^p_{p,I_k}f(x))dx \le \int_{I_k} \varphi(M^p_{p,I_k}f(x))dx \le C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\Omega^p_p f(x)\right)dx.$$

Отсюда, в силу теоремы Фату $\int_I \varphi(M^p_p f(x))dx \le C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\Omega^p_p f(x)\right)dx$. Из этого неравенства следует (2). $\square$

Доказательство теоремы 3. Достаточно рассмотреть случай $n = 1$, $I = (0, 1)$. Можно также считать, что $\varphi(1) = 1$. Кроме того, вместо $\Omega^p_{p,I} f(x)$ будем рассматривать функцию

$$\Lambda^p_{p,I} f(x) = \sup_{Q \ni x,\ Q \subset I} \frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |f(x) - f(y)|^p dxdy \geq \Omega^p_{p,I} f(x).$$

Пусть $t_0 = 1$. Построим такую последовательность чисел $\{t_k\}_{k\geq 1}$, что $t_k \geq 16t_{k-1}$ и

$$\varphi(3t_k/4) \leq 2^{-k-1}\varphi(t_k), \tag{7}$$

$$\frac{t_{k+1}}{\varphi(t_{k+1})} \leq \frac{1}{2^6\varphi(t_k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Положим $x_k = 1/\varphi(t_k)$ и $f(x) = t_k^{1/p}$ при $x \in I_k = (x_{k+1}, x_k]$, $k \in \{0, 1, \ldots\}$.

Для произвольных $i \geq 1$, $k \geq 0$ из (8) следует

$$t_{k+i}x_{k+i} \leq \frac{t_{k+i-1}x_{k+i-1}}{2^6} \leq \frac{t_{k+i-2}x_{k+i-2}}{2^{6\cdot 2}} \leq \ldots \leq \frac{x_k}{2^{6i}}. \tag{9}$$

Отсюда получаем $\int_I f^p(x)dx \leq \sum_{k=0}^\infty t_k x_k \leq \sum_{k=0}^\infty 2^{-6k} < \infty$, так что $f \in L^p(I)$. Поскольку из (8) вытекает неравенство $x_k - x_{k+1} \geq x_k/2$, то

$$\int_I \varphi(f^p(x))dx = \sum_{k=0}^\infty \varphi(t_k)(x_k - x_{k+1}) \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^\infty \varphi(t_k)x_k = +\infty$$

и $f^p \notin \varphi(L(I))$, а, значит, и $M^p_{p,I} f \notin \varphi(L(I))$.

Пусть $s \geq 0$, $s \in \mathbb{Z}$. Покажем, что

$$\Lambda^p_{p,I} f(x) \leq \begin{cases} \frac{3t_{s+1}}{4}, & x_{s+1} < x \leq 2^6 x_{s+1}, \\ 3\cdot 2^4 t_{s+1}\frac{x_{s+1}}{x}, & 2^6 x_{s+1} \leq x \leq 2^6 x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s}, \\ \frac{3t_s}{4}, & 2^6 x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s} \leq x \leq x_s. \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $x_{s+1} < x \leq 2^6 x_{s+1}$, $x \in Q = (a, b) \subset I$. Если $a \in I_{s+1}$, $b \in I_s$, то

$$\frac{1}{|Q|^2}\int_Q\int_Q |f(x) - f(y)|^p dxdy \leq \frac{|t_{s+1}^{1/p} - t_s^{1/p}|^p}{2} \leq \frac{t_{s+1}}{2} \leq \frac{3t_{s+1}}{4}.$$

Если $a \in I_{k+l+1}$, $l \geq 1$, $b \in I_k$, $k \leq s$, то

$$\int_Q\int_Q |f(x) - f(y)|^p dxdy = 2(x_{k+l+1} - a)\sum_{i=k+1}^{k+l} |t_{k+l+1}^{1/p} - t_i^{1/p}|^p (x_i - x_{i+1}) +$$

$$+2(x_{k+l+1} - a)|t_{k+l+1}^{1/p} - t_k^{1/p}|^p (b - x_{k+1}) + 2\sum_{j=k+2}^{k+l}(x_j - x_{j+1})\sum_{i=k+1}^{j-1}|t_j^{1/p} - t_i^{1/p}|^p(x_i - x_{i+1}) +$$

$$+2(b - x_{k+1})\sum_{j=k+1}^{k+l}|t_j^{1/p} - t_k^{1/p}|^p(x_j - x_{j+1}) \leq 2(x_{k+l+1} - a)t_{k+l+1}(b - x_{k+l+1}) +$$

$$+2\sum_{j=k+2}^{k+l} t_j x_j \sum_{i=k+1}^{j-1}(x_i - x_{i+1}) + 2(b - x_{k+1})\sum_{j=k+2}^{k+l} t_j x_j + 2(b - x_{k+1})t_{k+1}(x_{k+1} - x_{k+2}) \leq$$

$$\leq 2(b - x_{k+l+1})\sum_{j=k+2}^{k+l+1} t_j x_j + 2(b - x_{k+1})t_{k+1}(x_{k+1} - x_{k+2}).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \le$$
$$\le \frac{2(b-x_{k+l+1})}{(b-a)^2}\sum_{j=k+2}^{k+l+1} t_j x_j + \frac{2(b-x_{k+1})(x_{k+1}-x_{k+2})}{(b-a)^2} t_{k+1}. \tag{11}$$

Из (9) получаем

$$\sum_{j=k+2}^{k+l+1} t_j x_j \le x_{k+1}\sum_{j=1}^{l} 2^{-6j} \le x_{k+1}\frac{2^{-6}}{1-2^{-6}} \le \frac{x_{k+1}}{2^5}.$$

Применяя полученное неравенство и учитывая, что $b-a \ge x_{k+1}-x_{k+2} \ge \frac{x_{k+1}}{2}$, из (11) выводим, что

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \le \frac{t_{k+1}}{2} + \frac{x_{k+1}}{2^5}\frac{4}{x_{k+1}} \le \frac{3t_{k+1}}{4} \le \frac{3t_{s+1}}{4}.$$

Пусть $2^6 x_{s+1} \le x \le 2^6 x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s}$. Если $b \in I_k$, $k<s$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \le \frac{3t_{k+1}}{4} \le \frac{3\cdot 2^6 t_{k+1}}{4}\cdot\frac{x_{s+1}}{x}\cdot\frac{t_{s+1}}{t_s} \le 3\cdot 2^4 t_{s+1}\frac{x_{s+1}}{x}.$$

Пусть $b \in I_s$. Тогда $2^{6+i}x_{s+1} < b \le 2^{7+i}x_{s+1}$ для некоторого целого $i \ge 0$. Если $a \in I_{s+1}$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy = \frac{2(b-x_{s+1})(x_{s+1}-a)}{(b-a)^2}|t_{s+1}^{1/p}-t_s^{1/p}|^p \le$$
$$\le \frac{2^{8+i}x_{s+1}^2 t_{s+1}}{(2^{6+i}-1)^2 x_{s+1}^2} \le \frac{t_{s+1}}{2^{2+i}} \le \frac{2^{7+i}x_{s+1}}{x}\frac{t_{s+1}}{2^{2+i}} = 2^5 t_{s+1}\frac{x_{s+1}}{x} \le 3\cdot 2^4 t_{s+1}\frac{x_{s+1}}{x}.$$

Если $a \notin I_{s+1}$, то из (11) следует

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \le \frac{2^{8+i}x_{s+1}}{2^{10+2i}x_{s+1}^2}\sum_{j=s+2}^{s+l+1} t_j x_j +$$
$$+\frac{2^{8+i}x_{s+1}(x_{s+1}-x_{s+2})}{2^{10+2i}x_{s+1}^2}t_{s+1} \le \frac{1}{2^{7+i}} + \frac{t_{s+1}}{2^{2+i}} \le \frac{(2^5+1)t_{s+1}}{2^{7+i}}\frac{2^{7+i}x_{s+1}}{x} \le 3\cdot 2^4 t_{s+1}\frac{x_{s+1}}{x}.$$

Осталось рассмотреть случай $2^6 x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s} \le x \le x_s$. Если $b \in I_k$, $k<s$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \le \frac{3t_{k+1}}{4} \le \frac{3t_s}{4}.$$

Пусть $b \in I_s$. Тогда $2^{6+i}x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s} < b \le 2^{7+i}x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s}$ для некоторого целого $i \ge 0$. Если $a \in I_{s+1}$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \le \frac{2^{8+i}x_{s+1}^2 t_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s}}{\left(\frac{t_{s+1}}{t_s}\right)^2(2^{6+i}-1)^2 x_{s+1}^2} \le \frac{t_s}{2^{2+i}}.$$

Если $a \notin I_{s+1}$, то из (11) следует

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \le$$
$$\le \frac{2^{8+i}x_{s+1}^2\frac{t_{s+1}}{t_s}}{2^5\left(\frac{t_{s+1}}{t_s}\right)^2(2^{6+i}-1)^2x_{s+1}^2}+\frac{2^{8+i}x_{s+1}^2\frac{t_{s+1}}{t_s}}{\left(\frac{t_{s+1}}{t_s}\right)^2(2^{6+i}-1)^2x_{s+1}^2}t_{s+1}\le\frac{1}{2^{7+i}}+\frac{t_s}{2^{2+i}}\le\frac{3t_s}{4}.$$

Используя (7) и (10) получим

$$\int_{I_s}\varphi(\Lambda^p_{p,I}f(x))dx\le(2^6-1)x_{s+1}\varphi\left(\frac{3t_{s+1}}{4}\right)+\int_{2^6x_{s+1}}^{2^6x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s}}\varphi\left(3\cdot 2^4t_{s+1}\frac{x_{s+1}}{x}\right)dx+$$
$$+x_s\varphi\left(\frac{3t_s}{4}\right)\le c\cdot 2^{-s}+\int_{2^6x_{s+1}}^{2^6x_{s+1}\frac{t_{s+1}}{t_s}}\varphi\left(3\cdot 2^4t_{s+1}\frac{x_{s+1}}{x}\right)dx=c\cdot 2^{-s}+A_s,$$

где c — постоянная. Сделав замену переменной и используя формулы (3) и (7), оценим последний интеграл

$$A_s=3\cdot 2^4t_{s+1}x_{s+1}\int_{\frac34 t_s}^{\frac34 t_{s+1}}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt\le 3\cdot 2^4t_{s+1}x_{s+1}\frac{\varphi\left(\frac34 t_{s+1}\right)}{\left(\frac34 t_{s+1}\right)^{1+\varepsilon}}\int_{\frac34 t_s}^{\frac34 t_{s+1}}\frac{\varphi(t)}{t^{1-\varepsilon}}dt=$$
$$=2^6x_{s+1}\frac{\varphi\left(\frac34 t_{s+1}\right)}{\left(\frac34 t_{s+1}\right)^{\varepsilon}}\cdot\frac{\left(\frac34 t_{s+1}\right)^{\varepsilon}-\left(\frac34 t_s\right)^{\varepsilon}}{\varepsilon}\le\frac{2^6x_{s+1}}{\varepsilon}\varphi\left(\frac34 t_{s+1}\right)\le\frac{2^4}{\varepsilon}2^{-s}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\int_0^1\varphi(\Lambda^p_{p,I}f(x))dx=\sum_{s=0}^{\infty}\int_{I_s}\varphi(\Lambda^p_{p,I}f(x))dx<\infty.$$

$\square$

Доказательство теоремы 4. Можно считать, что $\varphi(1)=1$. Кроме того, вместо $\Omega^p_{p,I}f(x)$ будем рассматривать функцию

$$\Lambda^p_{p,I}f(x)=\sup_{Q\ni x,\ Q\subset I}\frac{1}{|Q|^2}\int_Q\int_Q|f(x)-f(y)|^pdxdy\ge\Omega^p_{p,I}f(x).$$

Пусть $t_1=1$, $x_0=0$. Построим такую последовательность чисел $\{t_k\}_{k\ge1}$, что $t_{k+1}\le 2^{-4}t_k$ и

$$\varphi(3t_k/4)\le 2^{-k-1}\varphi(t_k), \tag{12}$$
$$\frac{t_k}{\varphi(t_k)}\le\frac{1}{\varphi(t_k)}\le\frac{t_{k+1}}{2^6\varphi(t_{k+1})}\le\frac{1}{2^6\varphi(t_{k+1})},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

Положим $x_k=1/\varphi(t_k)$ и $f(x)=t_k^{1/p}$ при $x\in I_k=[x_{k-1},x_k)$, $k\in\{1,2,\ldots\}$. Тогда, в силу (13)

$$\sum_{i=k}^{k+l}t_ix_i\le x_{k+l+1}t_{k+l+1}\sum_{i=1}^{l+1}\frac{1}{2^{6i}}\le\frac{x_{k+l+1}t_{k+l+1}}{2^6-1}. \tag{14}$$

Найдем оценку для максимальной функции. Пусть $x \in I_k$, $k \geq 1$. Так как функция f монотонно убывает, то

$$\sup_{Q\ni x,\ Q\subset[0,\infty)} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p dy = \frac{1}{x}\int_0^x |f(y)|^p dy = \frac{1}{x}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} t_i(x_i - x_{i-1}) + t_k(x - x_{k-1})\Big) \leq$$
$$\leq \frac{1}{x}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} t_i x_i + t_k x\Big) \leq \frac{2^6 t_{k-1}x_{k-1}}{x(2^6-1)} + t_k \leq \frac{2^7-1}{2^6-1}t_{k-1}.$$

Отсюда следует, что $(M^p_{p,I}f)^*(+\infty) = 0$.

Пусть $Q = (a,b)$, $a \in I_k$, $b \in I_{k+l}$, $k \geq 1$, $l \geq 2$. Тогда

$$\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy = 2(x_k - a)\sum_{i=k+1}^{k+l-1} |t_k - t_i|(x_i - x_{i-1}) +$$
$$+2(b - x_{k+l-1})\sum_{i=k+1}^{k+l-1} |t_i - t_{k+l}|(x_i - x_{i-1}) + 2|t_k - t_{k+l}|(x_k - a)(b - x_{k+l-1}) +$$
$$+2\sum_{i=k+1}^{k+l-2}(x_i - x_{i-1})\sum_{j=i+1}^{k+l-1}|t_i - t_j|(x_j - x_{j-1}) \leq 2t_k(x_k - a)(x_{k+l-1} - x_k) +$$
$$+2(b - x_{k+l-1})\sum_{i=k+1}^{k+l-1} t_i(x_i - x_{i-1}) + 2t_k(x_k - a)(b - x_{k+l-1}) + 2\sum_{i=k+1}^{k+l-2} t_i(x_i - x_{i-1})\times$$
$$\times\sum_{j=i+1}^{k+l-1}(x_j - x_{j-1}) \leq 2t_k(x_k - a)(b - x_k) + 2(b - x_{k+l-1})t_{k+l-1}(x_{k+l-1} - x_{k+l-2}) +$$
$$+2(b - x_k)\sum_{i=k+1}^{k+l-2} t_i(x_i - x_{i-1}) \leq 2(b - x_k)\sum_{i=k}^{k+l-2} t_i x_i + 2(b - x_{k+l-1})t_{k+l-1}(x_{k+l-1} - x_{k+l-2}).$$

Таким образом, если $a \in I_k$, $b \in I_{k+l}$, $k \geq 1$, $l \geq 2$, то применяя (14), получим

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \leq$$
$$\leq \frac{2(b-x_k)t_{k+l-1}x_{k+l-1}}{(2^6-1)(b-a)^2} + \frac{2(b-x_{k+l-1})(x_{k+l-1}-x_{k+l-2})}{(b-a)^2}t_{k+l-1}. \tag{15}$$

Докажем, что для $s \geq 1$

$$\Lambda^p_{p,I}f(x) \leq \begin{cases} \frac{3t_s}{4}, & x_s \leq x < 2^6 x_s, \\ 3\cdot 2^{m-2} t_s \frac{x_s}{x}, & 2^6 x_s \leq x < 2^6 x_s \frac{t_s}{t_{s+1}}, \\ \frac{3t_{s+1}}{4}, & 2^m x_s \frac{t_s}{t_{s+1}} \leq x < x_{s+1}. \end{cases} \tag{16}$$

Пусть $x_s \leq x < 2^m x_s$. Тогда, если $x \in Q = (a,b)$, $a \in I_k$, $b \in I_{k+1}$, т.е. $k = s$ либо $k = s+1$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2}\int_Q\int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy = \frac{2}{(b-a)^2}|t_k^{1/p} - t_{k+1}^{1/p}|^p(x_k - a)(b - x_k) \leq \frac{t_k}{2} \leq \frac{t_s}{2}.$$

Если $a \in I_k$, $b \in I_{k+l}$, $l \geq 2$, $k+l \geq s+1$, $k \leq s+1$, то, применяя (14), (15) и учитывая, что $b-a \geq x_{k+l-1} - x_{k+l-2} \geq \frac{2^6-1}{2^6} x_{k+l-1}$, получим

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_Q \int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \leq \frac{2^7 x_{k+l-1} t_{k+l-1}}{(2^6-1)^2 x_{k+l-1}} + \frac{t_{k+l-1}}{2} \leq$$
$$\leq \frac{t_{k+l-1}}{2^3} + \frac{t_{k+l-1}}{2} \leq \frac{3t_{k+l-1}}{4} \leq \frac{3t_s}{4}.$$

Пусть теперь $2^m x_s \leq x < 2^m x_s \frac{t_s}{t_{s+1}}$. Если $b \in I_k$, $k > s$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_Q \int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \leq \frac{3t_k}{4} \leq \frac{3t_{s+1}}{4} \leq 3 \cdot 2^{m-2} t_s \frac{x_s}{x}.$$

Если $b \in I_s$, то $2^{m+i} x_s < b \leq 2^{m+i+1} x_s$ для некоторого $i \geq 0$. Если $a \in I_{s-1}$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_Q \int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy = \frac{2}{(b-a)^2} |t_s^{1/p} - t_{s+1}^{1/p}|^p (x_s - a)(b - x_s) \leq$$
$$\leq \frac{2^{m+i+2} t_s x_s^2}{(2^{m+i}-1)^2 x_s^2} \leq \frac{2^{m+i+2} t_s}{9 \cdot 2^{2m+2i-4}} \leq \frac{t_s}{2^{m+i-3}} \leq \frac{t_s}{2^{m+i-3}} \frac{2^{m+i+1} x_s}{x} = 2^4 t_s \frac{x_s}{x} \leq 3 \cdot 2^{m-2} t_s \frac{x_s}{x}.$$

Если $a \in I_k$, $k < s-1$, то в силу (14) и (15)

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_Q \int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \leq \frac{2(b-x_{k+1})}{(b-a)^2} \sum_{i=k+1}^{s-1} t_i x_i + \frac{2(b-x_s)(x_s-x_{s-1})}{(b-a)^2} t_s \leq$$
$$\leq \frac{2x_s t_s}{(2^m-1)(2^{m+i}-1) x_s} + \frac{2^{m+i+2} t_s x_s^2}{(2^{m+i}-1)^2 x_s^2} \leq \frac{t_s}{2^{2m+i-2}} + \frac{t_s}{2^{m+i-3}} \leq \frac{t_s}{2^{m+i-4}} \leq 3 \cdot 2^{m-2} t_s \frac{x_s}{x}.$$

Пусть $2^m x_s \frac{t_s}{t_{s+1}} \leq x < x_{s+1}$. Если $b \in I_k$, $k > s$, то $\frac{1}{(b-a)^2} \int_Q \int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \leq \frac{3t_k}{4} \leq \frac{3t_{s+1}}{4}$. Пусть $b \in I_s$. Тогда, $2^{m+i} x_s \frac{t_s}{t_{s+1}} < b \leq 2^{m+i+1} x_s \frac{t_s}{t_{s+1}}$ для некоторого $i \geq 0$ и, если $a \in I_{s-1}$, то

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_Q \int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \leq$$

$$\leq \frac{2t_s x_s}{(b-a)^2}(b-x_s) \leq \Big(\frac{t_{s+1}}{3 \cdot 2^{m+i-2} x_s t_s}\Big)^2 \cdot \frac{2^{m+i+2} x_s^2 t_s^2}{t_{s+1}} = \frac{t_{s+1}}{2^{m+i-3}} \leq \frac{3t_{s+1}}{4}.$$

Если $a \in I_k$, $k < s-1$, то в силу (14) и (15)

$$\frac{1}{(b-a)^2} \int_Q \int_Q |f(x)-f(y)|^p dxdy \leq \frac{(b-x_{k+1})}{(b-a)^2} \frac{t_s x_s}{3 \cdot 2^{m-3}} + \frac{2(b-x_s)(x_s-x_{s-1})}{(b-a)^2} t_s \leq$$
$$\leq \frac{1+3 \cdot 2^{m-2}}{3 \cdot 2^{m-3}} \Big(\frac{t_{s+1}}{3 \cdot 2^{m+i-2} x_s t_s}\Big)^2 \cdot \frac{2^{m+i+1} t_s^2 x_s^2}{t_{s+1}} \leq \frac{2^3}{9} \frac{t_{s+1}}{2^{m+i-5}} \leq \frac{t_{s+1}}{2}.$$

Используя (12) и (16) получим

$$\int_{I_s} \varphi(\Lambda^p_{p,I} f(x)) dx \leq (2^6-1) \varphi\Big(\frac{3t_s}{4}\Big) x_s + \int_{2^6 x_s}^{2^6 x_s \frac{t_s}{t_{s+1}}} \varphi\Big(3 \cdot 2^4 t_s \frac{x_s}{x}\Big) dx + \varphi\Big(\frac{3t_{s+1}}{4}\Big) x_{s+1} \leq$$
$$\leq 2^6 2^{-s-1} + \int_{2^6 x_s}^{2^6 x_s \frac{t_s}{t_{s+1}}} \varphi\Big(3 \cdot 2^4 t_s \frac{x_s}{x}\Big) dx = 2^6 2^{-s-1} + A_s.$$

Оценим A_s. Для этого сделаем замену переменной и воспользуемся (4) и (12)

$$A_s = 3 \cdot 2^4 t_s x_s \int_{3t_{s+1}/4}^{3t_s/4} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \le 3 \cdot 2^4 t_s x_s \frac{\varphi\left(\frac{3t_s}{4}\right)}{\left(\frac{3t_s}{4}\right)^{1+\varepsilon}} \int_{3t_{s+1}/4}^{3t_s/4} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} =$$

$$= 2^6 x_s \frac{\varphi\left(\frac{3t_s}{4}\right)}{\left(\frac{3t_s}{4}\right)^{\varepsilon}} \int_{3t_{s+1}/4}^{3t_s/4} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} \le \frac{2^6 2^{-s-1} x_s \varphi(t_s)}{\varepsilon} = \frac{2^6}{\varepsilon} 2^{-s-1}.$$

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\Lambda_{p,I}^p f(x))dx \le 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \int_{I_s} \varphi(\Lambda_{p,I}^p f(x))dx < \infty. \qquad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. *A maximal theorem with function-theoretic applications*// Acta Math. – 1930. – V.54. – P. 81–116.
2. Fefferman C., Stein E.M. *H^p spaces of several variables*// Acta Math. – 1972. – V.129. – P. 137–139.
3. Korenovskii A.A. Properties of functions defined in terms of the mean oscillations: dis... kand. phis.-math. nauk: 01.01.01 – Odessa, 1988. – 121 p. (in Russian)
4. Kolyada V.I. *Rearrangements of functions and embedding theorems*// Usp. Mat. Nauk. – 1989. – V.44, №5(269). – P. 61–95. (in Russian)
5. Bennett C., Sharpley R. *Weak-type inequalities for H^p and BMO*// Proc. Sympos. Pure Math. — 1979. — V.35, Part1. – P. 201–229.
6. Kolyada V.I. *On imbedding in classes $\varphi(L)$*// Isv. AN SSSR. – 1975. – V.39, №2. – P. 418–437. (in Russian)

Odessa I. I. Mechnikov National University
ruslanshanin@gmail.com

Поступило 28.09.2014
После переработки 19.12.2014