УДК 517.956

Т. О. Дерев'янко, В. М. Кирилич

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ КВАЗІЛІНІЙНОЮ ГІПЕРБОЛІЧНОЮ СИСТЕМОЮ, ЩО ОПИСУЄ ПОПИТ СЛУЦЬКОГО

T. O. Derevianko, V. M. Kyrylych. *Optimal control problem for quasilinear hyperbolic system: the Slutsky equation*, Mat. Stud. **43** (2015), 66–77.

A model for determination the change of demand for goods at the change of price on commodities and capital of consumer is constructed. This model is described by a system of quasi-linear hyperbolic, which is written in Riemann invariants. Using the results of theory of ordinary differential equations with parameters we prove the existence of a classical solution to mixed hyperbolic problem. Also applying the method of linearization and non-classical internal variation the necessary optimality conditions for finding a given level of demand at the change of price on commodities and capital of consumer are shown.

Т. О. Деревянко, В. М. Кырылыч. *Оптимальное управление квазилинейной гиперболической системой, описывающей спрос Слуцкого* // Мат. Студії. – 2015. – Т.43, №1. – С.66–77.

Построена модель для определения изменения спроса на товары при изменении цены товара и капитала потребителя. Эта модель описывается системой квазилинейных гиперболических уравнений первого порядка в инвариантах Римана. Используя результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, доказано существование классического решения смешанной гиперболической задачи. А также, применяя метод линеаризации и некласическую внутреннюю вариацию, получены необходимые условия оптимальности для нахождения заданного уровня спроса при изменении цены товара и капитала потребителя.

1. Вступ. Завданням теорії споживання є, зокрема, дослідження зміни попиту на товари споживчого ринку в залежності від зміни цінової ринкової ситуації та доходу споживача. Якщо обмежитися випадком зміни ціни лише на один з товарів та доходу споживача ([1]), то приходимо до математичної моделі, в основі якої є системи квазілінійних гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Саме таку ситуацію ми досліджуємо в даній статті. Тут ми будуємо відповідну математичну модель теорії споживання, досліджуємо її коректність і на основі цього вивчаємо керованість попиту Слуцького.

Метою даної статті є дослідження керованості рівня попиту Слуцького при використанні нестандартної слабкої варіації допустимих керуючих впливів ([2]–[4]).

2. Неокласична теорія споживання. Розглянемо з точки зору споживача ринок, на якому є n товарів. Попит на кожен з товарів позначатимемо $x_i \geqslant 0,\ i \in I$, де

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35L50.
Keywords: Slutsky demand; quasilinear hyperbolic system; necessary optimality conditions.
doi:10.15330/ms.43.1.66-77

$I := \{1, 2, \ldots, n\}$. Також вважатимемо, що у споживача є деяка кількість капіталу $K > 0$. Для кожного i-го ($i \in I$) товару на ринку встановлено ціну $p_i > 0$ за одиницю товару. Позначимо $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0,\ i \in I\}$ та $\mathbb{R}^n_{++} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0,\ i \in I\}$.

Для кількісного порівняння споживчих наборів вважаємо, що у споживача є функція сукупної корисності $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$. Тоді, для знаходження попиту на споживчий набір товарів потрібно розв'язати задачу

$$U(x) \to \max, \quad \text{якщо } x \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{i \in I} p_i x_i \leqslant K. \tag{1}$$

Додатково вважатимемо, що функція $U = U(x)$ задовольняє умови:

a) U — строго увігнута ([5, с. 234]);

b) $U \in C^2(\mathbb{R}^n_{++})$;

c) $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}_{++},\ \forall i \in I$;

d) $\lim\limits_{x_i \to 0} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = +\infty,\ \lim\limits_{x_i \to +\infty} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} = 0\ \forall i \in I$.

Знаходження розв'язку задачі (1) ґрунтується на теоремі Куна-Таккера ([6, с. 60]). В нашому випадку функція Лагранжа задачі (1) має вигляд

$$L(x, \lambda) = U(x) + \lambda\Big(K - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big),$$

де λ — дійсний параметр, і умови теореми Куна-Таккера можна записати так:

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i \leqslant 0,\ i \in I;\ x_i \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i\right) = 0,\ i \in I;\ \lambda\Big(K - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big) = 0;\ \lambda \geqslant 0.$$

Ці умови за умов a)–d) набувають вигляду

$$x_i > 0\ (i \in I),\ \lambda > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0\ (i \in I), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = K. \tag{4}$$

Отже, рівняння (3)–(4) дають рівноважний рівень попиту при фіксованому наборі цін та рівні капіталу. Однак, виходячи з динамічності ринку, тобто, враховуючи зміну ціни на товари та рівень капіталу, можна стверджувати, що найпростішим випадком такої динаміки є зміна одного з вихідних параметрів моделі: ціни на один з товарів чи капіталу. В такому випадку для знаходження реакцій рівнів попиту на зміну параметра моделі приходимо до задачі Коші для лінійної неоднорідної системи звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [4]). Тут ми розглянемо ситуацію, коли змінюється ціна p_n та капітал K і отримаємо задачу для знаходження попиту Слуцького при варіації ціни p_n та капіталу K на підставі співвідношень (2)–(4).

Нехай $H(x) := \{H_{ij}(x)\} = \left\{\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\},\ x \in \mathbb{R}^n_{++}\ (i, j \in I)$, — матриця Гессе ([5, с. 234]). З умов a)–d) маємо, що матриця H є невиродженою і від'ємно визначеною для всіх $x \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Перепишемо рівняння (3), (4) у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i(K,p_n) + p_n x_n(K,p_n) = K, \tag{5}$$
$$\frac{\partial U(x(K,p_n))}{\partial x_i} - p_i\lambda(K,p_n) = 0,\ i\in I,\ i\neq n;\quad \frac{\partial U(x(K,p_n))}{\partial x_n} - p_n\lambda(K,p_n) = 0.$$

Продиференціюємо рівності (5) за p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(K,p_n)}{\partial p_n} = -x_n(K,p_n),$$
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x(K,p_n))}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial x_j(K,p_n)}{\partial p_n} - p_i \frac{\partial \lambda(K,p_n)}{\partial p_n} = 0,\ i\in I,\ i\neq n, \tag{6}$$
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U(x(K,p_n))}{\partial x_n \partial x_j}\frac{\partial x_j(K,p_n)}{\partial p_n} - p_n \frac{\partial \lambda(K,p_n)}{\partial p_n} = \lambda(K,p_n).$$

В елементах матриці Гессе, після введення позначень

$$x(K,p_n) := \begin{pmatrix} x_1(K,p_n)\\ x_2(K,p_n)\\ \vdots \\ x_n(K,p_n)\end{pmatrix},\ \omega(K,p_n) := \begin{pmatrix} \lambda(K,p_n)\\ x_1(K,p_n)\\ x_2(K,p_n)\\ \vdots \\ x_n(K,p_n)\end{pmatrix},\ f(x,\lambda) := \begin{pmatrix} x_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda\end{pmatrix},$$
$$p^T := (p_1,p_2,\dots,p_n),\ P(p_n,x) := \begin{pmatrix} 0 & -p^T\\ -p & H(x)\end{pmatrix},$$

система (6) перепишеться у такому матричному вигляді

$$P(p_n,x)\frac{\partial \omega(K,p_n)}{\partial p_n} = f(x,\lambda). \tag{7}$$

Матриця $P(p_n,x)$ — симетрична, від'ємно напіввизначена, а обернена до неї матиме вигляд

$$P^{-1}(p_n,x) = \begin{pmatrix} \mu(p_n,x) & \mu(p_n,x)p^T H^{-1}(x)\\ \mu(p_n,x)H^{-1}(x)p & W(p_n,x)\end{pmatrix},$$

де $\mu(p_n,x) = -(p^T H^{-1}(x)p)^{-1}$ — скалярна величина, $H^{-1}(x)$ — обернена матриця до матриці Гессе, $W(p_n,x) = \mu(p_n,x)H^{-1}(x)pp^T H^{-1}(x) + H^{-1}(x)$ ([5, с. 238]).

Домноживши (7) на $P^{-1}(p_n,x)$, отримаємо

$$\frac{\partial x(K,p_n)}{\partial p_n} = x_n(K,p_n)\mu(p_n,x)H^{-1}(x)p + \lambda(K,p_n)W_n(p_n,x), \tag{8}$$

де $W_n(p_n,x)$ — n-ий стовпчик матриці $W(p_n,x)$.

Подібно, як і вище, отримаємо $P(p_n,x)\frac{\partial\omega(K,p_n)}{\partial K} = g$, де $g = (-1,0,\dots,0)^T$, а для вектора попиту матимемо

$$\frac{\partial x(K,p_n)}{\partial K} = -\mu(p_n,x)H^{-1}(x)p. \tag{9}$$

Оскільки при зміні ціни та капіталу попит у задачі (1) повинен залишатися рівноважним, то з (3) отримаємо

$$dU(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} dx_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i.$$

Для незмінності рівня корисності необхідно і досить, щоб виконувалася умова $\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0$, звідки, на підставі (4), отримаємо

$$dK = \sum_{i=1}^{n} x_i dp_i. \tag{10}$$

Диференціюючи рівність (4), з огляду на (10), отримаємо $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_n} = 0$, що разом з (8) дає вигляд компенсованого попиту

$$\left(\frac{\partial x(K,p_n)}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} = \lambda(K,p_n) W_n(p_n,x). \tag{11}$$

З (8), (9), (11) отримуємо рівняння Слуцького

$$\frac{\partial x_i(K,p_n)}{\partial p_n} + \Big(x_n(K,p_n) + \frac{1}{p_n}\frac{\partial U(x(K,p_n))}{\partial x_n}\sum_{j=1}^{n} p_j H_{jn}^{-1}(x(K,p_n))\Big)\frac{\partial x_i(K,p_n)}{\partial K} =$$
$$= \frac{1}{p_n}\frac{\partial U(x(K,p_n))}{\partial x_n} H_{in}^{-1}(x(K,p_n)),\ i \in I. \tag{12}$$

З n-го рівняння системи (3) маємо явне зображення множника Лагранжа $\lambda(K,p_n) = \frac{1}{p_n}\frac{\partial U(x(K,p_n))}{\partial x_n}$. Звідси та з $n-1$ перших рівнянь системи (3) і рівняння (4) отримаємо умову для розв'язку системи (12) при деякій початковій ціні $p_n = p_n^0$:

$$p_n^0 \frac{\partial U(x(K,p_n^0))}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial U(x(K,p_n^0))}{\partial x_n} = 0,\ i \in I,\ i \neq n, \tag{13}$$

$$\sum_{j \in I,\ i \neq n} p_j x_j(K,p_n^0) + p_n^0 x_n(K,p_n^0) = K,\ K \in \mathbb{R}_{++}. \tag{14}$$

Подібно визначається величина попиту при рівні капіталу $K = K^0$

$$p_n \frac{\partial U(x(K^0,p_n))}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial U(x(K^0,p_n))}{\partial x_n} = 0,\ i \in I,\ i \neq n, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_j x_j(K^0,p_n) + p_n x_n(K^0,p_n) = K^0,\ p_n \in \mathbb{R}_{++}. \tag{16}$$

Припустимо, що (13)–(14) можна записати у вигляді

$$x_i(K,p_n^0) = \alpha_i(K),\ K \in \mathcal{K}(K^0),\ i \in I, \tag{17}$$

а (15)–(16) у вигляді

$$x_i(K^0,p_n) = \gamma_i(p_n),\ p_n \in \mathcal{P}(p_n^0),\ i \in I, \tag{18}$$

де $\mathcal{K}(K^0), \mathcal{P}(p_n^0)$ — деякі околи, відповідно, точок K^0, p_n^0.

Отже, знаходження реакції попиту Слуцького x на ринку на зміну ціни p_n та капіталу K зводиться до розв'язання задачі (12), (17), (18) для гіперболічної системи квазілінійних рівнянь першого порядку в околі точки (K^0, p_n^0).

Відшукання попиту Слуцького, як розв'язку задачі (12), (17), (18), дозволяє формулювати задачу про досягнення наперед заданого рівня попиту шляхом вибору відповідних керуючих впливів (задачу оптимального керування).

3. Класична розв'язність мішаної задачі для гіперболічної системи, що описує попит Слуцького. Для знаходження рівня попиту Слуцького при зростанні цін та капіталу в термінах усталених позначень теорії гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними перепишемо (12), (17), (18) у вигляді

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \lambda(x,t,y)\frac{\partial y_i}{\partial x} = f_i(x,t,y),\ (x,t) \in \Pi = [0,l] \times [0,T], \tag{19}$$

$$y_i(x,0) = \alpha_i(x),\ x \in [0,l], \tag{20}$$

$$y_i(0,t) = \gamma_i(t),\ t \in [0,T], \tag{21}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $l, T > 0$ — деякі сталі, $\alpha_i : [0,l] \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$, $\gamma_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, $f_i, \lambda \colon \Pi \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$, причому $\lambda = \lambda(x,t,y)$ набуває тільки невід'ємних значень, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — невідома функція. Зазначимо, що у випадку, коли функція λ є від'ємною на $\Pi \times \mathbb{R}^n$, то задача (19)–(21) зводиться до задачі Коші (19), (20), розв'язність якої досліджена в [7]. Задачі типу (19)–(21) з $\lambda \geqslant 0$ досліджувалися у роботах [8]–[10], де глобальність розв'язку встановлювалася кроками по часу. Ми пропонуємо іншу методику, яка дозволяє послабити умови на вихідні дані, а точніше, відмовитися від виконання умови Ліпшіца для похідних від правої частини рівняння (19) та функції λ за змінними x та y_j $(j \in I)$, подібний підхід застосований у статтях [11], [12].

Класичним розв'язком задачі (19)–(21) називаємо вектор-функцію $y \in (C^1(\Pi))^n$, яка поточково задовольняє рівняння (19) та умови (20), (21).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\alpha_i \in C^1([0,l])$, $\alpha_i'(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [0,l]$, $\gamma_i \in C^1([0,T])$, $\gamma_i'(t) \leqslant 0$ $\forall t \in [0,T]$ $(i \in I)$;
2) *функції* λ, f_i $(i \in I)$ *є неперервними та невід'ємними на* $[0,l] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$;
3) *функції* $(\lambda)_x, (\lambda)_{y_j}, (f_i)_x, (f_i)_{y_j}$ $(i,j \in I)$ *є неперервними, невід'ємними та обмеженими на* $[0,l] \times [0,T] \times \mathbb{R}^n$;
4) $\alpha_i(0) = \gamma_i(0),\ \gamma_i'(0) - \alpha_i'(0) = f_i(0,0,\alpha(0))$ $(i \in I)$.

Тоді існує єдиний класичний розв'язок задачі (19)–(21).

Доведення. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = f_i(x,t,y) \quad (i \in I), \\ \frac{dx}{dt} = \lambda(x,t,y) \end{cases} \tag{22}$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} y_i|_{t=0} = \alpha_i(\xi) \quad (i \in I), \\ \varphi|_{t=0} = \xi,\ \xi \in [0,l], \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} y_i|_{t=\tau} = \gamma_i(\tau) \quad (i \in I), \\ \varphi|_{t=\tau} = 0, \ \tau \in [0,T]. \end{cases} \tag{24}$$

Отже, маємо дві задачі Коші з параметрами для системи (22): (22), (23) та (22), (24). При виконанні умов 1), 2), 3) існують єдині непродовжувані розв'язки

$$y = \widetilde{y}(\xi,t),\ x = \widetilde{\varphi}(\xi,t),\ (\xi,t) \in \widetilde{\Pi} := \left\{(\xi,t) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant \xi \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant \widetilde{t}(\xi) \leqslant T\right\},$$
$$y = \widehat{y}(\tau,t),\ x = \widehat{\varphi}(\tau,t),\ (\tau,t) \in \widehat{\Pi} := \left\{(\tau,t) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leqslant \tau \leqslant T,\ \tau \leqslant t \leqslant \widehat{t}(\tau) \leqslant T\right\},$$

відповідно, задач (22), (23) і (22), (24) (див., наприклад, [13, с. 414]). Відмітимо, що $\widetilde{t}(\xi)$ є значенням змінної t, при якому крива $x = \widetilde{\varphi}(\xi,t)$ перетинає межу Π при заданому значенні ξ, а $\widehat{t}(\tau)$ — значення змінної t, при якому крива $x = \widehat{\varphi}(\tau,t)$ перетинає межу Π при заданому значенні τ.

Виходячи з еквівалентності задач (22), (23) та (22), (24) до відповідних систем інтегральних рівнянь, отримуємо

$$\begin{cases} \widetilde{y}_i(\xi,t) = \alpha_i(\xi) + \int_0^t f_i(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s))ds, \\ \widetilde{\varphi}(\xi,t) = \xi + \int_0^t \lambda(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s))ds, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \widehat{y}_i(\tau,t) = \gamma_i(\tau) + \int_\tau^t f_i(\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s))ds, \\ \widehat{\varphi}(\tau,t) = 0 + \int_\tau^t \lambda(\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s))ds. \end{cases} \tag{26}$$

Продиференціювавши (25) за ξ та (26) за τ, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{y}_i}{\partial \xi}(\xi,t) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi}(\xi) + \int_0^t \Big[\frac{\partial f_i}{\partial x}(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s))\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \xi}(\xi,s) + \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s))\frac{\partial \widetilde{y}_j}{\partial \xi}(\xi,s)\Big]ds, \\ \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \xi}(\xi,t) = 1 + \int_0^t \Big[\frac{\partial \lambda}{\partial x}(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s))\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \xi}(\xi,s) + \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial y_j}(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s))\frac{\partial \widetilde{y}_j}{\partial \xi}(\xi,s)\Big]ds, \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{y}_i}{\partial \tau}(\tau,t) = \frac{\partial \gamma_i}{\partial \tau}(\tau) - f_i(0,\tau,\gamma(\tau)) + \int_\tau^t \Big[\frac{\partial f_i}{\partial x}(\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s))\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \tau}(\tau,s) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s))\frac{\partial \widehat{y}_j}{\partial \tau}(\tau,s)\Big]ds, \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \tau}(\tau,t) = -\lambda(0,\tau,\widehat{y}(\tau,\tau)) + \int_\tau^t \Big[\frac{\partial \lambda}{\partial x}(\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s))\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \tau}(\tau,s) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial y_j}(\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s))\frac{\partial \widehat{y}_j}{\partial \tau}(\tau,s)\Big]ds, \end{cases} \tag{28}$$

де $\gamma(\tau) = (\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau), \ldots, \gamma_n(\tau))$.

З першого рівняння умови 4), використовуючи (25) при $\xi = 0$ та (26) при $\tau = 0$, отримаємо $\widetilde{t}(\xi)|_{\xi=0} = \widehat{t}(\tau)|_{\tau=0} =: t^*$ і $\widetilde{\varphi}(0,t) = \widehat{\varphi}(0,t) =: \varphi(t)$ $\forall t \in [0,t^*]$. Якщо $t^* < T$, то покладемо $\varphi(t) := l$ при $t \in (t^*,T]$.

Використовуючи метод послідовних наближень, з умов 1)–3), отримаємо

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}(\xi,t)}{\partial \xi} > 0 \ \ \forall \xi \in [0,l],\ \forall t \in [0,\widetilde{t}(\xi)], \quad \frac{\partial \widehat{\varphi}(\tau,t)}{\partial \tau} < 0 \ \ \forall \tau \in [0,T],\ \forall t \in [\tau,\widehat{t}(\tau)].$$

Отже, для будь якого фіксованого $t \in [0,t^*]$ функція $x = \widetilde{\varphi}$ від змінної $\xi \in [0,l]$ є оборотною і будь якого фіксованого $t \in [0,T]$ функція $x = \widehat{\varphi}(\tau,t)$ від змінної $\tau \in [0,t]$

є оборотною, тобто, існують функції $\xi = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)$, $x \in [\varphi(t), l]$, та $\tau = \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)$, $x \in [0, \varphi(t)]$ (t — фіксоване).
Нехай $\Pi_2 = \{(x,t) \in \Pi \mid 0 \leqslant t \leqslant t^*, \varphi(t) \leqslant x \leqslant l\}$ та $\Pi_1 = \{(x,t) \in \Pi \mid (x,t) \notin \Pi_2\}$. Визначимо функцію $y(x,t) = \begin{cases} \widehat{y}(\widehat{\varphi}^{-1}(x,t),t), & (x,t) \in \Pi_1, \\ \widetilde{y}(\widetilde{\varphi}^{-1}(x,t),t), & (x,t) \in \Pi_2, \end{cases}$. Переконаємось, що функція y є розв'язком задачі (19)–(21). З першої рівності в умові 4), використовуючи (25) при $\xi = 0$ та (26) при $\tau = 0$, отримаємо $\widetilde{y}(0,t) = \widehat{y}(0,t)$ $\forall t \in [0, t^*]$. Звідси та того, що $\widehat{y}(0,t) = y(\widehat{\varphi}^{-1}(\varphi(t),t))$ і $\widetilde{y}(0,t) = y(\widetilde{\varphi}^{-1}(\varphi(t),t))$, маємо $y \in (C(\Pi))^n$. З умов (23), (24) можна отримати $y(x,0) = \widetilde{y}(\widetilde{\varphi}^{-1}(x,0),0) = \alpha(\widetilde{\varphi}^{-1}(x,0)) = \alpha(x)$ $\forall x \in [0,l]$, $y(0,t) = \widehat{y}(\widehat{\varphi}^{-1}(0,t),t) = \gamma(t)$ $\forall t \in [0,T]$. Отже, функція y задовольняє умови (20), (21).

Переконаємось, що функція y задовольняє рівняння (19). Диференціюючи тотожності (25) і $x = \widetilde{\varphi}(\widetilde{\varphi}^{-1}(x,t),t)$ $\forall (x,t) \in \Pi_2$ за змінними x та t, отримаємо

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial t} = \Big[-\lambda(\widetilde{\varphi}(\xi,t),t,\widetilde{y}(\xi,t)) \left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}(\xi,t)}{\partial \xi} \right)^{-1} \Big] \Big|_{\xi = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}(\xi,t)}{\partial \xi} \right)^{-1} \Bigg|_{\xi = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}, \tag{30}$$

а диференціюючи тотожності (26) і $x = \widehat{\varphi}(\widehat{\varphi}^{-1}(x,t),t)$ $\forall (x,t) \in \Pi_1$ маємо

$$\frac{\partial \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial t} = \Big[-\lambda(\widehat{\varphi}(\tau,t),t,\widehat{y}(\tau,t)) \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}(\tau,t)}{\partial \tau} \right)^{-1} \Big] \Big|_{\tau = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)},$$

$$\frac{\partial \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}(\tau,t)}{\partial \tau} \right)^{-1} \Bigg|_{\tau = \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}. \tag{31}$$

Знайдемо частинні похідні функції y в Π_2. Використовуючи (29), (30), маємо

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} = \Big[\frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial \xi} \, \frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial t} \Big] \Big|_{\xi = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = \Big[\frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial \xi} \, \frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial x} \Big] \Big|_{\xi = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}. \tag{33}$$

На підставі (25), (32), (33) для кожного $(x,t) \in \Pi_2$ отримаємо

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t,y) \frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = \Big[\frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial \xi} \frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial t} +$$

$$+ \lambda(x,t,y) \frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial \xi} \frac{\partial \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial x} \Big] \Big|_{\xi = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)} = \frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial t} \Big|_{\xi = \widetilde{\varphi}^{-1}(x,t)} = f_i(x,t,y).$$

Подібно визначаються частинні похідні від функції $y = y(x,t)$ за змінними x та t в Π_1

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} = \Big[\frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial \tau} \, \frac{\partial \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial t} \Big] \Big|_{\tau = \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = \Big[\frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial \tau} \, \frac{\partial \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial x} \Big] \Big|_{\tau = \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}. \tag{35}$$

На підставі (26), (34), (35) для кожного $(x,t) \in \Pi_1$ отримаємо

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} + \lambda(x,t,y)\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = \Big[\frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial \tau}\frac{\partial \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial t} +$$
$$+\lambda(x,t,y)\frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial \tau}\frac{\partial \widehat{\varphi}^{-1}(x,t)}{\partial x}\Big]\Big|_{\tau=\widehat{\varphi}^{-1}(x,t)} = \frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial t}\Big|_{\tau=\widehat{\varphi}^{-1}(x,t)} = f_i(x,t,y).$$

Переконаємось, що визначені рівностями (32), (34) та (33), (35) частинні похідні є неперервними функціями на Π. Для цього достатньо перевірити, що вони є неперервними на кривій $x=\varphi(t)$. Із зображення вектор-функції $y=y(x,t)$ легко отримати, що функції $x=\widetilde{\varphi}(\xi,t)$, $y=\widetilde{y}(\xi,t)=y(\widetilde{\varphi}(\xi,t),t)$ є розв'язком задачі Коші (22), (23), тому з другого рівняння (22) отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \widetilde{\varphi}(\xi,t)}{\partial \xi}\Big) = \Bigg(\frac{\partial \lambda(\widetilde{\varphi}(\xi,t),t,\widetilde{y}(\xi,t))}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \lambda((\widetilde{\varphi}(\xi,t),t,\widetilde{y}(\xi,t)))}{\partial y_j}\frac{\partial y_j(\widetilde{\varphi}(\xi,t),t)}{\partial x}\Bigg)\frac{\partial \widetilde{\varphi}(\xi,t)}{\partial \xi},$$

розв'язком якого є функція

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}(\xi,t)}{\partial \xi} = \exp\Big\{\int_0^t \Big(\frac{\partial \lambda(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s))}{\partial x} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \lambda((\widetilde{\varphi}(\xi,s),s,\widetilde{y}(\xi,s)))}{\partial y_j}\frac{\partial y_j(\widetilde{\varphi}(\xi,s),s)}{\partial x}\Big)ds\Big\}. \tag{36}$$

Міркуючи подібно, для функцій $x=\widehat{\varphi}(\tau,t)$, $y=\widehat{y}(\tau,t)=y(\widehat{\varphi}(\tau,t),t)$ отримаємо, що

$$\frac{\partial \widehat{\varphi}(\tau,t)}{\partial \tau} = \exp\Big\{\int_\tau^t \Big(\frac{\partial \lambda(\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s))}{\partial x} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \lambda((\widehat{\varphi}(\tau,s),s,\widehat{y}(\tau,s)))}{\partial y_j}\frac{\partial y_j(\widehat{\varphi}(\tau,s),s)}{\partial x}\Big)ds\Big\}. \tag{37}$$

Зауважимо, що

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}(0,t)}{\partial \xi} = \frac{\partial \widehat{\varphi}(0,t)}{\partial \tau} \neq 0 \ \forall t \in [0,t^*], \tag{38}$$

оскільки праві частини (36), (37) дорівнюють одна одній, відповідно при $\xi=0$ та $\tau=0$.

Для (33), використовуючи (30), отримаємо $\frac{\partial y_i(\widetilde{\varphi}(\xi,t),t)}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{y}_i(\xi,t)}{\partial \xi}\big(\frac{\partial \widetilde{\varphi}(\xi,t)}{\partial \xi}\big)^{-1}$. Подібно, для (35) з (31) матимемо $\frac{\partial y_i(\widehat{\varphi}(\tau,t),t)}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{y}_i(\tau,t)}{\partial \tau}\big(\frac{\partial \widehat{\varphi}(\tau,t)}{\partial \tau}\big)^{-1}$.

Для неперервності похідної $\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x}$ $(i \in I)$ на кривій $x=\varphi(t)$, $t \in [0,t^*]$ потрібно вимагати виконання для кожного $t \in [0,t^*]$ такої рівності

$$\lim_{\xi\to 0_+}\frac{\partial y_i(\widetilde{\varphi}(\xi,t),t)}{\partial x} = \lim_{\tau\to 0_+}\frac{\partial y_i(\widehat{\varphi}(\tau,t),t)}{\partial x}. \tag{39}$$

З умови (38) та означення функції $y=y(x,t)$ матимемо

$$\Big|\frac{\partial y_i(\widetilde{\varphi}(0,t),t)}{\partial x} - \frac{\partial y_i(\widehat{\varphi}(0,t),t)}{\partial x}\Big| = \Big|\frac{\partial \widetilde{y}_i(0,t)}{\partial \xi}\Big(\frac{\partial \widetilde{\varphi}(0,t)}{\partial \xi}\Big)^{-1} - \frac{\partial \widehat{y}_i(0,t)}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial \widehat{\varphi}(0,t)}{\partial \tau}\Big)^{-1}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial\alpha_i}{\partial\xi}(0) - \frac{\partial\gamma_i}{\partial\tau}(0) + f_i(0,0,\gamma(0))\right| +$$
$$+\int_0^t \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\varphi(s),s,y(\varphi(s),s))\right| \left|\frac{\partial y_j(\widetilde{\varphi}(0,s),s)}{\partial\xi} - \frac{\partial y_j(\widehat{\varphi}(0,s),s)}{\partial\tau}\right| ds,$$

оскільки $|(\frac{\partial\widetilde{\varphi}(0,t)}{\partial\xi})^{-1}| \leqslant 1$. За лемою Гронуолла—Беллмана ([3, с. 23]) випливає, що умова 4) є достатньою для неперервності частинної похідної за змінною x від функції $y = y(x,t)$ в Π.

Неперервність похідної $\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t}$ $(i \in I)$ випливає з рівняння (19), тому побудована функція $y = y(x,t)$ є класичним розв'язком задачі (19)–(21). □

4. Задача оптимального керування. Нехай $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (C^1([0,l]\times\mathbb{R}^{r_0}))^n$, $\gamma \in (C^1([0,T]\times\mathbb{R}^{r_1}))^n$ — задані функції, U^0 — компакт в $\mathbb{R}^{r_0}$, U^1 — компакт в $\mathbb{R}^{r_1}$. Визначимо простір керувань так

$$W(\alpha,\gamma,U^0,U^1) = \big\{u = (u^{(0)},u^{(1)}) \in \big(C^1([0,l])\big)^n \times \big(C^1([0,T])\big)^n \mid u^{(0)}(x) \in U^0 \ \forall x \in [0,l],$$
$$u^{(1)}(t) \in U^1 \ \forall t \in [0,T],\ \alpha_i(0,u^{(0)}(0)) = \gamma_i(0,u^{(1)}(0)) \ \forall i \in I\big\}.$$

Для заданого керування $u = (u^{(0)},u^{(1)}) \in W(\alpha,\gamma,U^0,U^1)$ стан системи описується вектор-функцією $y\colon \Pi \to \mathbb{R}^n$, яка є розв'язком (19), при заданих умовах

$$y_i(x,0) = \alpha_i(x,u^{(0)}(x)),\ x \in [0,l], \tag{40}$$
$$y_i(0,t) = \gamma_i(t,u^{(1)}(t)),\ t \in [0,T]. \tag{41}$$

Цей розв'язок будемо позначати через $y = y(x,t;u)$ або $y = y(u)$.

Цільовий функціонал задачі оптимального керування має вигляд

$$J(u) = \int_0^l \Phi(x,y(x,T;u))dx + \int_0^l\int_0^T F(x,t,y(u))dxdt, \tag{42}$$

де $\Phi\colon [0,l]\times\mathbb{R}^n \to [0,l]$, $F\colon \Pi\times\mathbb{R}^n \to \Pi$.

Задача оптимального керування полягає в мінімізації цільового функціонала на множині допустимих керувань $W(\alpha,\gamma,U^0,U^1)$.

Припустимо, що вихідні дані (19), (40), (41) задовольняють умови:

I) виконуються умови теореми 1;

II) функції $\frac{\partial\Phi(y,x)}{\partial y_i}$, $\frac{\partial F(x,t,y)}{\partial y_i}$ $(i \in I)$ є неперервними та обмеженими, відповідно, на множині $\mathbb{R}^n\times[0,l]$ та $\Pi\times\mathbb{R}^n$;

III) $\left.\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y_i}\right|_{x=l} = 0$ $(i \in I)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Нехай u, y — оптимальне керування та відповідна траєкторія. Для допустимого керування $\widetilde{u} = u + \Delta u$ та відповідної траєкторії $\widetilde{y} = y + \Delta y$ розглянемо різницю

$$\Delta J(u,\Delta u) = J(u+\Delta u) - J(u) = \int_0^l \Phi(x,y(x,T;u+\Delta u)) - \Phi(x,y(x,T;u))dx+$$
$$+\int_0^T\int_0^l \left[F(x,t,y(u+\Delta u)) - F(x,t,y(u))\right]dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\sum_{i=1}^n\psi_i(x,t)\Big(\frac{\partial y_i(u+\Delta u)}{\partial t}+\lambda(x,t,y(u+\Delta u))\frac{\partial y_i(u+\Delta u)}{\partial x}-$$

$$-f_i(x,t,y(u+\Delta u))-\frac{\partial y_i(u)}{\partial t}-\lambda(x,t,y(u))\frac{\partial y_i(u)}{\partial x}+f_i(x,t,y(u))\Big)dxdt, \tag{43}$$

де $\psi\in(C(\Pi))^n$ — поки-що довільна функція.

Використовуючи формулу Тейлора та правило інтегрування частинами ([14, с. 364]), (43) можна звести до вигляду

$$\Delta J(u,\Delta u)=\int_0^l\sum_{i=1}^n\frac{\partial\Phi(x,y(x,T;u))}{\partial y_i}\Delta y_i(x,T;u,\Delta u)dx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\sum_{i=1}^n\frac{\partial F(x,t,y(u))}{\partial y_i}\Delta y_i(x,t;u,\Delta u)dxdt+$$

$$+\int_0^l\sum_{i=1}^n\left(\psi_i(x,T;u)\Delta y_i(x,T;u,\Delta u)-\psi_i(x,0)\Delta y_i(x,0;u,\Delta u)\right)dxdt-$$

$$+\int_0^T\int_0^l\sum_{i=1}^n\psi_i(x,t)\sum_{k=1}^n\frac{\partial\lambda(x,t,y(u))}{\partial y_k}\Delta y_k(x,t;u,\Delta u)\frac{\partial y_i(x,t;u)}{\partial x}dxdt+$$

$$+\int_0^T\sum_{i=1}^n(\psi_i(l,t)\lambda(l,t,y(l,t;u+\Delta u))\Delta y_i(l,t;u,\Delta u)-\psi_i(0,t)\lambda(0,t,y(0,t;u+\Delta u))\times$$

$$\times\Delta y_i(0,t;u,\Delta u))dt-\int_0^T\int_0^l\sum_{i=1}^n\Delta y_i(x,t;u,\Delta u)\frac{\partial\lambda(x,t,y(u+\Delta u))}{\partial x}\ \psi_i(x,t)\ dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_0^l\sum_{i=1}^n\Delta y_i(x,t;u,\Delta u)\left(\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial t}+\lambda(x,t,y(u+\Delta u))\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial x}\right)dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_0^l\sum_{i=1}^n\psi_i(x,t)\sum_{k=1}^n\frac{\partial f_i(x,t,y(u))}{\partial y_k}\Delta y_k(x,t;u,\Delta u)dxdt+\eta, \tag{44}$$

де останній доданок має такий вигляд $\eta=o_\Phi(\|\Delta y(x,T;u,\Delta u)\|)+o_F(\|\Delta y(x,t;u,\Delta u)\|)+$ $+o_\lambda(\|\Delta y(x,t;u,\Delta u)\|)+o_f(\|\Delta y(x,t;u,\Delta u)\|)$.

Варіаційний аналіз досліджуваної задачі базується на використанні некласичних варіацій ([2]), які забезпечують гладкість допустимих керувань. Варіація керування будується за правилом

$$u^{(0)}_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x)=u^{(0)}(x+\varepsilon\delta^{(0)}(x)),\ x\in[0,l],\ u^{(1)}_{\varepsilon,\delta^{(1)}}(t)=u^{(1)}(t+\varepsilon\delta^{(1)}(t)),\ t\in[0,T], \tag{45}$$

де $\varepsilon\in[0,1]$ — малий параметр, який характеризує величину варіації, $\delta^{(0)}$, $\delta^{(1)}$ — неперервно-диференційовні функції на своїх областях визначення, які задовольняють умови

$$\begin{gathered}0\leqslant x+\delta^{(0)}(x)\leqslant l\ \ \forall x\in[0,l],\ \delta^{(0)}(0)=\delta^{(0)}(l)=0,\\ 0\leqslant t+\delta^{(1)}(t)\leqslant T\ \ \forall t\in[0,T],\ \delta^{(1)}(0)=\delta^{(1)}(T)=0.\end{gathered} \tag{46}$$

Нехай для всіх $i\in I$ вектор-функція $\psi_i\colon\Pi\to\mathbb{R}$ є розв'язком задачі

$$\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial t}+\lambda(x,t,y(u))\frac{\partial\psi_i(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial F(x,t,y(u))}{\partial y_i}+\frac{\partial\lambda(x,t,y(u))}{\partial y_i}\sum_{j=1}^n\psi_j(x,t)\frac{\partial y_j(x,t;u)}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial\lambda(x,t,y(u))}{\partial x}\psi_i(x,t)-\sum_{j=1}^{n}\psi_j(x,t)\frac{\partial f_j(x,t,y(u))}{\partial y_i},\ (x,t)\in\Pi, \tag{47}$$

$$\psi_i(x,T)=-\frac{\partial\Phi(x,y(u))}{\partial y_i},\ x\in[0,l], \tag{48}$$

$$\psi_i(l,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{49}$$

де $y\in(C^1(\Pi))^n$. З припущень I)–III), використовуючи один результат з [10], отримуємо, що існує єдина $\psi\in(C(\Pi))^n$ що є розв'язком задачі (47)–(49), як неперервний розв'язок відповідної еквівалентної системи інтегральних рівнянь в Π, який позначатимемо через $\psi=\psi(x,t;y,u)$.

Вибираючи варіацію керування за правилом (45) і використовуючи (47)–(49) та представлення для $\Delta u_{\varepsilon,\delta}=(\Delta u^0_{\varepsilon,\delta^{(0)}},\Delta u^1_{\varepsilon,\delta^{(1)}})$

$$\Delta u^0_{\varepsilon,\delta^{(0)}}(x)=\frac{du^{(0)}(x)}{dx}\delta^{(0)}(x)+o(\varepsilon),\ \Delta u^1_{\varepsilon,\delta^{(1)}}(t)=\frac{du^{(1)}(t)}{dt}\delta^{(1)}(t)+o(\varepsilon),$$

з формули приросту цільового функціоналу (44), легко отримати

$$\lim_{\varepsilon\to0_+}\frac{J(u+\Delta u_{\varepsilon,\delta})-J(u)}{\varepsilon}=-\int_0^l\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x,0;y,u)\sum_{j=1}^{r_0}\frac{\partial\alpha_i(x,u^{(0)}(x))}{\partial u_j^{(0)}}\frac{du_j^{(0)}(x)}{dx}\delta^{(0)}(x)dx-$$

$$-\int_0^T\lambda(0,t,y(0,t;u))\sum_{i=1}^{n}\psi_i(0,t;y,u)\sum_{j=1}^{r_1}\frac{\partial\gamma_i(t,u^{(1)}(t))}{\partial u_j^{(1)}}\frac{du_j^{(1)}(t)}{dt}\delta^{(1)}(t)dt. \tag{50}$$

Оскільки, $\delta=\delta^{(0)}(x)$, $\delta_1=\delta^{(1)}(t)$ довільні функції, то використовуючи теорему Ферма ([15, c. 55]), можна сформулювати такий результат.

Теорема 2. *Якщо* $u=(u^{(0)},u^{(1)})$ *надає мінімального значення функціоналу* (42) *і функція* $y=y(x,t;u)$ *відповідний класичний розв'язок задачі* (19), (40), (41), *то виконуються умови*

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x,0;y,u)\sum_{j=1}^{r_0}\frac{\partial\alpha_i(x,u^{(0)}(x))}{\partial u_j^{(0)}}\frac{du_j^{(0)}(x)}{dx}=0,\ x\in[0,l],$$

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i(0,t;y,u)\sum_{j=1}^{r_1}\frac{\partial\gamma_i(t,u^{(1)}(t))}{\partial u_j^{(1)}}\frac{du_j^{(1)}(t)}{dt}=0,\ t\in[0,T],$$

де $\psi=\psi(x,t;y,u)$ *— узагальнений розв'язок задачі* (47)–(49).

ЛІТЕРАТУРА

1. Ashmanov S.A. Mathematical models and methods in economics. – M.: Moscow University, 1980. – 199 p. (in Russian)
2. Arguchintsev A.V. Optimal control of hyperbolic systems. – M.: FIZMATLIT, 2007. – 168 p. (in Russian)
3. Gugat M. *Optimal nodal control of networked hyperbolic systems: evaluation of derivatives*// Advanced Modeling and Optimization. – 2005. – V.7, №1. – P. 9–37.

4. Matveev H.I., Yakubovych V.A., Optimal control systems: Ordinary differential equations. Special problems. – Uzd-vo S.-Peterburg., 2003. – 540 p. (in Russian)
5. Erofeenko V.T., Kozlovskaya I.S., Partial differential equations and mathematical models in economics: Course of lectures. Uzd-vo 2, revised and complemented. – M.: Edytoral URSS, 2004. – 248 p. (in Russian)
6. Syharev A.G., Tymohov A.V., Fedorov V.V. The course of optimization methods. – M.: Nayka, GRFML, 1986. – 328 p. (in Russian)
7. Myshkis A.D., Filimonov A.M. *Continuous solution of quasilinear hyperbolic system of equations with two independent variables*// Differential Equations. – 1981. – V.17, №3. – P. 488–500. (in Russian)
8. Ptashnyk B.I., Ilkiv V.S., Kmit I.Ya., Polishchuk V.M., Nonlocal Boundary Value Problems for Partial Differential Equations, Kiev: Naukova Dumka, 2002. – 415 p. (in Ukrainian)
9. Myshkis A.D., Filimonov A.M. *On the global continuous solvability of the mixed problem for one-dimensional hyperbolic systems of quasilinear equations*// Differential Equations. – 2008. – V.44, №3. – P. 394–407. (in Russian)
10. Filimonov A.M. Sufficient conditions of global solvability of the mixed problem for the quasilinear hyperbolic systems with two independent variables. – M.: 1980, 17 p. – Dep. in VINITI 19.12.80, №6–81. (in Russian)
11. D'Acunto B. Frunzo L. *Qualitative analysis and simulations of a free boundary problem for multispecies biofilm models*// Mathematical and Computer Modeling. – 2011. – V.53. – P. 1596–1606.
12. D'Acunto B., Frunzo L. *Free boundary problem for an initial cell layer in multispecies biofilm formation*// Applied Mathematics Letters. – 2012. – V.25. – P. 20–26.
13. Samojlenko A.M., Perestjyk M.O., Parasjyk I.O., Differential equation. – Kyiv: Lubid, 2003. – 600 p. (in Ukrainian)
14. Fichtenholz G.M., A course of differential and integral calculus. – Moscow: Nauka, 1969, V.II. – 800 p. (in Russian)
15. Moklyachuk M.P., Variation calculation. Extreme problems. – Kyiv, 2004, 384 p. (in Ukrainian)

Ivan Franko National University of Lviv
taras_derevianko@ukr.net

Надійшло 6.06.2014